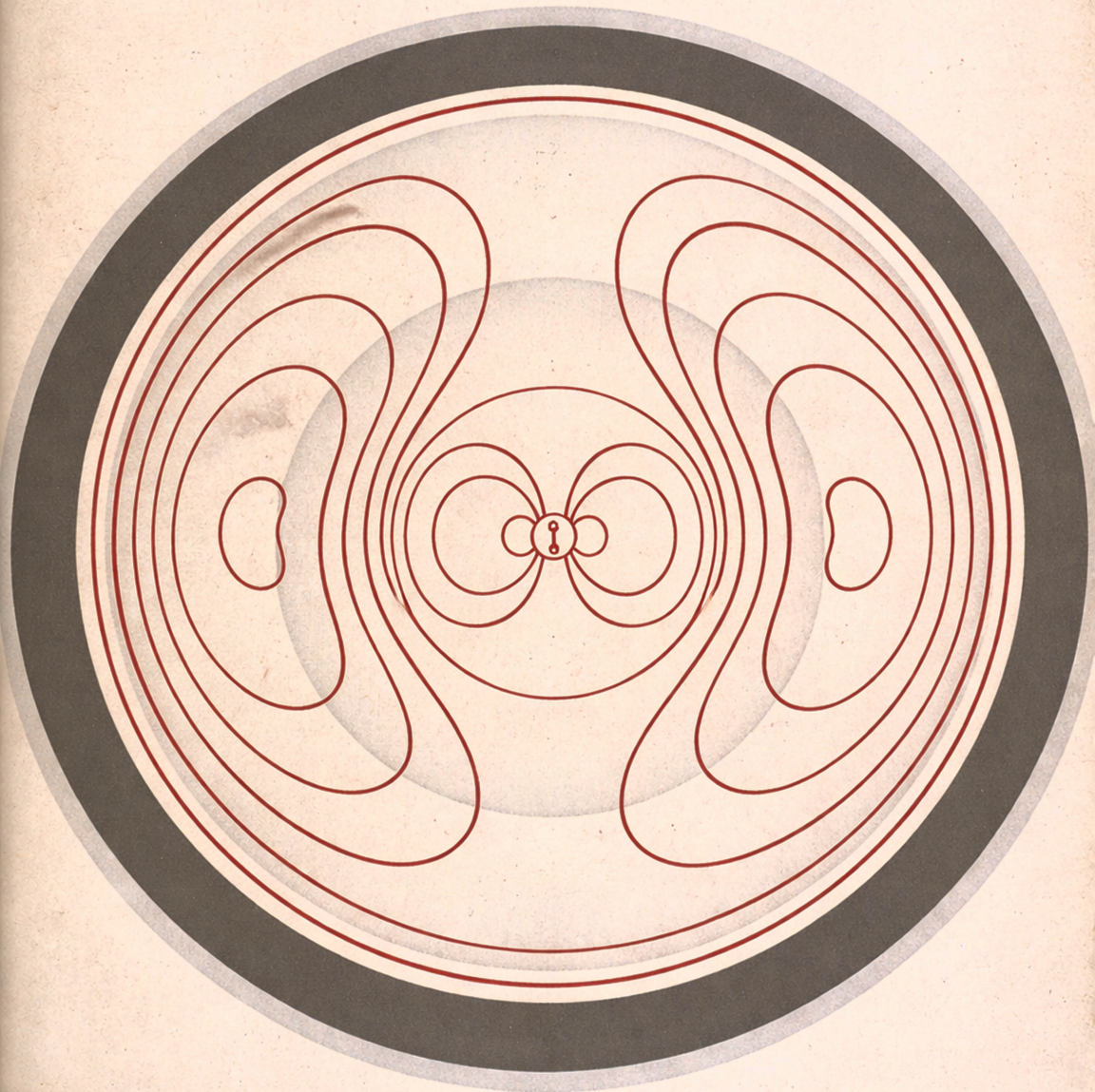
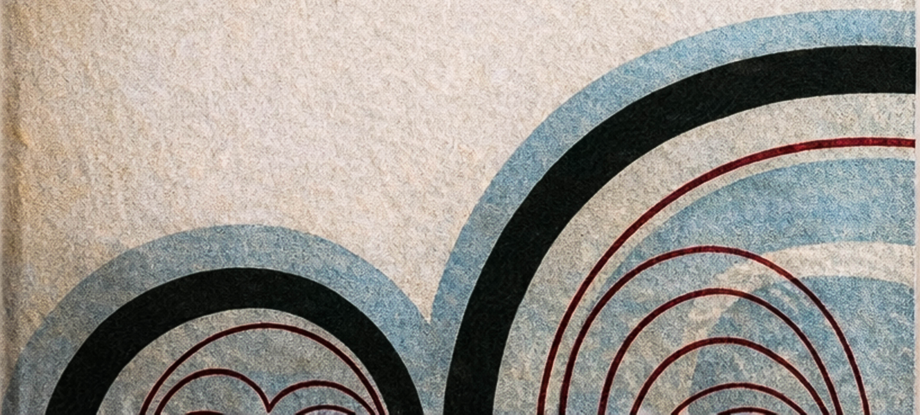
V. V. NIKOLSKI

Electrodinámica y propagación de ondas de radio



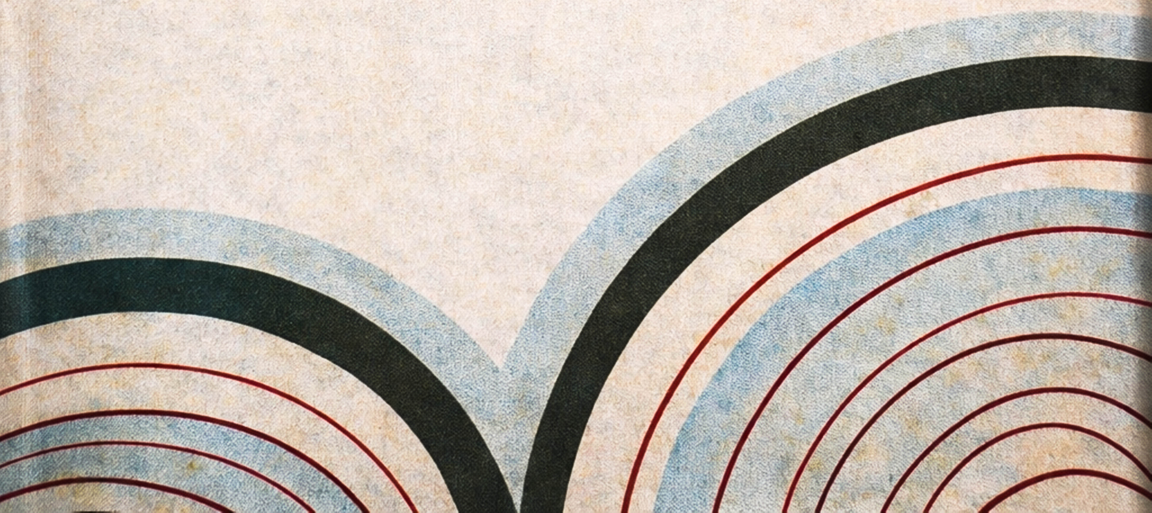
El profesor Viacheslav Vladimirovich NIKOLSKI doctor en ciencias técnicas, jefe de la cátedra "Antenas" del Instituto de radiotecnia, electrónica y automatización de Moscú, es autor de más de diez obras técnicas y cientificas, entre ellas ocho libros. La teoria del campo electromagnético, la fisica matematica, las antenas y la técnica de frecuencias ultraelevadas, la proyección mediante máquinas electrónicas de cálculo son sus intereses cientificos principales. Como investigador, V. V. Nikolski ha hecho su mayor aportación a la electrodinámica de los medios girotropos (las ferritas magnetizadas en la técnica de las frecuencias ultraelevadas) y en los métodos matematicos para resolver los problemas de electrodinámica. V. V. Nikolski confeccionó la teoria de los algoritmos universales para su realización por medio de calculadoras electrónicas. Este enfoque desde posiciones únicas, abarca los problemas de la difracción y la técnica de antenas, los problemas de los dispositivos de guía de ondas y los "esquemas integrales" de frecuencias ultraelevadas.

Los libros escritos por V. V. Nikolski están dedicados a la teoria del campo electromagnético, la técnica de frecuencias ultralevadas, antenas, asi como al aparato matemático de electrodinámica, etc.



La obra "Electrodinámica y propagación de ondas de radio" de V. V. Nikolski traducida al español, fue editada en la URSS en 1973. Es el resultado de una considerable amplificación y desarrollo del conocido curso "Teoria del campo electromagnético", reeditado tres veces el el transcurso de 1960—1964. En este libro el autor por primera vez aplicó el método deductivo de exposición de la teoria del electromagnetismo (de las ecuaciones de Maxwell a los problemas y clases de fenómemos particulares).

La obra es el curso de la teoria del electromagnetismo, acentuando en la electrodinámica radiotécnica contempooránea. El sstudio de los procesos ondulatorios comienza por las ondas planas homogéneas más sencilles en un medio infniito, así como a haber límites de separación de los medios (reflexión, refracción, creación de ondas superficiales, etc.).



Considerable lugar ocupa en el manual
la teorío de los sistemas de guiado y los
correspondientes procesos ondulatorios,
así como los objetos de la técnica
de microondos.
Párrafos sepeciales están dedicados
a la teorio de excitación de las guías de onda
y los resonadores por sistemas irregulares
y dispositivos reales, incluyendo las cuestiones
relacionadas con su cálculo en las calculadoras-
electrónicas.
Al final del libro se examinan los campos
y ondas en diferentes medios (anisótrops y,
en particular, girótropos, activos,
no lineales, etc.). En este caso, se presta
atención a las ferritas en la técnica
de microondas, óptica no lineal etc.
En su total, el libro se caracteriza
por la profundidad y claridad de exposición
de un amplio conjunto de fenómenos y
principios teóricos.

Los libros esentios por V. V. Nikolski
están códicados a la teorio del sanpoditer-
trorugasdituo la técrtica de freciporcias ul-
mecionados, autimas asi como el aparato
mátemático de electrodinámica, etc.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

V. V. Nikolski

Electrodinámica y propagación de ondas de radio

Traducido del ruso

por el ingeniero

Antonio Ballesteros Elías

Editorial Mir Moscú

Impreso en la URSS. 1976

На испанском языке

© Издательство «Наука», 1973

© Traducción al español. Editorial Mir. 1976

Indice

Prólogo
Introducción

Capítulo 1

Leyes
del electromagnetismo

I. Nociones y ecuaciones principales del electromagnetismo 17
§ 1. Fenómenos del electromagnetismo y campo electromagnético 18
§ 2. Ecuaciones principales de Maxwell 23
§ 3. Divergencias de la inducción eléctrica y de la magnética 30
§ 4. Continuación del estudio de las ecuaciones de Maxwell 33
II. Propiedades electromagnéticas de los medios 37
§ 5. Polarización e imanación 38
§ 6. Electroconductibilidad 44
§ 7. Campos en superficies de separación de los medios. Condiciones límites 50
§ 8. Ejemplos de empleo de las condiciones límites 57
III. Energía del campo electromagnético 61
§ 9. Absorción de energía y acción de los manantiales 62
§ 10. Ecuación de balance de energía 65
§ 11. Energía del campo electromagnético, su localización y movimiento 69
§ 12. Aplicación de los resultados obtenidos 72
IV. Conclusión 75
§ 13. Sistema de ecuaciones de Maxwell y tipos de fenómenos electromagnéticos 75

Capítulo 2

Campos estáticos,
estacionarios
y cuasiestacionarios

1. Electrostática y magnetostática 81
§ 14. Ecuaciones principales de electrostática. Potencial 82
§ 15. Cargas puntuales. Dipolo 86
§ 16. Ejemplos de campos electrostáticos 91
§ 17. Conductores en el campo electrostático. Capacidad 98
§ 18. Sistemas de dipolos y polarización de un dieléctrico 106

§ 19. Energía del campo electrostático 112
§ 20. Deformación de un campo homogéneo por conductores y dieléctricos de forma sencilla 115
§ 21. Magnetostática 122
II. Campo electromagnético estacionario 129
§ 22. Ecuaciones del campo magnético estacionario. Potencial vectorial 130
§ 23. Corrientes lineales. Dipolo magnético 134
§ 24. Ejemplos de campos magnéticos 140
§ 25. Energía del campo magnético estacionario. Inductancia 148
§ 26. Campo eléctrico estacionario y propiedades generales del campo electromagnético estacionario 155
III. Conclusión 161
§ 27. Campo electromagnético cuasiestacionario y circuito de corriente alterna 162

Capítulo 3

Ondas electromagnéticas

I. Fundamentos generales de electrodinámica 166
§ 28. Ecuaciones principales de electrodinámica 166
§ 29. Permitividad y permeabilidad magnética complejas y ecuaciones de electrodinámica en forma compleja 170
§ 30. Balance de energía para oscilaciones armónicas 176
§ 31. Sobre la unicidad de soluciones de los problemas de electrodinámica 180
II. Ondas planas homogéneas 182
§ 32. Proceso electromagnético unidimensional. Ondas en medios no absorbentes 183
§ 33. Ondas en medios absorbentes 187
§ 34. Orientación, polarización y adición de ondas 192
§ 35. Propagación de señales electromagnéticas 198
III. Ondas para la superficie de separación plana de los medios 203
§ 36. Incidencia normal 204
§ 37. Incidencia oblicua. Leyes de Snell 212
§ 38. Fórmulas de Fresnel y estructura del campo 218
§ 39. Reflexión y paso totales para incidencia oblicua 223
§ 40. Efecto pelicular y absorción en conductores 236
IV. Ondas de radio en condiciones naturales 244
§ 41. Datos elementales sobre las líneas de radiocomunicación 245
§ 42. Bandas de las ondas de radiocomunicación 251

Capítulo 4

Radiación, difracción y refracción

I. Radiación 258
§ 43. Problema principal sobre la radiación 260
§ 44. Radiador eléctrico elemental y oscilador lineal 265
§ 45. Radiador magnético elemental 276
§ 46. Corrientes magnéticas. Problema generalizado de la radiación 281
§ 47. Manantiales superficiales equivalentes. Principio de Huygens 286
§ 48. Principio de reciprocidad 293
§ 49. Sistemas de radiadores 297
II. Difracción 306

§ 50. Fenómenos y problemas de difracción. Casos límites 307
§ 51. Difracción en un cilindro: ejemplo de la solución rigurosa del problema 317
§ 52. Difracción en una esfera 325
§ 53. Método de Huygens-Kirchhoff. Difracción de Fraunhofer en un orificio 329
§ 54. Difracción de Fresnel 336
§ 55. Pantallas y el principio de dualidad; rendijas estrechas 334
III. Refracción 349
§ 56. Ondas localmente planas en medios no homogéneos 350
§ 57. Rayos en medios no homogéneos 357
IV. Ondas de radio terrestres y troposféricas 362
§ 58. Factores físicos y aproximaciones de teoría 362
§ 59. Ondas de radio terrestres 372
§ 60. Influencia de la troposfera 383

Capítulo 5

Ondas guiadas y campos en volúmenes limitados

I. Teoría general de ondas guiadas 389
§ 61. Estructura de los campos y tipos de ondas planas no homogéneas 390
§ 62. Particularidades principales de las ondas guiadas 394
§ 63. Transmisión de energía y ondas al haber absorción 404
II. Ondas libres en sistemas de guiado 412
§ 64. Guía de ondas rectangular 412
§ 65. Guía de ondas circular 423
§ 66. Diferentes sistemas con dieléctrico homogéneo 434
§ 67. Sistemas con medio no homogéneo 444
§ 68. Acción de un conductor real 457
III. Oscilaciones libres de resonadores de cavidad 463
§ 69. Propiedades generales de los resonadores de cavidad 463
§ 70. Resonadores de cavidad más importantes 473
IV. Campos forzados. Sistemas irregulares 486
§ 71. Oscilaciones forzadas de un resonador 487
§ 72. Ondas forzadas de una guía de ondas 498
§ 73. Sistemas de guías de ondas 506
§ 74. Propiedades de los transformadores de guía de ondas 518
§ 75. Teoría de perturbaciones 525
§ 76. Algoritmos generales para sistemas irregulares 531
V. Sistemas periódicos y cuasiópticos 540
§ 77. Sistemas periódicos y superficies de impedancia 540
§ 78. Sistemas cuasiópticos 549

Capítulo 6

Singularidades de los campos en diversos medios

I. Campos y partículas cargadas 558
§ 79. Partículas en campos estacionarios 558
§ 80. Partículas en campos alternativos y modelos de medios 566
§ 81. Ondas de radio en la ionosfera 574

II. Medios anisótropos 578
§ 82. Naturaleza y manifestaciones de la anisotropía 579
§ 83. Campos y ondas en medios girótropos 587
§ 84. Girotropía en radiotecnia 597
III. Medios activos 607
§ 85. Campos y ondas en medios activos 608
IV. Medios no lineales 613
§ 86. Naturaleza y manifestaciones de no linealidad 614
§ 87. Procesos ondulatorios en medios no lineales 622
V. Líneas de radiocomunicación 629
§ 88. Líneas de radiocomunicación de diferentes bandas 629

Suplementos

Suplemento 1. Vectores 636
Suplemento 2. Función delta de Dirac 639
Suplemento 3. Método de las amplitudes complejas 643
Suplemento 4. Rotación del sistema cartesiano de coordenadas 642
Suplemento 5. Sobre las ecuaciones de la física matemática 644
Suplemento 6. Funciones especiales 648
Suplemento 7. Método de separación de las variables 652
Suplemento 8. Series de Fourier y sistemas ortogonales 658
Suplemento 9. Datos sobre las matrices 662
Bibliografía 664
Indice alfabético 666

Prólogo

El presente manual es el curso de la teoría de electromagnetismo para las especialidades de radiotecnia de los centros de enseñanza superior. El autor, aunque partiendo del contenido del correspondiente programa para la especialidad 0701 en su variación última, se ha permitido no seguirlo al pie de la letra. Como sabemos, durante los últimos años dicho programa ha cambiado considerablemente: en él se incluyeron las cuestiones relacionadas con la propagación de ondas de radio en condiciones naturales, lo que anteriormente componía el contenido de una asignatura especial. ¿Cómo distribuirlas del mejor modo en la asignatura creada de nuevo?

La opinión del autor consiste en que la simple unión (en forma de dos partes independientes) de dos asignaturas diferentes, una de las cuales da al estudiante amplia base teórica y la segunda, es puramente especial y en alto grado empírica, es el método más sencillo pero no el mejor. El más correcto es conservar la integridad de la asignatura, basada en subordinar lo particular a lo general. La ampliación de las tareas del curso, significa, en esencia, la concentración de la atención en los procesos electromagnéticos que transcurren en diferentes medios; pero sin olvidar que no sólo son importantes los medios naturales, sino muchos otros (girotropía en la técnica de frecuencia ultraelevada, radiotecnia cuántica, óptica no lineal, etc.).

Por esta razón, el autor, tendiendo a satisfacer las nuevas exigencias, no pudo simplemente limitarse a modificar su manual sobre la teoría del electromagnetismo publicado anteriormente [C.3] (véase la bibliografía al final del presente libro). El presente libro ha sido escrito de nuevo. Y se difiere del anterior no sólo por su estructura y contenido, sino que también metodológicamente; por ejemplo, en particular, se demuestran las ventajas al no emplear los potenciales vectoriales en la teoría de radiación. Sin embargo, en la composición general, el autor sigue aplicando el principio deductivo: "de las ecuaciones de Maxwell a las cuestiones especiales"; la experiencia del autor en la aplicación de este método en la literatura de estudio [C.3], sin duda alguna, se ha justificado.

Estudiando la teoría del electromagnetismo el contenido de los más importantes conceptos se revela gradualmente. Con objeto de ayudar al lector a establecer relaciones y asimilar la esencia de la asignatura, múltiples problemas se consideran en nuestro manual desde diferentes puntos de vista. En este sentido, y también por su contenido temático, el libro es más amplio que el curso corriente de lecciones. Dicho curso puede confeccionarse a base del presente manual, dando preferencia a diferentes aspectos y temas. Por esto, el autor espera que este libro sea útil con las diversas tradiciones existentes en diferentes centros de enseñanza superior. En lo que se refiere a los problemas de propagación de ondas de radio (hertzianas o radioeléctricas) en la naturaleza, dicho material se introduce a medida que se forman las representaciones teóricas necesarias. Lógicamente, no se excluye la separación del material indicado anteriormente en las lecciones; en tal caso, los párrafos respectivos del presente libro, tomados en el orden anterior en diferentes capítulos, pueden ser empleados en conjunto.

El manual está dotado con suplementos de contenido matemático (nueve suplementos al final del libro). En ellos, junto con datos de carácter informativo, en forma breve se exponen ciertos problemas especiales. El aparato matemático del electromagnetismo se expone más detalladamente en el libro del autor, editado recientemente [J.5].

Diciembre, 1972

V. Nikolski

Introducción

Aunque en la naturaleza las manifestaciones del electromagnetismo siempre se observaron por el hombre, los conceptos científicos en esta rama aparecen sólo cerca de doscientos años atrás; para hacer comparación, recordemos que ciertas nociones de la mecánica se formaron ya en el mundo antiguo. Esto no debe asombrarnos: la experiencia cotidiana del hombre está repleta de fenómenos mecánicos y, en este caso, ha resultado ser útil la intuición creada por múltiples generaciones. Por el contrario, los fenómenos electromagnéticos (tales como la acción del imán o al frotar el ámbar) eran demasiado primitivos para dar comienzo a una técnica que agudizara la atención hacia el electromagnetismo. Pero es curioso otro hecho: el lento desarrollo de la mecánica que alcanza una relativa madurez en la época de Galileo y Newton y muy rápida conclusión de la teoría clásica del electromagnetismo en el período posterior. Sin embargo, aún hoy día, cuando el empleo de procesos electromagnéticos complicadísimos ha adquirido la más extensa aplicación, las nociones básicas del electromagnetismo parecen a los que las estudian excesivamente abstractas: están muy alejadas de nuestra experiencia natural.

Al comienzo del siglo XIX ya había una representación suficientemente clara sobre las cargas macroscópicas, las corrientes y su interacción. Precisamente entonces aparece la electrotecnia que aún decenas de años no tuvo gran significación práctica. Una comprensión mucho más profunda del electromagnetismo fue necesaria para la creación de la radiotecnia, cuya principal función está relacionada con la aplicación directa del *campo electromagnético*, que transporta la energía por el espacio.

¿Qué es un campo electromagnético? En muchos casos, el término "campo" tiene un sentido puramente formal. Se aplica, cuando en cada punto de determinada región del espacio es preciso indicar cierta característica física como función de unas coordenadas; puede ser la densidad de la materia, la temperatura, presión, etc. Así, podemos decir "campo de temperaturas" del aire de la habitación o bien "campo de velocidades" de las partículas del agua en el río y en estos casos, entendiendo que está prefijada la función respectivamente $t(x, y, z)$ o bien $\boldsymbol{v}(x, y, z)$. En este caso, para

cualquier punto del espacio a considerar, por ejemplo, $M(x_0, y_0, z_0)$, podemos registrar en el primer caso $t(x_0, y_0, z_0)$ y en el segundo, $v(x_0, y_0, z_0)$. Semejantemente, al tratar un campo eléctrico se habla formalmente de un "campo de fuerza", teniendo en cuenta la fuerza que actúa sobre una carga (con mayor precición, una carga unitaria positiva) *si ésta* se dispone en el espacio en el que actúa el campo. En todos los anteriores ejemplos, la noción del campo se *utiliza como cierto medio convencional para describir un proceso* físico y que probablemente es extremadamente cómodo, pero que no posee contenido físico independiente. No haciendo uso de tal medio, no debemos, simultáneamente, perder ninguna información física.

Sin embargo, valiéndonos de hechos bien conocidos podemos convencernos fácilmente de que la noción del campo electromagnético, además de su valor formal, tiene también contenido físico del que no podemos negarnos sin alterar, al mismo tiempo, nuestra representación de la naturaleza. Examinemos el siguiente experimento, fácilmente realizable. En el vacío emplazamos dos antenas: transmisora (emisora) y receptora (fig. 1.1). La transmisión de

Fig. 1.1.

energía electromagnética se verifica en el transcurso de un corto intervalo de tiempo τ y el resto del tiempo, el transmisor no funciona. Supongamos que el tiempo Δt, durante el que la energía electromagnética se propaga hasta llegar a la antena receptora es mayor que τ (es posible, incluso, que $\Delta t \gg \tau$). Entonces, podemos con facilidad indicar el momento de tiempo cuando *la energía ya fue emitida* por la antena transmisora, pero *aún no llegó* a la receptora. ¿Cuál es el portador de esta energía en el vacío, en donde falta el medio material habitual? Encontramos la respuesta en que el portador de la energía es el campo electromagnético que, por consiguiente, resulta ser físicamente real. En sentido filosófico hay que considerar el campo electromagnético en calidad de una de las formas de existencia de la materia.

La base de la teoría moderna del electromagnetismo es la noción del campo electromagnético. Vamos a estudiar cómo apareció históricamente. En los años 1784—1789 fueron publicadas las obras de Carlos Agustín de Coulomb sobre las interacciones eléctricas y magnéticas. La conocida ley de Coulomb respecto a la interacción de las cargas eléctricas que hoy día se estudia en la escuela media, es extremadamente parecida a la ley de la gravitación

universal. Nos es fácil comprender la impresión que produjo tal hecho en los contemporáneos del descubrimiento, cuando la rama más conocida de la física era la mecánica de Newton. Las diversas leyes de las interacciones electromagnéticas descubiertas posteriormente (por ejemplo, la ley de Ampère sobre las corrientes eléctricas), a pesar de sus particularidades, eran cercanas ideológicamente *a la ley de Coulomb: los investigadores suponían que la acción* de un objeto sobre otro se produce instantáneamente sin participación alguna del medio auxiliar. Este factor que llamamos "principio de acción a distancia", se introdujo a las ciencias junto con la mecánica de Newton [1]).

De acuerdo con los criterios físicos modernos, no existen interacciones instantáneas; el papel del medio auxiliar no puede ser ignorado ya que precisamente éste contiene la energía. La participación del medio (en particular, el vacío) en la transmisión de interacciones electromagnéticas se expresa en el "principio de acción próxima". En consecuencia de esto, la interacción debe sólo verificarse por conducto del medio que es el "recipiente" del proceso electromagnético. Este principio está relacionado con el nombre de *Miguel Faraday (1791—1867) que fue el primero* que expresó (si se juzga partiendo de posiciones modernas) la idea de la realidad del campo electromagnético que aún largo tiempo no fue reconocida. *Aleguemos una cita* [2]): "*Faraday con su mirada mental* veía líneas de fuerza que pasan por todo el espacio allí donde los matemáticos veían centros de fuerzas que se atraen a distancia. Faraday veía un medio (materia) allí donde ellos no veían nada más que una distancia. Faraday buscaba la fuente de los fenómenos en procesos reales que transcurren en el medio. Los matemáticos se sintieron satisfechos al encontrar dicha fuente en una fuerza que acciona a distancia aplicada a fluidos eléctricos". Estas palabras son de James Clerk Maxwell (1831—1879) a quien le estaba destinado hacer una extraordinaria aportación a la teoría del electromagnetismo. En las ciencias modernas, las *ecuaciones de Maxwell* son las leyes fundamentales de esta teoría. Seguidamente, examinaremos detalladamente dichas ecuaciones, ya que ellas forman *la base de todo el material de este libro. Por el momento*, señalemos que la importancia de las ideas de Maxwell fue apareciendo gradualmente, a medida que se acumulaba experiencia y desarrollaba la técnica. Su deducción sobre la existencia de ondas electromagnéticas (como resultado de la conclusión matemática del principio de acción próxima) y la hipótesis sobre la naturaleza electromagnética de la luz fueron acogidas fríamente por sus contemporáneos; en realidad estas ideas adelantaban las posibilidades

[1]) El propio Newton (que afirmaba: "yo no invento hipótesis") no expresaba *el principio de acción a distancia; tal interpretación de la ley de gra*vitación pertenece a sus continuadores.

[2]) De la introducción al libro de *J. Maxwell*, A treatise on electricity and magnetism (se cita según [H.1]).

experimentales de la época. La excitación de ondas electromagnéticas en un laboratorio y su investigación experimental se efectuó más tarde por Enrique Hertz (1857—1894) que también hizo una gran aportación a la teoría del electromagnetismo. Hertz previó mucho de aquello que hoy día compone la electrodinámica de radiotecnia. En particular, en sus experimentos empleó espejos parabólicos en los que podemos ver el prototipo de las antenas de reflector. Sin embargo, Hertz nunca planteó el problema de la aplicación técnica de las ondas electromagnéticas. El merecimiento histórico de la invención de la comunicación inalámbrica, es decir, la radio, pertenece a nuestro compatriota A. S. Popov (1859—1906). También marquemos que para la confirmación de la naturaleza electromagnética de la luz fueron determinantes los experimentos de otro científico ruso P. N. Lébedev (1866—1911) que midió la presión de la luz.

Sin temor a exagerar, podemos afirmar que la radiotecnia, apoyándose en las ecuaciones de Maxwell, ha servido de amplia base experimental del electomagnetismo y, además, ha sido estimulante de su posterior desarrollo. Junto con la radiotecnia apareció la noción de *ondas de radio*, o sea, ondas electromagnéticas en los sistemas radiotécnicos. Se convirtió en importante tendencia científica, el estudio de la propagación de las ondas de radio en condiciones naturales (sobre la Tierra). El problema de la emisión y recepción de la energía electromagnética transportada por ondas de radio, provocó la creación de la teoría de las antenas, en la actualidad muy perfecta.

Durante los primeros experimentos, la longitud de las ondas se media por metros. Al principio de nuestro siglo la comunicación por radio había alcanzado considerable envergadura; además, predominaban las ondas largas (kilométricas). Pero a partir de los años vigésimos comienzan a asimilarse en radiotecnia ondas más cortas. La invención de la radiolocalización durante los años de la segunda guerra mundial, aportó a este proceso un potente impulso y en la radiotecnia comenzó la aplicación de ondas decimétricas, centimétricas y milimétricas que hoy día encuentran extensa utilización en diferentes ramas. El empleo de tan cortas ondas engendró profundos cambios tanto en la propia radiotecnia como en su base teórica. La cuestión era que, anteriormente, el tamaño de los elementos de los aparatos de radio era mucho más pequeño que la longitud de onda. Por esta razón, los conceptos principales de la electrotecnia y su teoría de circuitos eran aptos como medios de cálculo, mientras que los aparatos radiotécnicos en mucho se parecían a los electrotécnicos. Sin embargo, esta situación cambió radicalmente cuando fue necesario crear elementos radiotécnicos de tamaño comparable a la longitud de onda.

El hecho anteriormente indicado necesita explicación. Supongamos que la energía electromagnética se propaga a lo largo de un conductor que deseamos considerar como el sector de un cir-

cuito y que en dos de sus secciones distanciadas la una de la otra a una distancia L, pasan respectivamente unas corrientes $I_1(t)$ e $I_2(t)$. Según la teoría de circuitos se considera que estas corrientes son idénticas, es decir, $I_1(t) = I_2(t)$. Pero, ¿es justa esta igualdad? Sea $I_1(t) = I_m \cos \omega t$. ¿Cuál será, en este caso, la fase de la corriente I_2 en la sección alejada? Ya que para propagar el proceso electromagnético a la distancia L es necesario un intervalo de tiempo $\Delta t = L/v$, siendo v la velocidad, entonces la corriente I_2 tendrá la fase ωt sólo al transcurrir el tiempo Δt, mientras que en el momento t, su fase será $\omega(t - \Delta t)$. O sea, que las corrientes $I_1(t)$ e $I_2(t)$ no son iguales ya que tienen una diferencia por fase $\Delta\varphi = \omega \Delta t$; puede resultar, por ejemplo, que $I_2 = 0$, para $I_1 = I_m$. Teniendo en cuenta la relación existente entre la velocidad, longitud de onda y frecuencia ($v = f\lambda$, $\omega = 2\pi f$), tenemos: $\Delta\varphi = 2\pi L/\lambda$. De ese modo, el retardo de fase es despreciablemente pequeño cuando

$$L \ll \lambda. \qquad (1.1)$$

El principio de la constancia de la corriente instantánea en todas las secciones del conductor se puede, por consiguiente, considerar satisfecho sólo si la desigualdad escrita anteriormente se observa en grado suficiente elevado, en el que L debe comprenderse como la dimensión máxima del objeto. La desigualdad (1.1) es conocida por la denominación de *condición cuasiestacionaria*. De acuerdo con dicha condición distinguimos objetos cuasiestacionarios o bien no cuasiestacionarios. De lo estudiado se desprende que la teoría de circuitos de corriente alterna es válida sólo para objetos cuasiestacionarios. A continuación, el lector se convencerá de que a medida que se debiliten las condiciones cuasiestacionarias una mayor parte de la energía de un "circuito corriente" se irradia al espacio. En tal caso, los dispositivos de antenas no pueden ser examinados desde el punto de vista de la teoría de circuitos. Con gran frecuencia, las antenas son en alto grado no cuasiestacionarias. De este mismo tipo son los elementos de los aparatos que se emplean para ondas decimétricas, centimétricas y milimétricas. No sólo los métodos de análisis, sino los propios principios de confección de dispositivos radiotécnicos son ahora extremadamente diferentes de los modelos electrotécnicos antiguos. Es, por ejemplo, remarcable la extensa aplicación de los llamados *sistemas huecos*, guías de ondas, para transmitir energía, diferentes resonadores huecos en calidad de "circuitos oscilantes", así como otros elementos semejantes. Para efectuar la descripción de estos y otros objetos no cuasiestacionarios nos es necesaria la teoría general del electromagnetismo; también debe ser estudiado su campo electromagnético.

Nuestro manual está destinado al estudio de la teoría del electromagnetismo por los estudiantes de especialidades relacionadas con la radiotecnia. Por dicha razón, su principal objetivo son las ondas de radio. En resumidas cuentas, en la actualidad ondas

de radio pueden ser ondas electromagnéticas de longitud desde decenas de kilómetros (ultralargas) y hasta de miles de angström (ópticas). Las condiciones de su propagación sobre la Tierra en tan enorme banda (campo) son muy diversas, pero sin embargo, localmente, según su estructura, pueden ser muy cercanas a la onda plana más sencilla que se propaga en un espacio infinito. Estructuralmente, son mucho más complicadas las ondas de radio en guíaondas o en otros sistemas de guiado. En medios anisótropos las ondas se propagan de forma diferente en función de su sentido y orientación; en medios activos puede producirse la amplificación y generación de ondas. Las particularidades de diversos medios que se emplean en radiotecnia son muy variadas.

Para similar las propiedades de las ondas de radio en condiciones naturales y en los aparatos de radio, hay que estudiar diversos procesos electromagnéticos y ondulatorios, desde los relativamente sencillos como, por ejemplo, la reflexión, refracción y creación de ondas estacionarias y hasta procesos mucho más complicados, como la difracción y emisión. En este caso, se emplean los métodos de la física matemática.

Anteriormente, ya hemos señalado el papel de las ecuaciones de Maxwell en la teoría del electromagnetismo. La exposición del material empieza por ellas.

Capítulo 1

Leyes del electromagnetismo

1. Nociones y ecuaciones principales del electromagnetismo

Como parte de la física, la teoría del electromagnetismo abarca un círculo determinado de fenómenos, llamados *fenómenos electromagnéticos*. Al estudiar una teoría física expresada en forma matemática es lógicamente necesario tener previos conocimientos sobre los propios fenómenos. Al comenzar esta asignatura, el estudiante ya adquirió dichos conocimientos en los cursos de física general y electrotecnia. Por esta razón, particularmente, se va a suponer que el lector tiene un suficiente volumen de conocimientos que lo llevan a comprender el concepto de *carga eléctrica*. Este concepto físico fundamental en adelante no está sujeto a determinación formal.

Hoy día, el electromagnetismo ha adquirido gran importancia para la formación del criterio sobre la estructura de la materia. Partiendo de conocidos conceptos, la materia está formada por partículas elementales. Sin embargo, hay que tener en cuenta que las palabras "partícula elemental" sólo es un término, mientras que la representación evidente de una partícula (pequeño cuerpo, corpúsculo) es extremadamente superficial. A pesar de esto, en los casos más sencillos tal concepto nos es útil y, por ejemplo, el electrón, portador de una carga negativa elemental u otra cualquier partícula elemental se estudia como cuerpo que puede ser observado directamente y que posee trayectoria de movimiento. La teoría sobre la estructura de la materia es, como sabemos, de competencia de la física cuántica. Los problemas del electromagnetismo directamente relacionados o que hacen contacto con la física cuántica, forman la electrodinámica *microscópica*.

La teoría del electromagnetismo, cuya exposición comienza en este capítulo, es *macroscópica*. Sus objetos materiales son tales que en ellos transcurre la acción de enormes, "prácticamente infinitas", cantidades de partículas elementales. En estos casos, la estructura de la materia no se tiene en cuenta y se considera que el medio es continuo. Por ejemplo, de esta forma, dejando a un lado la estructura de la materia, trataremos la distribución ininterrumpida de la carga en cierto volumen. Al determinar su densidad en el punto dado, es decir, cuando la carga está reducida a la unidad de volumen, es preciso que este último tienda a cero. Sin embargo, no debemos olvidar que en realidad tiene sentido sólo un elemento "infinitamente pequeño" de volumen: suficientemente pequeño para la transición límite a considerar, pero, simultáneamente, tan grande que aún no da lugar a que se manifieste la discontinuidad de la materia.

§ 1. Fenómenos del electromagnetismo y campo electromagnético

1. Vectores del campo electromagnético. ¿Qué compone la base general de los fenómenos del electromagnetismo? En nuestra Introducción se dio una idea inicial sobre el *campo electromagnético* que consistía en que éste es el portador de energía electromagnética, forma especial de la materia. El campo electromagnético sólo en ciertos casos particulares actúa evidentemente en los órganos sensitivos del hombre (uno de los posibles ejemplos es la luz visible). Sin embargo, pueden ser observadas diversas transformaciones de la energía del campo. Ellas forman la base de los fenómenos electromagnéticos en los que se adquiere la información sobre el campo.

El campo electromagnético puede ser caracterizado (descrito) por medio de varias funciones vectoriales de coordenadas tridimensionales y el tiempo. Comencemos por las funciones $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(x, y, z, t)$ que, respectivamente, llamaremos *intensidad del campo eléctrico* e *inducción magnética*.

Los fenómenos electromagnéticos más sencillos que nos aproximan a la representación directa de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ del campo, están relacionados con el hecho de que en el campo electromagnético sobre la carga actúa cierta *fuerza*. Cualquiera de los fenómenos electromagnéticos transcurre cuando dicha fuerza verifica trabajo, es decir, consume cierta cantidad de energía del campo. "Observar" un fenómeno electromagnético, quiere decir percibir (apreciar) o bien medir el trabajo realizado. Es evidente, si hay que juzgar sobre un campo, cuando en éste no hay carga, el indicado consumo de energía debe ser considerado despreciablemente pequeño.

Sea q la magnitud de una carga puntual (expresada en *culombios* [C]); al decir "carga puntual" tenemos en cuenta un cuerpo cargado, de dimensiones extremadamente pequeñas en comparación

con la distancia desde la que se observa. Además, en el caso dado tiene gran importancia que dicho cuerpo sea pequeño respecto a la región del espacio dentro de la que se advierten variaciones del campo. Está claro, que podemos llamar carga puntual ideal aquella que se concentra en un volumen decrecientemente pequeño ("nulo"); sin duda alguna, esto es cierta abstracción. En el campo electromagnético sobre la carga puntual actuará una fuerza

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}]), \tag{1.1}$$

siendo $\boldsymbol{v}$ la velocidad de movimiento de la carga.

Si la carga está inmóvil ($\boldsymbol{v} = 0$), la fuerza sólo depende de la intensidad del campo eléctrico:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}. \tag{1.2}$$

Por consiguiente, disponiedo de cierta realización de una carga puntual, así como de algún medio de medición de la fuerza que en ella actúa, podemos determinar la intensidad del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en el punto prefijado del espacio $M(x, y, z)$ y en cierto intervalo de tiempo t. Sin detallar cómo se realizan tales mediciones, indiquemos, sin embargo, dos circunstancias: primero, las mediciones deben tener suficientemente pequeña inercia, es decir, efectuarse con una rapidez considerablemente mayor que la velocidad de las variaciones del campo, y segundo, la magnitud de la carga debe ser tan pequeña que la inevitable extracción de energía casi no produzca la transformación del campo a investigar. La igualdad (1.2) se considera, generalmente, como la definición de la función vectorial $\boldsymbol{E}$. Para medir la intensidad $\boldsymbol{E}$ del campo eléctrico (con mayor exactitud, el valor absoluto E del vector $\boldsymbol{E}$) se toma un *voltio por metro* [V/m].

Además, como se deduce de la (1.1), sobre una carga puntual en movimiento actúa la fuerza

$$\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}], \tag{1.3}$$

llamada *fuerza de Lorentz*. Con la aparición de esta fuerza se puede relacionar la definición del vector $\boldsymbol{B}$ de la inducción magnética; B se mide en *weber (weberio)* por *metro cuadrado* [Wb/m^2].

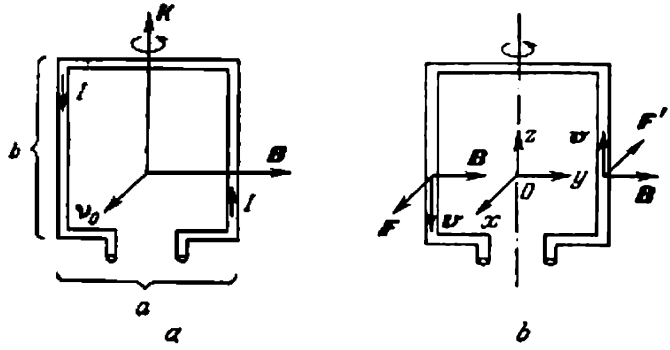
Consideremos una espira extremadamente pequeña con corriente (contorno de corriente). Bajo el efecto de la fuerza de Lorentz en este contorno actúa un *momento de fuerza* $\boldsymbol{K}$ (véase la fig. 1.1, *a* en la que la espira tiene la forma de un cuadro rectangular):

$$\boldsymbol{K} = IS[\mathbf{v}_0, \boldsymbol{B}]. \tag{1.4}$$

En esta fórmula S es el área del contorno; I, la magnitud de la corriente y $\mathbf{v}_0$, el vector unitario de la normal al plano del contorno; en este caso el sentido de la corriente y la normal forman un sistema dextrógiro. Indiquemos que la pequeñez del contorno nos es necesaria ya que la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ debe ser prácti-

camente idéntica en cualquiera de los puntos de la superficie S que el contorno limita.

Podemos fácilmente convencernos de que la acción del campo sobre el contorno de corriente que se describe mediante la fórmula (1.4) está condicionada por la fuerza de Lorentz. Si examinamos



a *b*

Fig. 1.1.

la fig. 1.1, *b* podemos advertir que, de acuerdo con la fórmula (1.3), en los lados laterales del contorno deben actuar, respectivamente, las fuerzas $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{F}'$ que crean un momento de fuerza dirigido a lo largo del eje vertical (z en la fig. 1.1, *b*); dicho momento es

$$\boldsymbol{K} = [-y_0 a,\ \boldsymbol{F}] = \boldsymbol{z}_0 aF,$$

pero de acuerdo con (1.3), $\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}]$, siendo $\boldsymbol{v}$ la velocidad de las cargas en la parte izquierda del contorno y q, la carga completa en movimiento (convencionalmente positiva) que se encuentra en ella; podemos considerar que las cargas positivas en el contorno están equilibradas por las negativas, de forma que la fuerza $q\boldsymbol{E}$ no actúa en la espira. Designando por t el tiempo durante el que la carga pasa por la parte lateral del contorno (distancia b), tendremos que

$$q\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{z}_0 b \frac{q}{t} = -\boldsymbol{z}_0 bI.$$

Teniendo en cuenta este resultado, colocamos la expresión de la fuerza en la fórmula anterior del momento de fuerza y obtenemos

$$\boldsymbol{K} = Iab[\boldsymbol{y}_0,\ [\boldsymbol{z}_0,\ \boldsymbol{B}]] = \boldsymbol{z}_0 IabB.$$

Como $ab = S$ y $\boldsymbol{z}_0 B = [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{B}]$, esto coincide con (1.4).

Las funciones vectoriales $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ definen totalmente el campo electromagnético en el vacío. Pero cuando se trata de un medio arbitrario, estas dos funciones son insuficientes, es decir, en general necesitamos cuatro vectores del campo. Para completar $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ introducimos las funciones $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(x, y, z, t)$ y $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(x, y, z, t)$ denominándolas *intensidad del campo magnético* e *inducción eléctrica*. H se mide en *amperios por metro* [A/m] y D, en *culombios por metro cuadrado* [C/m^2].

Para un campo en el vacío

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}, \tag{1.5}$$

siendo ε_0 y μ_0 coeficientes constantes, cuya elección se determina por el sistema de medición escogido. Respectivamente, se denominan *constante eléctrica* y *constante magnética*.

Además,

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ } \textit{faradio por metro} \text{ [F/m]}$$

y

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1{,}257 \cdot 10^{-6} \text{ } \textit{henrio por metro} \text{ [H/m]}.$$

Decimos que el campo electromagnético es el conjunto de un campo eléctrico (vectores $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$) y un campo magnético (vectores $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$). El contenido físico de las funciones $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{D}$ se determina por las ecuaciones principales del electromagnetismo a cuyo estudio pasaremos a continuación.

Marquemos que todos los datos sobre las unidades de medida (en nuestro manual se emplea el sistema internacional práctico de unidades SI) se dan, hasta el momento, sólo como información. Su sentido, así como su relación con unidades más divulgadas (tales como voltios, amperios, culombios, etc.), serán examinados en las correspondientes circunstancias.

2. Sobre la investigación y descripción del campo electromagnético. Las manifestaciones mecánicas del campo electromagnético en las que nos hemos basado al determinar los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ pueden, de principio, servirnos de fuente de información sobre el campo, por ejemplo, en un medio aéreo. En otras palabras, un cuerpo cargado y un cuadro con corriente (que sean suficientemente pequeños) pueden emplearse para la investigación experimental del campo electromagnético. Ubicando estos "elementos experimentales" en diversos puntos de la región prefijada del espacio en determinados momentos de tiempo, observando una serie de precauciones, se pueden obtener datos sobre el campo. En realidad, las posibilidades de dicho método son extremadamente limitadas, pero para investigar los campos la técnica experimental moderna posee medios más eficaces que son aptos para diferentes casos concretos. En general, la información sobre la estructura de los campos obtenidos mediante elementos experimentales, abarca sólo una pequeña parte del enorme volumen de datos experimentales sobre el campo electromagnético que hoy son conocidos por la ciencia.

La teoría del campo electromagnético se ha formado como resultado de la acumulación y generalización de hechos experimentales. Y se basa en la *descripción analítica:* a las funciones vectoriales de las coordenadas y el tiempo $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{D}$ se aplican los métodos del análisis vectorial; las leyes fundamentales del electromagnetismo se enuncian en forma de ecuaciones con derivadas

parciales. Por esta razón, la solución de los problemas relacionados con el campo electromagnético se reduce al empleo de métodos puramente matemáticos. La investigación de las soluciones matemáticas lleva a la comprensión de complejos procesos físicos e, incluso, al descubrimiento de leyes y fenómenos antes desconocidos.

En la teoría del electromagnetismo también se utiliza extensamente la *descripción gráfica* del campo electromagnético, lo que favorece a la comprensión de complicados procesos gracias a su evidencia. Las funciones vectoriales del campo se representan como el cuadro de las líneas de fuerza. Por lo general, las del vector $\boldsymbol{E}$ se denominan líneas de fuerza *eléctricas* y las del vector $\boldsymbol{B}$, *magnéticas*. En calidad de ejemplo, en la fig. 1.2 están representados

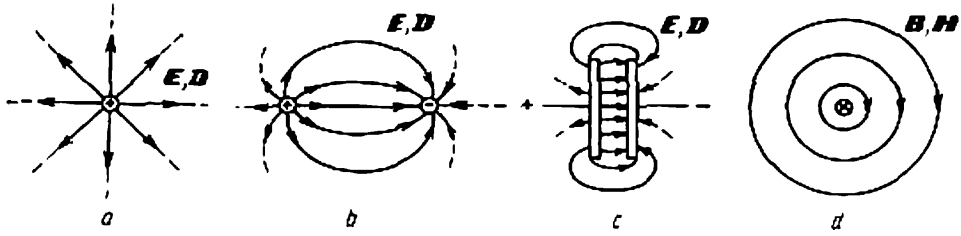


Fig. 1.2.

varios cuadros de las líneas de fuerza que el lector bien conoce por el curso de física. Estas son las líneas de fuerza de los siguientes campos en medio homogéneo: eléctrico, de una carga positiva unitaria puntual (*a*), de dos cargas cuyos signos son opuestos (*b*), de un condensador plano (*c*); magnético de un conductor con corriente (*d*).

Como conclusión del párrafo, introduciremos dos nociones que se emplean junto con $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$ en las enunciaciones generales de las leyes del electromagnetismo. Estas son la *densidad de la carga* ρ y la *densidad de la corriente* $\boldsymbol{j}$.

La densidad de la carga se define como la relación límite

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \tag{1.6}$$

siendo Δq la carga que se encuentra en un volumen elemental ΔV. De esta misma forma, la densidad de la corriente se expresa de la manera siguiente:

$$\boldsymbol{j} = \lim_{\Delta S \to 0} \boldsymbol{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta S}, \tag{1.7}$$

cuando ΔI es la corriente que interseca el área ΔS en dirección a la normal, mientras que $\boldsymbol{i}_0$ es un vector unitario dirigido a lo largo del movimiento de las cargas en cierto punto de ΔS. La densidad de la carga se mide en *culombios por metro cúbico* [C/m³], la densidad de la corriente, en *amperios por metro cuadrado* [A/m²].

Sobre el contenido físico de la transición límite en correlaciones de tal tipo, ya se habló antes del comienzo de este párrafo. Es evidente, que si se tiene en cuenta un medio continuo idealizado, las densidades ρ y $\boldsymbol{j}$ juegan el papel de derivadas. En esencia, para medios reales los símbolos $\Delta V \to 0$ y $\Delta S \to 0$ conservan sólo un valor convencional: el elemento de volumen (de área) disminuye pero hasta un grado tal con el que no se manifiesta la discontinuidad de la materia, o sea, las leyes macroscópicas quedan en vigor.

§ 2. Ecuaciones principales de Maxwell

1. Enunciación inicial. Ahora ya podemos comenzar el estudio de las leyes fundamentales del electromagnetismo que se enuncian en forma de *ecuaciones de Maxwell*. Las dos ecuaciones principales de Maxwell, son:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{2.1}$$

y

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Como podemos apreciar, éstas son ecuaciones diferenciales con derivadas parciales respecto a las funciones vectoriales de coordenadas y tiempo $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$, así como $\boldsymbol{j}$. Cada una de estas dos ecuaciones vectoriales es el breve apunte de tres ecuaciones escalares que obtenemos inmediatamente después de escoger un sistema determinado de coordenadas y si los vectores representados en (2.1) y (2.2) están proyectados en los respectivos versores y en un punto arbitrario M del espacio. En tal caso, obtenemos, como suele decirse, "las ecuaciones de Maxwell en forma coordenada". Se considera que las más sencillas y divulgadas son las coordenadas cartesianas. Si, además, hacemos uso de las fórmulas (S1. 20), obtenemos que

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\partial D_x}{\partial t} + j_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{\partial D_y}{\partial t} + j_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{\partial D_z}{\partial t} + j_z, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned}\right\}$$

Para que el lector pueda ejercitarse, le recomendamos escribir también las ecuaciones de Maxwell (2.1) y (2.2) en coordenadas cilíndricas y esféricas, utilizando para esto las fórmulas dadas en los suplementos.

Claramente se ve, que el número de incógnitas en (2.1) y (2.2) es mayor que el número de ecuaciones y, por consiguiente, son

necesarias otras relaciones entre las funciones entrantes; a su estudio pasaremos poco tiempo después.

Bien sabemos, que las ecuaciones con derivadas parciales no tienen propiamente solución determinada hasta que a ellas no se añaden ciertas condiciones auxiliares (en particular, condiciones límites (de frontera)). En el caso que tratamos esto es natural: precisamente gracias a esta indeterminación, las ecuaciones de Maxwell pueden expresar los principios generales del electromagnetismo.

Sería muy interesante examinar cómo precisamente el desarrollo de los criterios físicos llevó, al fin y al cabo, a la deducción de las ecuaciones de Maxwell, pero ésta es una difícil tarea que ocuparía prolongado tiempo[1]; más adelante (§ 4) trataremos esta cuestión parcialmente. Hay que subrayar lo siguiente. La importancia de las ecuaciones de Maxwell, es decir, de (2.1) y (2.2) y algunas otras (que estudiaremos seguidamente), consiste en que de una forma compacta contienen *todos los fundamentos* de la teoría del electromagnetismo. Esta se deduce de las ecuaciones de Maxwell de forma puramente deductiva, o sea, que se obtiene como un sistema de corolarios. De este modo, las ecuaciones de Maxwell pueden considerarse como los postulados principales de la teoría del electromagnetismo y, por lo tanto, no hace falta demostrarlas. Su validez se encuentra en el gran conjunto de datos experimentales sobre el electromagnetismo de que dispone la física contemporánea.

El hecho de que admitimos las ecuaciones fundamentales de la teoría sin efectuar su detallado análisis, no debe engendrar sospechas. Por ejemplo, de forma parecida se introducen en la mecánica clásica las leyes de Newton. Resulta ser más evidente y corta la exposición de la teoría del electromagnetismo comenzando por las ecuaciones de Maxwell que al principio estudiar procesos exclusivos del electromagnetismo y sólo al final, en forma de generalización conclusiva, las ecuaciones de Maxwell. Además, los radioingenieros deben poder operar con las ecuaciones de Maxwell, o sea, emplearlas para resolver sus problemas, pero con este objeto deben "acostumbrarse" a ellas. En lo que se refiere a la esencia física de las ecuaciones de Maxwell, ésta puede ser comprendida sólo estudiando la teoría del electromagnetismo, es decir, después de asimilar todo lo que de ellas se desprende. Esto, de ninguna manera, significa que al principio las ecuaciones de Maxwell deben quedar absolutamente incomprendidas. Al contrario, los rasgos generales de su contenido físico se asimila fácilmente al efectuar su análisis superficial.

2. Segunda ecuación de Maxwell. Tomemos la segunda ecuación de Maxwell (2.2). La derivada situada a la derecha, expresa la velocidad de variación de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ *respecto al tiempo*, mientras que en su parte izquierda, bajo el signo del ope-

[1]) Al lector que interese esta cuestión, recomendamos el libro [H.2].

rador diferencial rot, sólo se disponen las derivadas *de volumen* de las componentes de la intensidad de campo eléctrico $\boldsymbol{E}$. De esta forma, se relacionan mutuamente las variaciones espaciales del campo eléctrico y las variaciones respecto al tiempo del campo magnético. Supongamos que no hay campo eléctrico, o sea, $\boldsymbol{E}=0$ y por esta razón, rot $\boldsymbol{E}=0$. En tal caso, $\partial \boldsymbol{B}/\partial t=0$ lo que significa que al no haber campo eléctrico, el campo magnético sólo puede ser *constante*. Pero toda variación del campo magnético ($\partial \boldsymbol{B}/\partial t \neq 0$) provoca, inevitablemente, la aparición de un campo eléctrico: el primer miembro de la (2.2) no es igual a cero.

Antes de ir más adelante en nuestras conclusiones, remarquemos que la ecuación diferencial (2.2) da sólo una característica *local* del proceso electromagnético: a éste satisfacen las funciones $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en cierto *punto* del espacio $M(x, y, z)$ y en el *momento* de tiempo t. Sin embargo, la ley del electromagnetismo que forma la base de la segunda ecuación de Maxwell (2.2) puede ser expresada en forma integral, si en calidad de objetivo inmediato ya no se tiene un

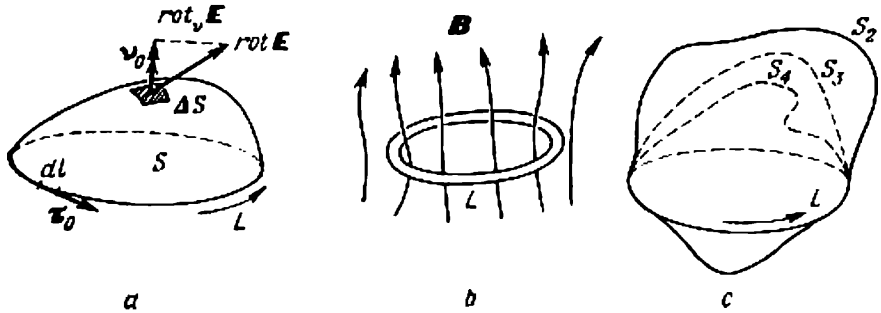


Fig. 2.1.

punto sino una *superficie* arbitraria S (fig. 2.1, *a*) cuyo contorno designaremos por L. Calculando el flujo del vector que pasa por S en los primero y segundo miembros de la ecuación (2.2), tendremos

$$\int_S \text{rot}\, \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\, d\boldsymbol{s}$$

y seguidamente, empleando para el primer miembro el teorema de Stokes (S1.25), se obtiene que

$$\oint_L \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\, d\boldsymbol{s}. \qquad (2.3)$$

Es curioso, que siendo el contorno L fijado, el segundo miembro de la (2.3) no varía al sufrir cualquier cambio la superficie S "tensada en él" (fig. 2.1, *c*).

El operador de diferenciación respecto al tiempo $\partial/\partial t$, situado en el segundo miembro de la (2.3) se puede sacar tras el signo de integración (ya que consideramos el contorno invariable). Y como

la propia integral sólo depende del tiempo, el símbolo de la derivada parcial $\partial/\partial t$ se sustituye, al mismo tiempo, por d/dt. Como resultado obtenemos la ecuación

$$\oint_L \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}, \tag{2.4}$$

conocida como la *segunda ecuación de Maxwell en forma integral*. De acuerdo con la (2.4) la circulación de la intensidad del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ por un contorno arbitrario L es igual a la derivada respecto al tiempo, tomada con signo inverso al flujo de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ que pase por cualquier superficie S, apoyada en dicho contorno.

Señalemos que el flujo del vector $\boldsymbol{B}$ que pasa a través de S se denomina *flujo magnético* y se designa por

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}. \tag{2.5}$$

Este se mide en *wéberes* [Wb] (ahora queda claro por qué $\boldsymbol{B}$ se mide en [Wb/m^2] como se indicó en el § 1). Seguidamente, podemos advertir con facilidad que la circulación del vector $\boldsymbol{E}$ por L, para la que establecemos aquí la designación

$$U = \oint_L \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} \tag{2.6}$$

se mide en *voltios* [V], ya que la unidad de medición de $\boldsymbol{E}$ (véase el § 1) era [V/m]. Volviendo a escribir la segunda ecuación de Maxwell (2.4) en la siguiente forma

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{2.7}$$

advertimos que exteriormente coincide con la *ley de inducción electromagnética de Faraday*.

Esta coincidencia no es casual: en aquellas condiciones en las que puede ser empleada la ley de Faraday, la segunda ecuación de Maxwell (2.4), en realidad, se convierte en ella. Si, por ejemplo, tenemos en calidad de L (fig. 2.1, *b*) un contorno de alambre y calculamos la velocidad de variación del flujo magnético que pasa por cualquier superficie S limitada por dicho contorno, la magnitud que obtenemos, tomada con signo contrario, deberá ser, según la ley de Faraday, igual a la f. e. m. que se induce en el contorno. Dicha f. e. m. es igual a U en la (2.7). Es natural, que al tomar un contorno arbitrario L (imaginariamente diseñado en el espacio), la ley de Faraday no puede ser aplicada aunque no sea más que por el hecho de que una situación tan generalizada sobrepasa considerablemente el círculo de los hechos experimentales que sirvieron de base para su confeccionamiento. La ley del electromagnetismo, expresada por la segunda ecuación de Maxwell, es

mucho más amplia: aquí el objeto tridimensional es absolutamente arbitrario. Y sin embargo, podemos caracterizar esta ley como la *ley generalizada de la inducción electromagnética*.

3. Primera ecuación de Maxwell. Pasemos ahora a estudiar la *primera ecuación de Maxwell* (2.1). Si examinamos por separado las manifestaciones de sus términos en el segundo miembro es más fácil entender su sentido. Cuando el proceso electromagnético queda invariable respecto al tiempo ($\partial/\partial t = 0$), o bien, como decimos, es *estacionario*, la ecuación (2.1) toma el aspecto

$$\text{rot } \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j},$$

siendo $\boldsymbol{j}$, en el caso dado, la densidad de la corriente *continua*. De esta forma, la primera ecuación de Maxwell caracteriza la relación entre el campo magnético y la corriente continua. Es imposible imaginarse la corriente continua sin campo magnético, ya que, obligatoriamente, $\boldsymbol{j} \neq 0$ cuando rot $\boldsymbol{H} \neq 0$ y, por consiguiente, para $\boldsymbol{H} \neq 0$.

Si el campo varía respecto al tiempo ($\partial/\partial t \neq 0$), pero no hay corriente de conducción ($\boldsymbol{j} = 0$), entonces, de acuerdo con la (2.1),

$$\text{rot } \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

Comparando esta ecuación con la anterior, podemos advertir que la función vectorial $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$, que expresa la velocidad de la variación de la inducción eléctrica, juega en el segundo caso el mismo papel que la densidad de la corriente de conducción $\boldsymbol{j}$ en el primero, es decir, la presencia de variaciones de la inducción en función del tiempo $\boldsymbol{D}$ ($\partial \boldsymbol{D}/\partial t \neq 0$) provoca la existencia de un campo magnético ($\boldsymbol{H} \neq 0$). La magnitud $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ se denomina *densidad de la corriente de desplazamiento*.

Como lo hicimos al examinar la segunda ecuación de Maxwell, obtengamos *la primera ecuación de Maxwell en forma integral*. Repitiendo las operaciones ya conocidas, al fin y a la postre, de la (2.1) se halla que

$$\oint_L \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} + \int_S \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{s}. \tag{2.8}$$

La integral

$$I = \int_S \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{s} \tag{2.9}$$

es, formalmente, el flujo del vector $\boldsymbol{j}$ que pasa a través de la superficie S y, por consiguiente, expresa la *corriente de conducción* que interseca dicha superficie. Como la corriente se mide en *amperios* [A], está claro el origen de la unidad de medida [A/m] para $\boldsymbol{H}$ (véase § 1). Análogamente

$$I^{\text{des}} = \frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} \tag{2.10}$$

expresa la *corriente de desplazamiento*. Llamaremos *corriente total* y, respectivamente, *densidad de la corriente total*, las magnitudes

$$j + j^{des} \quad \text{y} \quad j + \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Así, según la primera ecuación de Maxwell en forma integral (2.8), la circulación de la intensidad del campo magnético H por un contorno L arbitrario es igual a la corriente total que pasa por cualquier superficie S que se apoya en dicho contorno.

En la ecuación (2.8) vemos que al no haber campo magnético, la corriente total es igual a cero ($j + j^{des} = 0$). Pero la aparición de la corriente ($j + j^{des} \neq 0$) proporciona, obligatoriamente, un campo magnético: $H \neq 0$, ya que deberá no ser igual a cero el primer miembro de la (2.8). De acuerdo con la (2.8), los papeles de j e j^{des} son absolutamente iguales: el campo magnético puede excitarse tanto por la corriente de conducción como por la de desplazamiento, o sea, variando el flujo de la inducción eléctrica.

La corriente de desplazamiento es una de las características del campo electromagnético *alternativo*. A él nos referiremos más de una vez y, particularmente, en el § 4. Por el momento, estudiemos una de las propiedades de la corriente total que muestra el papel que juega la corriente de desplazamiento en múltiples casos importantes.

4. Propiedad de la corriente total. Empleando la operación div para los miembros primero y segundo de la ecuación (2.1), el primer miembro, en virtud de (S1.32), será igual a cero, en este caso

$$\operatorname{div}\left(j + \frac{\partial D}{\partial t}\right) = 0, \tag{2.11}$$

es decir, la divergencia del vector de la densidad de la corriente total es igual a cero, lo que quiere decir que las líneas de este vector son *continuas*. La densidad de la corriente de conducción no está dotada de esta propiedad y las líneas de este vector pueden interrumpirse, pero entonces, inmediatamente, comienzan las líneas del vector de la densidad de la corriente de desplazamiento.

Tomemos cierta superficie *acotada* S que limita el volumen V. Integrando en la (2.11) por V y aplicando el teorema de Ostrogradski—Gauss (S1.24), obtenemos que

$$\oint_S \left(j + \frac{\partial D}{\partial t}\right) ds = 0, \tag{2.12}$$

o bien

$$I_0 + I_0^{des} = 0, \tag{2.12a}$$

indicando el índice "0" que se trata de corrientes que intersecan la superficie acotada S (la corriente que sale de S es positiva). Como vemos, la corriente total que pasa por cierta superficie acotada S es obligatoriamente igual a cero: la corriente de salida es igual a la de entrada.

Tratemos de explicar el resultado obtenido tomando como ejemplo un condensador en un circuito de corriente alterna (fig. 2.2). La superficie acotada S (que en la figura se muestra a trazos) se ha marcado de forma que, pasando entre las placas del condensador, interseca, seguidamente, el conductor. Es evidente, que sólo en el lugar de intersección la corriente de conducción I pasa por S. En virtud de la (2.12a), dicha corriente se equilibra con la corriente de desplazamiento I^{des} que penetra al interior de S y que prácticamente se dispone dentro del condensador. Si consideramos que en el condensador el campo eléctrico es homogéneo (el vector $\boldsymbol{D}$ tiene en cualquier lugar una misma magnitud) y, por consiguiente, la densidad de la corriente de desplazamiento $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ queda invariable en todo el espacio, se tiene que

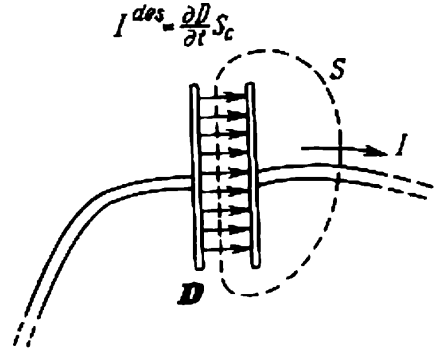


Fig. 2.2.

$$I^{des} = \frac{\partial D}{\partial t} S_{con} = I,$$

siendo S_{con} la superficie de la placa del condensador. Si $I = I_m \cos \omega t$ (ley de las oscilaciones armónicas), entonces

$$D = \frac{I_m}{\omega S_{con}} \operatorname{sen} \omega t.$$

Cuando se trata de un medio aéreo, las igualdades (1.5) son con alto grado de precisión justas y, por lo tanto, el valor absoluto de la intensidad del campo eléctrico en el interior del condensador es igual a

$$E = \frac{I_m}{\omega \varepsilon_0 S_{con}} \operatorname{sen} \omega t.$$

5. Campo magnético de la corriente rectilínea. Por último, examinemos un sencillo ejemplo de cálculo del campo magnético partiendo de la ecuación (2.8). Como ya sabemos, en el espacio las líneas magnéticas de fuerza del campo alrededor de un conductor rectilíneo con corriente continua son circunferencias concéntricas (véase la fig. 1.2, *d*). ¿Cómo calcular la intensidad del campo magnético a una distancia r del eje de la corriente? Ya que respecto al tiempo el proceso queda invariable, la ecuación (2.8) toma el aspecto

$$\oint_L \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = I. \qquad (2.13)$$

Escojamos aquella línea de fuerza cuyo radio es igual a r (fig. 2.3, *a*) y hagamos que con ella coincida el contorno de integración L en

la (2.8), o sea, (2.13) y éste lo recorreremos en el sentido del vector $\boldsymbol{H}$. En tal caso, bajo la integral se encontrará $\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = H\,dl$, teniendo H un mismo valor en todos los puntos del contorno, ya que prácticamente todas las direcciones radiales son físicamente

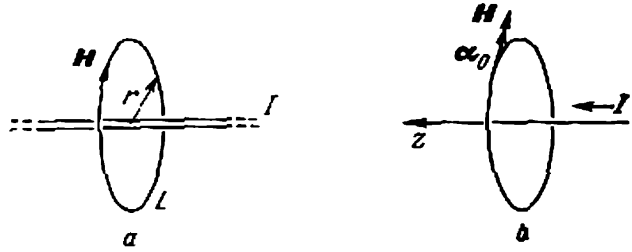


Fig. 2.3.

equitativas. Por esta razón

$$\int_l \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = H\int_l dl = 2\pi r H,\quad H = \frac{I}{2\pi r}.$$

De esta forma, partiendo de la (2.13) obtenemos inmediatamente el valor absoluto de la intensidad del campo magnético como función de la distancia desde el eje de la corriente. Sólo nos queda aclarar la orientación mutua de la corriente y el campo. Como en virtud de la (2.13), si la circulación del vector $\boldsymbol{H}$ es positiva, lo será también la corriente I, entonces, al recorrer el contorno a lo largo de $\boldsymbol{H}$, la corriente resultará estar dirigida por la normal al plano del contorno, relacionada con el sentido de recorrido de un sistema dextrógiro. De aquí se deduce que los sentidos del vector $\boldsymbol{H}$ y de la corriente I forman también un sistema dextrógiro. Dirigiendo la corriente I a lo largo del eje z de un sistema cilíndrico de coordenadas (fig. 2.3, *b*), obtenemos que

$$\boldsymbol{H} = \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}, \tag{2.14}$$

siendo α_0 el vector unitario de la tangente a la circunferencia de coordenadas de $r = \text{const}$ que corresponde a la coordenada angular α.

§ 3. Divergencias de la inducción eléctrica y de la magnética

1. Tercera y cuarta ecuaciones de Maxwell. Las dos siguientes ecuaciones

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho \tag{3.1}$$

y

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.2}$$

también componen el sistema de ecuaciones de Maxwell.

Según la (3.1) la divergencia de la inducción eléctrica es igual a la densidad de la carga ρ. Por su sentido, la divergencia signi-

fica que las líneas eléctricas de fuerza pueden tener principio o término en los puntos del espacio donde $\rho \neq 0$ (aquí sobreentendemos las líneas del vector $\boldsymbol{D}$). Si, por el contrario, en todos los puntos de cierta región V resulta que $\rho = 0$, las líneas de fuerza bien la cruzan por entero, bien son cerradas. Esto se muestra en la fig. 3.1. Ya que para $\rho > 0$ la divergencia de $\boldsymbol{D}$ es positiva y para $\rho < 0$,

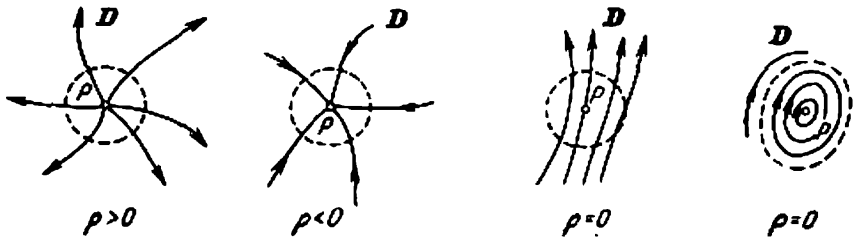


Fig. 3.1.

negativa, podemos decir que las cargas positivas sirven de "fuente", mientras que las negativas, de "vertedero". Esto también se ilustra en la fig. 1.2, *a* y *b*.

Integremos los miembros primero y segundo de la ecuación (3.1) respecto a cierto volumen V:

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{D} dv = \int_V \rho \, dv.$$

La integral derecha define la carga total en el interior de V:

$$q = \int_V \rho \, dv. \tag{3.3}$$

Apliquemos al primer miembro el teorema de Ostrogradski—Gauss (S1.24), es decir, sustituimos la integral de volumen de la divergencia div $\boldsymbol{D}$ por el flujo $\boldsymbol{D}$ a través de la superficie acotada S que es la frontera de V. Como resultado, obtenemos la enunciación integral de la ley de electromagnetismo que corresponde a la ecuación (3.1):

$$\oint_S \boldsymbol{D} \, d\boldsymbol{s} = q. \tag{3.4}$$

Esta ecuación expresa el llamado *teorema de Gauss*, en virtud del cual el flujo de inducción eléctrica q que pasa a través de toda la superficie acotada es igual a la carga total q que se encuentra en su interior. Además, no tiene importancia cómo está distribuida la carga (es, incluso, posible que dentro de V haya varias regiones cargadas). Si la carga total dentro de V es igual a cero (o sea, ni no hay carga alguna, o bien la carga positiva se equilibra con la negativa), el flujo del vector $\boldsymbol{D}$ que pasa por S es igual a cero:

el número de líneas de fuerza que entran en V es igual al número de las salientes; en caso particular, es posible que no haya líneas entrantes y salientes como, por ejemplo, en la fig. 3.1, *d*.

Respecto al teorema de Gauss (3.4) debemos, además, hacer la siguiente observación. En el § 1 se indicó que la inducción eléctrica se mide en culombios por metro cuadrado. Sabiendo que en culombios se representa la magnitud de la carga y haciendo uso de la igualdad (3.4), podemos confirmar la justeza de dicha dimensión.

Consideremos seguidamente la ecuación (3.2). La igualdad a cero de la divergencia de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$, significa que las líneas magnéticas de fuerza, o sea, las líneas del vector $\boldsymbol{B}$, no tienen ni principio ni término: están cerradas (como en la fig. 3.1, *d*) o, bien, tienden a la infinidad. La forma integral correspondiente a la (3.2) se obtiene lo mismo que el teorema de Gauss, partiendo de la (3.1). Dicha ecuación tiene el aspecto

$$\oint_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = 0. \tag{3.5}$$

Esto quiere decir que el flujo de la inducción magnètica que pasa por cualquier superficie acotada S es siempre igual a cero.

La continuidad de las líneas magnéticas de fuerza responde al hecho de que en la *naturaleza no hay cargas magnéticas*. Las ecuaciones (3.2) y (3.5), en comparación con la (3.1), así como la (3.4), nos permiten escribir de modo puramente formal para la carga magnética:

$$\rho^m = 0 \quad \text{y} \quad q^m = 0. \tag{3.6}$$

2. Campo de una carga puntual. Examinemos en un ejemplo cómo se emplea el teorema de Gauss para calcular el campo. Supongamos que una carga puntual se encuentra en el vacío (o bien, en el aire). Las líneas de fuerza del campo son rectas radiales distribuidas *uniformemente* (o sea, a iguales distancias angulares), ya que todas las direcciones son físicamente equitativas. Si queremos determinar la inducción eléctrica a una distancia r de la carga, trazamos alrededor de ella una esfera de radio r (fig. 3.2). Las direcciones radiales forman las normales respecto a la superficie esférica y por esta razón, bajo la integral (3.4) $\boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = D\,ds$. Como el valor de D en la superficie de la esfera es invariable, se tiene que

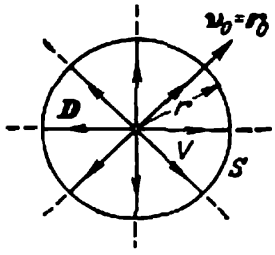


Fig. 3.2.

$$\oint_S \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = D \oint_S ds = 4\pi r^2 D, \quad D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Escribamos el resultado obtenido en forma vectorial, sustituyendo también el vector $\boldsymbol{B}$ por $\boldsymbol{E}$, mediante una de las igualdades (1.5):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (3.7)$$

§ 4. Continuación del estudio de las ecuaciones de Maxwell

1. Estructura del campo electromagnético. Después de estudiar las propiedades del campo electromagnético que se exponen en las ecuaciones (3.1) y (3.2), podemos ampliar el círculo de nuestros conceptos relacionados con las ecuaciones principales de Maxwell (2.1) y (2.2). Además, en este párrafo examinaremos las interrelaciones entre las cuatro susodichas ecuaciones.

Al principio, hagamos ciertas conclusiones sobre los campos magnéticos. Retornando al ejemplo con corriente continua rectilínea dada en el § 2 (punto 5), recordemos que la estructura del campo magnético que calculábamos, representada por una familia de líneas concéntricas de fuerza, considerábamos que nos era conocida de antemano. Sin embargo, en virtud de las conclusiones del § 3 no hubiera sido difícil preverla. En efecto, las líneas de fuerza *cerradas* del vector $\boldsymbol{B}$ que responden a la *simetría axial* del sistema, no pueden ser más que circunferencias concéntricas; según la (1.5) podemos decir lo mismo sobre las líneas del vector $\boldsymbol{H}$.

Sin salir de los límites de aplicación de las correlaciones (1.5), seguiremos adelante[1]. Como el campo magnético puede excitarse tanto por la corriente de conducción como por la de desplazamiento, es evidente que las líneas magnéticas de fuerza en forma de circunferencias concéntricas, son propias no sólo para la corriente axial de conducción, sino en general para cualquier distribución simétrica axial de la corriente total. Si hay tal "cúmulo" de la corriente total (o, en caso particular, sólo de la corriente de conducción o sólo de la corriente de desplazamiento), éste está rodeado de un campo magnético circunscrito por las líneas de fuerza concéntricas y, en tal caso, la corriente total y el campo forman un sistema *dextrógiro* (fig. 4.1). Supongamos que $\boldsymbol{j} = 0$, pero hay un campo eléctrico variable respecto al tiempo. En tal caso, habiendo simetría axial, debemos encontrar un campo magnético del tipo dado; los sentidos de los vectores $\boldsymbol{D}$ (o bien $\boldsymbol{E}$) y $\boldsymbol{H}$ (o bien $\boldsymbol{B}$) se relacionan por un sistema dextrógiro si $\boldsymbol{D}$ crece y levógiro, si $\boldsymbol{D}$ decrece: en el primer caso la dirección de los vectores $\boldsymbol{D}$ y $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ coincide, en el segundo es contraria.

---

[1] Haremos uso del hecho de que los vectores $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$, así como $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$, son en el vacío paralelos según la (1.5). Sin embargo, más adelante (§ 5) nos convenceremos de que la colinealidad queda en vigor para todos los medios *isótropos*.

Supongamos que en cierta región el vector $\boldsymbol{H}$ tiene dirección invariable. Introduzcamos un sistema de coordenadas cartesianas de tal forma que la dirección del vector coincida con su eje z; entonces $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{z}_0 H$. En virtud de la (S1.20) rot $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{x}_0 \partial H/\partial y - \boldsymbol{y}_0 \partial H/\partial x$ y, por lo tanto, en el caso dado los vectores $\boldsymbol{H}$ y rot $\boldsymbol{H}$

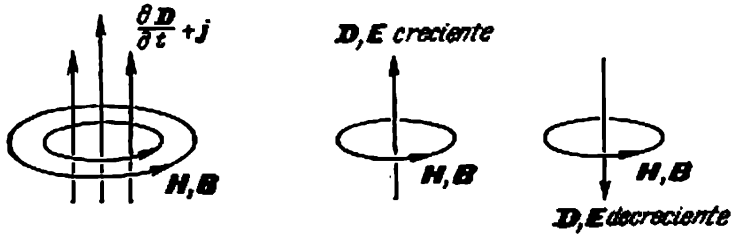


Fig. 4.1.

son perpendiculares y debido a lo que serán perpendiculares los vectores de la intensidad del campo magnético $\boldsymbol{H}$ y de la densidad de la corriente total $\partial \boldsymbol{D}/\partial t + \boldsymbol{j}$.

Luego, en lugar de la corriente eléctrica consideremos el flujo magnético. Para simetría axial del flujo magnético, variable respecto al tiempo, se crea una situación análoga a la anteriormente descrita: el campo eléctrico que él crea estará circunscrito por una familia de líneas concéntricas de fuerza. Esto se advierte directamente por la analogía formal de las ecuaciones (2.4) y (2.8) que consiste en la conversión de la una a la otra al sustituir $\boldsymbol{H} \rightleftarrows \boldsymbol{E}$ y $\frac{d}{dt}\int\limits_S \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} + \int\limits_S \boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{s} \rightleftarrows -\frac{d}{dt}\int\limits_S \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s}$. Así, es posible confeccionar un cuadro del campo (fig. 4.2) semejante al ya conocido (fig. 4.1);

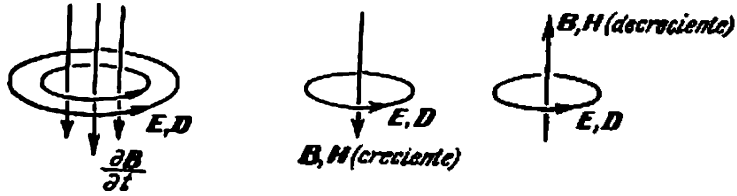


Fig. 4.2.

sin embargo, aquí el campo eléctrico y el flujo magnético forman un *sistema levógiro* (el signo menos ante la expresión del flujo indica que su dirección debe invertirse). Señalemos que el sentido de los vectores $\boldsymbol{B}$ (o bien $\boldsymbol{H}$) y $\boldsymbol{E}$ (o bien $\boldsymbol{D}$) están relacionados por un sistema levógiro cuando $\boldsymbol{B}$ crece y al decrecer, por el dextrógiro.

Si escojemos una región en la que el vector $\boldsymbol{E}$ no cambie de dirección, es fácil comprobar que los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ son mutuamente perpendiculares.

2. Conservación de la carga y corriente de desplazamiento. Indiquemos un factor más que trata el papel de la corriente de desplazamiento y el origen histórico de esta noción. Existe la *ley de conservación de la carga* en virtud de la cual, la carga q no desaparece y no se crea "de nada". Por lo tanto, el decrecimiento de la carga en cierta región puede ser explicado sólo por su salida paulatina al exterior, mientras que su crecimiento, por la afluencia paulatina desde fuera. Sea I_0 la corriente de conducción que pasa por toda la frontera (acotada) S de la región V, cuya carga total es q. Entonces, la enunciación matemática de la ley de conservación de la carga tendrá el aspecto

$$I_0 = -\frac{dq}{dt}, \tag{4.1}$$

o bien, haciendo uso de la representación integral de la corriente y la carga,

$$\oint_S \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dv \tag{4.1a}$$

(compárense las fórmulas (2.9) y (3.3)).

Obtengamos la enunciación diferencial de la ley de conservación de la carga. Con este objeto, transformemos el primer miembro de la (4.1a) mediante el teorema de Ostrogradski—Gauss (S1.24) y en el segundo miembro, traspasemos la derivación bajo el signo de la integral; uniendo, a continuación, los dos miembros bajo el signo de la integral de volumen, obtenemos que

$$\int_V \left(\operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dv = 0,$$

además, la región V es arbitraria. De aquí se deduce la enunciación diferencial de la ley de conservación de la carga

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{4.2}$$

también denominada "ecuación de continuidad".

Ahora, podemos pasar al esclarecimiento del papel que juega la corriente de desplazamiento en la primera ecuación de Maxwell. En el caso de la corriente continua su forma diferencial es

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \tag{4.3}$$

mientras que la integral tiene el aspecto (2.13). La ecuación anteriormente escrita expresa la relación entre el campo magnético y la corriente continua que fue estudiada antes de que Maxwell enunciara sus ecuaciones [1]. El mérito de Maxwell consiste, parti-

[1] Aquí tenemos en cuenta la esencia del problema y no su forma matemática. En particular, la inscripción vectorial de las ecuaciones del electromagnetismo no fue incluso empleada por el propio Maxwell y fue introducida por otros investigadores. Primeramente las ecuaciones de Maxwell se escribían en forma de coordenadas.

cularmente, en que estableció el hecho de que la ecuación (4.3) no expresa la ley universal del electromagnetismo, ya que en caso general (para procesos variables) contradice a la ley de conservación de la carga. En efecto, creando en la (4.3) la divergencia de los vectores y teniendo en cuenta la identidad (S1.32), tenemos que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

mientras que partiendo de (4.2) el segundo miembro debe ser $-\partial\rho/\partial t$.

Al advertir tal hecho, Maxwell introdujo en la (4.3) una corrección en forma de $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$, con objeto de poner la ecuación en correspondencia con la (4.2). Así apareció la primera ecuación de Maxwell que contiene la densidad de la corriente de desplazamiento. Sin dificultad alguna se comprueba que dicha ecuación realmente concuerda con la ley de conservación de la carga. Creando en (2.1) divergencias, obtenemos la ecuación (2.11). Si, ahora, cambiamos de lugares las operaciones de diferenciación div y $\partial/\partial t$ y después, en virtud de la (3.1), sustituimos div $\boldsymbol{D}$ por ρ, entonces, partiendo de (2.11), obtendremos (4.2). Podemos, además, señalar que la denominación de la (4.2), "ecuación de continuidad", indica su relación con la igualdad (2.11) que expresa la continuidad de las líneas de la corriente total.

3. Correlación entre el primer par de ecuaciones de Maxwell y el segundo. Examinemos, finalmente, la relación entre las ecuaciones (3.1) y (3.2) y las ecuaciones principales de Maxwell (2.1) y (2.2). Se trata de que (3.1) y (3.2) no son plenamente independientes. En efecto, aplicando a la (2.2) la operación div, después de la permutación de las operaciones div y $\partial/\partial t$, se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{4.4}$$

Pero esto significa que la función div $\boldsymbol{B}$ no depende del tiempo:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \text{const}\,(t). \tag{4.5}$$

Podemos decir [1]: "Si en el pasado el campo no existía, esta constante deberá ser igual a cero, pero como es lógico suponer que el origen inicial del campo transcurrió en un tiempo no infinitamente lejano, llegamos a la conclusión de que $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$". Razonando de tal forma, podemos, de hecho, pasar de la segunda ecuación de Maxwell (2.2) a la ecuación (3.2). Sin embargo, cuando la ecuación (3.2) se escribe como independiente, esto sólo quiere decir que el contenido físico del razonamiento anteriormente citado se expresa en forma matemática (3.2). Como en otros muchos casos, la expresión matemática es mucho más lacónica que la oral; además, es insustituible al resolver problemas de la teoría del electromagnetismo, cuando todos los datos iniciales deben ser expresados en

[1] Citamos una monografía de gran autoridad [A.2].

forma matemática. Por este motivo, introduciremos la ecuación (3.2) en el sistema de ecuaciones de electromagnetismo.

Si en la (2.1) se crea divergencia, semejantemente a lo anterior, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{D} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{4.6}$$

Aplicando luego la ley de conservación de la carga en forma diferencial (4.2), tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \boldsymbol{D} - \rho) = 0, \tag{4.7}$$

o sea,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} - \rho = \text{const}\,(t), \tag{4.8}$$

y de aquí, empleando el razonamiento anterior, podemos llegar a la ecuación (3.1).

Pues, la ecuación (3.1) se obtiene de la primera ecuación de Maxwell (2.1) no sólo razonando sobre la conducta del campo respecto al tiempo, sino que también haciendo uso de la ley de conservación de la carga. Si, por el contrario, las ecuaciones (2.1) y (3.1) se examinan aun como expresiones independientes, la ley de conservación de la carga resulta desprenderse de ellas.

II. Propiedades electromagnéticas de los medios

La relación en el vacío entre los vectores de intensidad $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ y los de inducción $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ se caracteriza por medio de las correlaciones (1.5). La diferencia entre la esencia física de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ es relativa: se determina por el sistema de unidades escogido. En el sistema de unidades SI que empleamos, figuran las constantes ε_0 y μ_0 que tienen cierta dimensión y que se utilizan como coeficientes de proporcionalidad entre las inducciones e intensidades. Pero en el sistema de Gauss $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, debido a lo que en el vacío $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{H}$.

Sin embargo, las divergencias esenciales entre la inducción y la intensidad (que, de hecho, no están relacionadas de forma alguna con la elección del sistema de unidades) para diferentes medios materiales son características[1]. En dependencia del tipo del medio tenemos determinada relación entre las funciones vectoriales $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$, así como entre $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{E}$. En ciertos casos particulares hay que tener en cuenta relaciones más complejas, por ejemplo $\boldsymbol{D}$ con $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$. Para completar las ecuaciones (2.1), (2.2), (3.1) y (3.2) aparecerán, como es lógico, ecuaciones que caractericen las propiedades del medio en el que transcurre el proceso electromagnético.

[1] El término "medio material" (en distinción del "vacío", vacuo) tiene un sentido limitado, pero de ninguna manera filosófico.

Es evidente que las relaciones indicadas se determinan por la interacción de los elementos de la materia y el campo. Los problemas de electrodinámica microscópica estudian el conjunto de factores físicos que determinan las dependencias $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{E})$ u otras más complicadas. Sin embargo, para medios reales tales dependencias no pueden, hasta ahora, calcularse teóricamente. Por esta razón, al definirlas en electrodinámica macroscópica se fían de investigaciones experimentales.

En los párrafos siguientes consideraremos las correlaciones típicas entre las inducciones e intensidades, así como entre la corriente y el campo. A continuación, obtendremos importantes correlaciones que caracterizan el campo en las superficies divisoras de medios.

§ 5. Polarización e imanación

1. Procesos electromagnéticos en medios materiales. Por lo general, los procesos electromagnéticos internos en la sustancia están, por término medio, tan equilibrados que de por sí no crean un campo que *macroscópicamente* pueda ser observado. Sólo ciertos medios suelen ser exclusión y entre ellos, por ejemplo, los materiales ferromagnéticos: es bien conocida la acción de los imanes permanentes, cuyos campos se provocan precisamente por procesos internos espontáneos. Sin embargo, bajo la acción de un campo externo (ajeno) el equilibrio de los campos internos de la sustancia, en mayor o menor grado, se altera: estos últimos están relacionados con las partículas elementales las que, a su vez, son propensas a la acción del campo exterior. Por ejemplo, en el campo eléctrico exterior se produce cierta deformación, así como una reorientación de los átomos y moléculas, cuyas cargas, como suelen decir, quedan "ligadas" (o sea, solamente sufren ciertas desviaciones); a causa de esto, aparece tal campo interior que evidentemente varía al exterior inicial, ya que el primero se superpone sobre el segundo. Este fenómeno se denomina *polarización* del medio. Un proceso análogo en el campo magnético exterior se denomina *imanación*. Más adelante tendremos la posibilidad de considerar con mayor detalle ciertos rasgos de semejantes procesos[1]. Por el momento es fundamental aclarar de qué manera la polarización e imanación se reflejan en las ecuaciones generales de electromagnetismo.

Sea la intensidad del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ y, entonces, la inducción eléctrica en el vacío será $\varepsilon_0\boldsymbol{E}$. Designemos esta magnitud por $\boldsymbol{D}_0$. Pero en un medio material con una intensidad $\boldsymbol{E}$ se observa una inducción $\boldsymbol{D}$. La diferencia

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0 \quad (\boldsymbol{D}_0=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0) \tag{5.1}$$

[1] En los §§ 18 y 80, punto 4, examinaremos el modelo sencillo del proceso de polarización. Pero por lo general, los procesos físicos de polarización e imanación en diversos medios son complicados y variadísimos; éstos se describen en los manuales de electrodinámica de medios contínuos; véase, por ejemplo, [E.1—3].

se denomina *polarizabilidad* (*polarización eléctrica*) del medio. Por consiguiente, la polarizabilidad tiene la misma dimensión que la inducción eléctrica. De este mismo modo introducimos el concepto de *imanación* (*polarización magnética*) $\boldsymbol{M}$. Y precisamente, si para una intensidad del campo magnético $\boldsymbol{H}$, la inducción en el vacío es $\boldsymbol{B}_0 = \mu_0 \boldsymbol{H}$ y en el medio material dado $\boldsymbol{B}$, llamaremos imanación a la diferencia [1]

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_0 \quad (\boldsymbol{B}_0 = \mu_0 \boldsymbol{H}). \tag{5.2}$$

Es decir, la imanación definida de este modo tiene la misma dimensión que la inducción magnética. Por lo general, los procesos de polarización e imanación del medio transcurren independientemente, es decir, el primero no depende del campo magnético y el segundo, del eléctrico. Debido a esto, podemos destacar las siguientes dependencias funcionales:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}), \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}), \\ \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{M}(\boldsymbol{H}), \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H}). \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

La concepción más sencilla de lo anteriormente escrito consiste en que para las coordenadas x, y, z, t dadas, la polarización $\boldsymbol{P}(x, y, z, t)$ se define totalmente por la intensidad $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$, etc.; en otras palabras, los procesos de polarización e imanación son *locales* y *carentes de inercia*: en cada punto del medio $M(x, y, z)$ no dependen del estado del medio ambiente, así como de la "prehistoria" de dicho estado. Por ahora, vamos a partir de dicho punto de vista, suponiendo también que $\boldsymbol{P} = 0$ si $\boldsymbol{E} = 0$ y $\boldsymbol{M} = 0$, cuando $\boldsymbol{H} = 0$, o sea, que no hay polarización e imanación espontáneas [2].

2. **Susceptibilidad y permeabilidad de los medios.** En la mayoría de los casos, los vectores $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{D}$, tanto como $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$ son colineares y es más sencillo escribir:

$$\boldsymbol{P} = \chi^e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \tag{5.4}$$

$$\boldsymbol{M} = \chi^m \mu_0 \boldsymbol{H}, \tag{5.5}$$

en donde los coeficientes adimensionales χ^e y χ^m se denominan, respectivamente, *susceptibilidad eléctrica* y *susceptibilidad magnética* del medio. Expresan el "grado de actividad" del medio respecto al proceso electromagnético. Seguidamente, como vemos, se pueden escribir las siguientes correlaciones entre las inducciones y las intensidades:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{5.7}$$

---

[1] Con objeto de observar la uniformidad, aquí nos alejamos de la definición tradicional del vector de imanación, de acuerdo con la cual $\boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{H}$.

[2] Respecto a la polarización e imanación espontáneas, véase el § 21, punto 4.

en las que de acuerdo con (5.1), (5.4) y (5.2), (5.5)

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi^e) \quad \text{y} \quad \mu = \mu_0(1+\chi^m). \tag{5.8}$$

El coeficiente ε se denomina *constante dieléctrica* (o *permitividad*) y μ, *permeabilidad magnética* del medio. Finalmente, para caracterizar el medio respecto al vacío, se introducen las permeabilidades *relativas* adimensionales

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1+\chi^e \quad \text{y} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1+\chi^m \tag{5.9}$$

(la constante eléctrica ε_0 y la constante magnética μ_0 son, formalmente, permeabilidades del vacío).

Ahora, debemos marcar que en el sistema de ecuaciones principales del electromagnetismo introduciremos en adelante las ecuaciones (5.6) y (5.7), ya que éstas expresan en forma sencilla las relaciones entre las inducciones e intensidades. Dichas ecuaciones son en alto grado universales, es decir, pueden emplearse para la definición correcta de propiedades de medios de múltiples clases y, por ahora, no tiene sentido fijar la atención en las limitaciones de su aplicación. Al mismo tiempo, la permitividad ε y la permeabilidad magnética μ expresan en las ecuaciones de electrodinámica las características de los medios que en cada caso concreto se determinan como resultado de *mediciones*; posteriormente, examinaremos las posibilidades de tales mediciones.

3. Clases de medios. El carácter de ε y μ que hasta el momento interpretábamos como coeficientes escalares en las correlaciones (5.6) y (5.7), corresponde al tipo del medio. Es evidente que cuando el medio es *homogéneo*, es decir, con idénticas propiedades en todos los puntos del espacio, ε y μ son magnitudes que no dependen de las coordenadas, mientras que para un medio *no homogéneo*, serán funciones de las coordenadas x, y, z (o de cualesquiera otras). Si ε y μ no dependen del campo, las correlaciones entre las inducciones e intensidades (5.6) y (5.7) son lineales; en tal caso, decimos que el medio es *lineal* (en lo que respecta a los procesos de polarización).

Naturalmente que medios puramente lineales no pueden existir, pero prácticamente las no linealidades se manifiestan, en la mayoría de los casos, con enormes intensidades de los campos. Por ejemplo, podemos observar la no linealidad eléctrica de medios en los campos electromagnéticos creados por potentes láseres. No obstante, en campos relativamente débiles, la no linealidad es propia de los materiales ferromagnéticos, así como de los ferroeléctricos (respectivamente, la no linealidad magnética y eléctrica).

En general, las ecuaciones (5.6) y (5.7), cuando ε y μ no dependen del campo, deben examinarse como dependencias "linealizadas" de la (5.3), es decir, obtenidas despreciando los términos no lineales extremadamente pequeños en los respectivos desarrollos. En efecto, escribiendo en forma escalar una de las dependencias

(5.3), por ejemplo $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E})$, podemos representarla como la serie de Taylor respecto a los exponentes E:

$$D(E) = D(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i D(0)}{\partial E^i} E^i, \tag{5.10}$$

pero ya que no hay polarización espontánea, $D(0) = 0$ y obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} D(E) &= \varepsilon(E)\, E, \\ \varepsilon(E) &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 E + \varepsilon_2 E^2 + \ldots + \varepsilon_i E^i + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

siendo

$$\varepsilon_i = \frac{\partial D(0)}{\partial E}\ ;\ \varepsilon_{i-1} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i D(0)}{\partial E^i}\ ;\ i = 2, 3, 4, \ldots \tag{5.12}$$

Puede considerarse que la constante dieléctrica $\varepsilon(E)$ no depende de E y es igual a la permitividad linealizada ε_i cuando la suma infinita en la segunda línea de la (5.11), al comenzar ésta por $\varepsilon_1 E$, es despreciablemente pequeña.

Señalemos una circunstancia más. Ya hemos dicho que los vectores $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{D}$, así como $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$ son, por lo general, colineares y en este hecho se basaron todas nuestras consideraciones (podemos añadir que, salvo particulares excepciones, ε y μ son positivas, por lo que los indicados vectores no sólo son colineares sino, además, paralelos). Según su sentido, las correlaciones (5.6) y (5.7) son justas independientemente de la dirección de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$; en otras palabras, las propiedades de los medios que describimos no dependen de la orientación de los campos (de la dirección escogida). Tales medios se denominan *isótropos*.

4. Descripción de la anisotropía. Existen, sin embargo, medios *anisótropos*, es decir, aquellos cuyas propiedades dependen de la dirección escogida. No debemos confundir la anisotropía con la falta de homogeneidad; un medio anisótropo, tanto como isótropo, puede ser homogéneo y no homogéneo; en este último caso, sus propiedades dependen igualmente de la dirección en cualquiera de sus puntos. Son anisótropos los cristales. En radiotécnica se emplean extensamente ferritas imanadas que en campos electromagnéticos de frecuencia ultraelevada son anisótropas. Hay otros muchos casos de anisotropía de medios de importante valor práctico. En el caso de anisotropía (en el sentido de polarización eléctrica o magnética), en lugar de las correlaciones (5.6) y (5.7) se escriben otras que corresponden a la *no colinealidad* de los vectores de inducción e intensidad.

Por ejemplo, cuando tenemos un medio eléctricamente anisótropo lineal, en lugar de (5.6) debemos escribir tres igualdades escalares:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z, \end{aligned}$$

siendo ε_{xx}, ε_{xy}, ..., ε_{zy}, ε_{zz} ciertas magnitudes que no dependen de $\boldsymbol{E}$. Podemos convencernos fácilmente de que el medio caracterizado de tal forma es anisótropo; sus propiedades son, en general, diferentes para las direcciones x, y, z. Cambiando solamente la orientación del vector $\boldsymbol{E}$ (dirigiéndolo sucesivamente a lo largo de los ejes x, y, z) podemos obtener diversas $\boldsymbol{D}$.

En adelante, para la definición de medios anisótropos lineales será suficiente emplear breves expresiones y sustituir las correlaciones (5.6) y (5.7) por las siguientes:

$$\boldsymbol{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \tag{5.13}$$

$$\boldsymbol{B} = \overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H}, \tag{5.14}$$

siendo

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}$$

el *tensor de la constante dieléctrica* y el *tensor de la permeabilidad magnética* [1]. Señalemos, que (5.6) y (5.7) son formas particulares de las igualdades (5.13) y (5.14) que se forman cuando $\overleftrightarrow{\varepsilon} = I\varepsilon$ y $\overleftrightarrow{\mu} = I\mu$ (siendo I un tensor unitario).

De la misma forma que (5.6) y (5.7), las correlaciones (5.4) y (5.5) se generalizan al haber anisotropía: en lugar de χ^e y χ^m se introducen los tensores de susceptibilidad $\overleftrightarrow{\chi}^e$ y $\overleftrightarrow{\chi}^m$. Se comprueba con facilidad que los tensores de las permeabilidades relativas $\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = \varepsilon_0^{-1}\overleftrightarrow{\varepsilon}$ y $\overleftrightarrow{\mu}_r = \mu_0^{-1}\overleftrightarrow{\mu}$ están relacionadas con los tensores de susceptibilidad por correlaciones semejante a (5.9):

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = I + \overleftrightarrow{\chi}^e \quad \text{y} \quad \overleftrightarrow{\mu}_r = I + \overleftrightarrow{\chi}^m. \tag{5.15}$$

5. Ciertos datos de información. Como conclusión del presente párrafo, daremos ciertos datos de información sobre las propiedades de materias extensamente difundidas (K.2).

Los datos de las dos siguientes tablas se indican para temperaturas $t = 20°\text{C}$ y presión normal (esta última magnitud es extremadamente importante para los gases). La tabla 5.1 contiene los resultados de la medición de ε_r en diferentes campos alternativos, así como en un campo estático ("frecuencia 0"). La tabla 5.2 se

[1] Sin tratar el concepto de tensor en amplio sentido, señalemos que en el caso dado nos referimos a la multiplicación de la matriz por el vector. Por ejemplo, en (5.13) el vector-columna (D_x, D_y, D_z) se obtiene multiplicando la matriz $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ por el vector-columna (E_x, E_y, E_z). Véase el Suplemento 9.

da principalmente para ilustrar el hecho de que la permeabilidad magnética relativa de la mayoría de las sustancias es próxima a la unidad.

Tabla 5.1

Constante dieléctrica relativa

Sustancia	Frecuencia Hz	ε_r	Sustancia	Frecuencia Hz	ε_r
Aire	$0-3\cdot10^{10}$	1,000536	Vidrio de plomo	10^3-10^6	6,9
Agua	0	81,10	Esteatita	10^6-10^9	6,0
Idem	10^6	80	Mármol	10^6	8,0
Idem	10^9	80	Estireno	10^6-10^9	2,55
Idem	$3\cdot10^9$	78	Polietileno	10^6-10^9	2,30
Idem	10^{10}	64	Mica	10^3-10^6	7,00
Idem	$1,9\cdot10^{10}$	44			
Idem	$2,4\cdot10^{10}$	35	Titanato de bario	10^6	1200
Parafina	10^6-10^9	2,2			
Cuarzo fundido	10^3-10^8	3,8			

Tabla 5.2

Permeabilidad magnética relativa

Sustancia	μ_r	Sustancia	μ_r
Hidrógeno	0,99999999776	Cobre	0,99999044
Oxigeno	1,00000191	Plata	0,9999736
Agua	0,99999095	Aluminio	1,0000222

Hemos dado los datos para ciertas *sustancias paramagnéticas* ($\mu_r > 1$) y *diamagnéticas* ($\mu_r < 1$). Para los *materiales ferromagnéticos* (el hierro en particular) la permeabilidad magnética relativa es considerablemente mayor que la unidad en campos continuos y campos que varían con relativa lentitud; además, dicha permeabilidad está relacionada complicadamente con el campo. Indiquemos que el titanato de bario (véase la tabla 5.1) pertenece a los *materiales ferroeléctricos*, cuyas propiedades eléctricas son análogas a las magnéticas de los ferromagnéticos (en la tabla se da la permeabilidad linealizada). El titanato de bario y el mármol son isótropos por ser policristalinos. El cuarzo fundido es una materia amorfa isótropa; los cristales de cuarzo pertenecen a la categoría de "monoejes", el monocristal de cuarzo es un medio anisótropo

(§ 82, punto 1) que se caracteriza por el tensor de permitividad relativa

$$\overleftrightarrow{\varepsilon_r} = \begin{pmatrix} 4{,}55 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}55 & 0 \\ 0 & 0 & 4{,}49 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Electroconductibilidad

1. Transporte de cargas. Al haber en el campo electromagnético cargas eléctricas libres, como sabemos, existirá corriente de conducción que en cada punto del espacio se caracterizará por el vector de densidad $\boldsymbol{j}$. Primeramente, obtenemos una correlación sencilla que expresa la dependencia entre la densidad de la corriente j, la densidad de la carga ρ de un mismo signo y la velocidad de la carga $\boldsymbol{v}$. Como se muestra en la fig. 6.1, *a*, en el espacio destacamos un cilindro elemental, cuyo eje es paralelo al vector $\boldsymbol{j}$ (o sea, al sentido del transporte de la carga). La corriente I que pasa a través de la base del cilindro S, es igual a

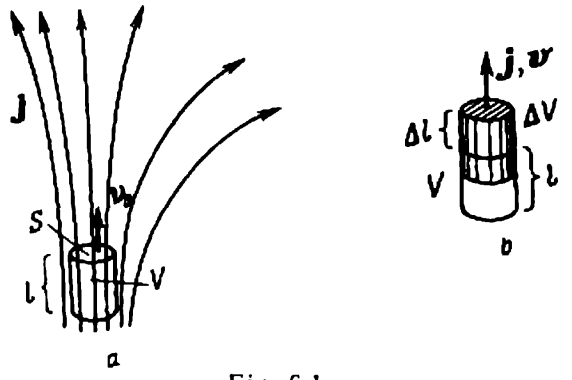


Fig. 6.1.

$$I = jv_0S = jS. \tag{6.1}$$

Por otro lado,

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \tag{6.1a}$$

siendo Δq la carga que pasa por S durante el tiempo Δt.

Supongamos que en cierto momento de tiempo t en el volumen $V = Sl$ del cilindro mostrado en la fig. 6.1, *a* se encuentra la carga q. Al transcurrir un intervalo de tiempo Δt, la carga ocupará la región del cilindro que en la fig. 6.1, *b* está rayada. Al mismo tiempo, por lo visto, la carga Δq que ha pasado por la base del cilindro, se dispondrá en el volumen $\Delta V = S\Delta l$ (fig. 6.1, *b*). Teniendo en cuenta que cuando $\Delta t \to 0$

$$\frac{\Delta q}{\Delta V} \to \rho \quad \text{y} \quad \frac{\Delta l}{\Delta t} \to v,$$

reducimos la expresión (6.1 a) al aspecto:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} S \frac{\Delta l}{\Delta t} = S\rho v. \tag{6.2}$$

Comparando las (6.1) y (6.2), podemos advertir que $j = \rho v$, pero como los vectores $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{v}$ tienen una misma dirección, entonces

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}. \tag{6.3}$$

Señalemos, además, un resultado colateral. Haciendo analogia con las (1.6) y (1.7) y a base de la (1.3), es posible expresar la densidad de la fuerza de Lorentz:

$$\boldsymbol{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}] = \rho [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}]$$

(ΔV es el volumen que contiene la carga Δq y que se desplaza con una velocidad $\boldsymbol{v}$). Haciendo uso de la igualdad (6.3), tendremos que

$$\boldsymbol{f} = \rho [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B}]. \tag{6.4}$$

2. La corriente y el campo. Ley de Ohm. El resultado obtenido anteriormente es de por sí muy sencillo (a una correlación análoga nos lleva el análisis del movimiento de un líquido), pero a las funciones vectoriales que ya conocíamos se ha añadido una más, la velocidad $\boldsymbol{v}$ de transporte de la carga. Esto hace necesario añadir a las ecuaciones de Maxwell ecuaciones suplementarias que enlacen $\boldsymbol{v}$ con los vectores del campo electromagnético. Así se procede, en realidad, por ejemplo, al examinar los flujos electrónicos en el vacío, aplicando las *ecuaciones de movimiento* de las partículas materiales cargadas en un campo.

No obstante, en la inmensa mayoría de los problemas de electrodinámica macroscópica, sencillamente se supone que $\boldsymbol{j}$ es cierta función de la intensidad del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{E}). \tag{6.5}$$

Si desde el punto de vista de electroconductibilidad el medio es isótropo, podemos introducir el coeficiente escalar σ, llamado *conductividad (conductibilidad específica)*, y escribir que

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}. \tag{6.6}$$

La ecuación (6.6) junto con (5.6) y (5.7), se anexan a las ecuaciones principales de electromagnetismo y se denominan "ecuaciones materiales", así como "ecuaciones de estado". Formalmente, la conductibilidad específica σ es una característica del medio, semejante a la constante dieléctrica ε o a la permeabilidad magnética μ. El medio se llama lineal (desde el punto de vista de la electroconductibilidad) si la correlación (6.6) es lineal, es decir, que σ no depende de $\boldsymbol{E}$. De forma semejante a como operábamos en el § 5, para un medio lineal anisótropo, en lugar de la (6.6) podemos escribir

$$\boldsymbol{j} = \overleftrightarrow{\sigma} \boldsymbol{E}, \tag{6.7}$$

donde

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

es el tensor de conductividad.

Seguidamente, mostremos que la (6.6), concebida como lineal, resulta ser, ni más ni menos, que una de las formas de expresión de la ley de Ohm adaptada para la descripción local de un proceso (a veces dicen: "forma diferencial de la ley de Ohm"). Como lo hicimos anteriormente, tomemos un volumen cilíndrico con una corriente uniformemente distribuida paralela al eje (fig. 6.1, *a*). De acuerdo con la (6.6), el vector $\boldsymbol{E}$ es paralelo al eje del cilindro. Integremos respecto a V ambos miembros de la igualdad (6.6):

$$\int_V \boldsymbol{j} dv = \int_V \sigma \boldsymbol{E} dv.$$

A consecuencia de la constancia del vector $\boldsymbol{j}$ en el interior del cilindro

$$\int_V \boldsymbol{j} dv = \boldsymbol{j} S l = \boldsymbol{l}_0 I l,$$

siendo $\boldsymbol{l}_0$ un vector unitario dirigido a lo largo de la dirección del eje. Análogamente

$$\int_V \sigma \boldsymbol{E} dv = \sigma E S l = \boldsymbol{l}_0 \sigma S E l = \boldsymbol{l}_0 \sigma S U,$$

siendo $U = lE$, ni más ni menos, que la *caída de tensión* en el sector l. Comparando la sexpresiones obtenidas, llegamos a la igualdad

$$U = I\mathcal{R} \quad \left(\mathcal{R} = \frac{l}{\sigma S}\right). \tag{6.8}$$

Estas expresiones representan la conocida ley de Ohm para un sector del circuito; la magnitud $\mathcal{R} = l/\sigma S$ es la *resistencia eléctrica* del cilindro elegido (que podría ser un trozo de alambre). Ya que la resistencia se mide en *ohmios* [Ω], la conductividad se mide en [1/Ω·m]; la correspondiente unidad de medición se llama *simens por metro* [S/m].

3. Conductores y dieléctricos. A continuación, en la tabla 6.1, se dan los valores de la conductibilidad específica de ciertas sustancias divulgadas [A.2].

En dependencia de su grado de conductibilidad, las sustancias se dividen en *conductores* y *dieléctricos* (aisladores). Las conductibilidades específicas de los conductores y dieléctricos típicos divergen en múltiples órdenes, lo que atestiguan los datos de la tabla 6.1. Por esta razón, su conducta en los campos electromagnéticos es muy diferente. En una serie de casos, al resolver problemas de

Tabla 6.1

Conductividad

Sustancia	σ (S/m)	Sustancia	σ (S/m)
Plata	$6{,}139 \cdot 10^7$	Cuarzo fundido	$2 \cdot 10^{-17}$
Cobre recocido	$5{,}8005 \cdot 10^7$	Parafina	$10^{-14} - 10^{-16}$
Aluminio industrial	$3{,}54 \cdot 10^7$	Mica	$10^{-11} - 10^{-15}$
Hierro	$1{,}0 \cdot 10^7$	Vidrio corriente	10^{-12}
Estaño	$0{,}869 \cdot 10^7$	Baquelita	$10^{-8} - 10^{-10}$
Plomo	$0{,}48 \cdot 10^7$	Mármol	$10^{-7} - 10^{-9}$
Mercurio	$0{,}1044 \cdot 10^7$		

Observación: Todos los datos se dan para $t = 20°$ C.

electrodinámica el conductor o dieléctrico real se sustituye exitosamente por idealizados: se utiliza el concepto de *conductor ideal* con conductibilidad ilimitada ($\sigma \to \infty$) y *dieléctrico ideal*, privado de conductibilidad ($\sigma = 0$).

Sin embargo, hay medios que según su conductibilidad ocupan una posición intermedia (véase la tabla 6.2).

Tabla 6.2

Medios intermedios [1]

Medio	ε_r	σ (S/m)
Tierra seca	3—6	$1{,}1 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-3}$
Tierra húmeda	10—30	$3 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-2}$
Agua destilada	(véase la tabla 12.1)	$2 \cdot 10^{-4}$
Agua dulce natural	80	$10^{-3} - 2{,}4 \cdot 10^{-2}$
Agua de mar	80	1 — 4,3

[1] Estos datos se han tomado de [F.1].

En los campos electromagnéticos alternativos tales sustancias, en dependencia de las condiciones, manifiestan propiedades de dieléctricos o conductores. Para hallar la medida de apreciación de las propiedades de medios intermedios, hay que aclarar, primeramente, la esencia de la diferencia cualitativa entre los conductores y dieléctricos.

Comparemos un dieléctrico ideal con un conductor ideal. En el primer medio ($\sigma = 0$) puede sólo haber corriente de desplazamiento, ya que el primer miembro de la expresión de la densidad de la corriente total

$$\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

es igual a cero. En el segundo medio ($\sigma \to \infty$) todo transcurre a la inversa; hay sólo corriente de conducción: el segundo miembro respecto al primero es una magnitud infinitamente pequeña. Por esto, un medio real debe considerarse cercano a un dieléctrico ideal si en él la corriente de desplazamiento predomina sobre la de conducción y próximo a un conductor ideal si la predominación de la corriente conductiva es considerable. Mediante esta cualidad se distinguen en electrodinámica los dieléctricos y conductores reales. Pero, como hemos podido ver, la correlación entre las corrientes de conducción y las de desplazamiento no sólo depende de las características σ y ε de los medios, sino que también de la velocidad de variación del campo.

Representan gran interés para la radiotecnia los campos que oscilan armónicamente respecto al tiempo; para tales campos puede fácilmente hallarse un criterio sencillo de la pertenencia del medio al grupo de los conductores o dieléctricos. Así, supongamos que la intensidad del campo eléctrico es la función

$$E = E_m(x, y, z)\cos[\omega t + \varphi(x, y, z)],$$

lo que corresponde a las oscilaciones armónicas de frecuencia circular ω. Calculando para el punto arbitrario $M(x, y, z)$ la densidad de las corrientes de conducción y de desplazamiento ($j = \sigma E = \sigma E_m \cos(\omega t + \varphi)$ y $\partial D/\partial t = -\omega\varepsilon E_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, podemos confeccionar la relación de sus amplitudes:

$$\frac{j_m}{(\partial D/\partial t)_m} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}. \tag{6.9}$$

Esta es la medida que nos permite apreciar las propiedades del medio para la frecuencia dada. Es evidente que el medio se caracteriza como conductor o dieléctrico si

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1 \quad \text{y} \quad \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1. \tag{6.10}$$

De este modo, desde el punto de vista de electrodinámica, la división de los medios en conductores y dieléctricos es muy relativa, ya que el problema de a cuál de estas clases pertenece el medio se resuelve en función de las propiedades del campo (en este caso, de su frecuencia). En aquella banda gigantesca de frecuencias de que hoy día dispone la radiotecnia, las propiedades de los medios varían muy considerablemente. Generalmente, no podemos considerar que las características de los medios ε y σ no dependen de la frecuencia. Sin embargo, incluso hasta al alcanzar frecuencias muy altas, cuando las oscilaciones de las partículas de la materia están aún lejanas de sus resonancias, ε y σ pueden, prácticamente, ser independientes de la frecuencia. En tal caso, en la apreciación de las (6.10) ε y σ figuran como constantes.

La fig. 6.2, nos ilustra la conducta de una serie de conocidos medios. Por ejemplo, vemos que la tierra seca para bajas frecuen-

cias es conductor, pero se convierte en dieléctrico muy expresivo en el caso de frecuencias ultraelevadas. Este hecho juega importante papel en el proceso de propagación de ondas de radio sobre la superficie terrestre, lo que será estudiado más adelante.

4. **Fuerzas exteriores.** Debemos examinar aquí un problema más, relacionado con la electroconductibilidad de los medios. Hasta el momento, considerábamos la corriente de conducción como el proceso de movimiento de partículas cargadas de la materia en un campo electromagnético. En la carga positiva puntual q actúa la fuerza qE (véase el § 1); al recorrer el camino Δl la carga verifica un trabajo $qE\Delta l$, consumiendo cierta energía del campo. Si nos imaginamos que el campo, apareciendo en cierto momento de tiempo, provoca el transporte de las cargas, la corriente de conducción puede representarse como un proceso "secundario", para el que es necesario consumir la energía del campo. No obstante, el movimiento uniforme (no caótico) de las partículas cargadas puede transcurrir como resultado de la acción de fuerzas que no tienen ninguna relación con el campo electromagnético, las llamadas fuerzas *exteriores* electromotrices. Si bajo la acción de una fuerza exterior la carga se desplaza en sentido contrario al campo E, el trabajo efectuado durante Δl será negativo: $-qE\Delta l < 0$, es decir, que las fuerzas exteriores incrementan la energía del campo electromagnético. Queda claro que la presencia de fuerzas exteriores de cualquier naturaleza es necesaria para convertir en energía del campo electromagnético, energía de toda otra clase. Sobre la energía trataremos ya en este capítulo (§§ 9—12) y más adelante (§ 28), el problema de las fuerzas exteriores se estudiará desde otro punto de vista[1]. De momento, señalemos que la esencia física de las fuerzas exteriores no se limita de manera alguna. Como sencillo ejemplo, podemos examinar el desplazamiento de partículas cargadas (que tengan masa) bajo la acción del campo de gravitación; gracias a la acción de las fuerzas exteriores es posible explicar los procesos que transcurren en elementos galvánicos, termoelementos, etc.

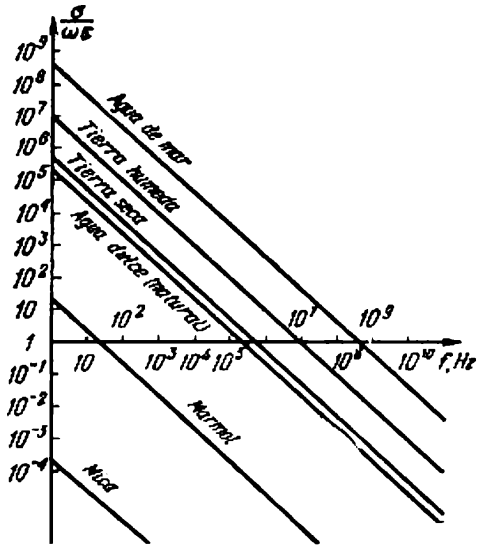


Fig. 6.2.

[1] En el § 28 se examinan las condiciones, para las que en las ecuaciones de electrodinámica se introducen de antemano corrientes y campos prefijados; los campos, directa o indirectamente, reflejan la acción de las fuerzas exteriores.

La descripción de las fuerzas exteriores se reduce a la variación de la forma de la ecuación (6.6). En este caso, hacemos uso de una de las siguientes formalizaciones:

$$j = \sigma (E + E^{ex}), \tag{6.11}$$

$$j = \sigma E + j^{ex}. \tag{6.11a}$$

En el primer caso se ha introducido la función E^{ex} que se denomina *intensidad de las fuerzas exteriores* (o brevemente, "intensidad exterior") y en el segundo, la *densidad de la corriente exterior* j^{ex}. Si se sobrentiende que $j^{ex} = \sigma E^{ex}$, podemos considerar que las (6.11) y (6.11a) son equivalentes. Sin embargo, como veremos más adelante, las condiciones de su empleo son diferentes.

§ 7. Campos en superficies de separación de los medios. Condiciones límites

1. **Observaciones preliminares.** Las superficies de los cuerpos físicos son límites que dividen medios con diferentes propiedades. Nuestra tarea va a consistir en el estudio de los campos que se encuentran inmediatamente junto a tales superficies y por las que, al pasar, los parámetros ε, μ y σ de los medios experimentan, posiblemente, un salto. Lo más sencillo es considerar que este salto es ideal, es decir, suponer que ε, μ y σ son funciones discontinuas de la normal a la superficie de separación. Podríamos, naturalmente, admitir que la superficie de separación entre los medios no es ostensible, sino que hay una finísima capa intermedia, en cuyo interior, las propiedades del medio varían suavemente. Pero el estudio de tal clase de capas en electrodinámica macroscópica sería un hecho inconsecuente (pág. 17).

El empleo de las ecuaciones diferenciales de Maxwell (2.1), (2.2), (3.1) y (3.2) en los puntos de la superficie de separación de los medios es dificultoso[1]. Por el contrario, según su carácter matemático sus análogas integrales (2.4), (2.8), (3.4) y (3.5) pueden aplicarse a las regiones (S y V) que contienen en su interior superficies de separación en las que los vectores del campo sufren discontinuidad. Estas ecuaciones serán utilizadas para el estudio de los campos en las superficies de separación de los medios.

2. **Componentes normales de los vectores del campo.** Primeramente, investiguemos la conducta de las componentes de los vectores del campo normales a la superficie de separación de los medios.

---

[1] Se pueden efectuar tales generalizaciones de las operaciones diferenciales rot y div que al verificar el estudio habrá que introducir funciones vectoriales con discontinuidad de ciertas componentes.

Supongamos que la superficie S (fig. 7.1) divide los medios *1* y *2* (todas las magnitudes relacionadas con ellos tendrán los índices 1 y 2). Escojamos en S un elemento suficientemente pequeño ΔS y en él, construyamos un cilindro elemental de altura Δh y que se encuentra situado en los dos medios. "Suficientemente pequeño", significa que ΔS puede considerarse como elemento del plano y el campo vecino que lo rodea, es homogéneo (invariable) a lo largo de la superficie de separación en los dos campos.

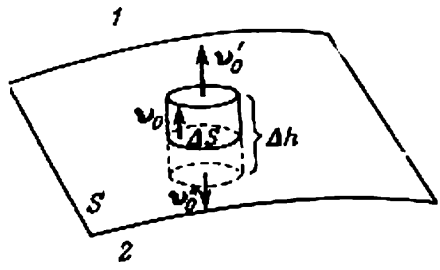


Fig. 7.1.

En el caso general, la superficie S de separación de los medios puede portar una carga. De hecho, se trata de una carga que se dispone en ella en forma de finísima capa (este caso, como veremos más adelante, es muy interesante). Sin embargo, de acuerdo con el concepto general sobre la superficie idealizada de separación de los medios, o sea, la falta de capa de transición, supondremos que la carga no ocupa un volumen sino que está concentrada en la propia superficie S; entonces la magnitud

$$\xi = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \tag{7.1}$$

donde Δq es la carga del elemento de superficie ΔS, y tiene el sentido de la *densidad de la carga superficial*. Señalemos que en todos los puntos en los que hay carga superficial ($\xi \neq 0$) y, en virtud de la (1.6), $\rho \to \infty$; pero la densidad ρ, en virtud de (S2.7), puede ser representada mediante la función delta.

Con objeto de estudiar la conducta de la inducción eléctrica $\boldsymbol{D}$ en la superficie S, apliquemos al volumen cilíndrico construido el teorema de Gauss (3.4). A causa de la homogeneidad del campo, el flujo del vector $\boldsymbol{D}$ que pasa por las bases superior e inferior del cilindro, se determina simplemente multiplicando el producto escalar de dicho vector y la normal unitaria (ν_0' o, respectivamente, ν_0'') por el área de la sección transversal del cilindro ΔS, mientras que la carga en el interior del cilindro es igual, en el caso general, a la suma de la carga q en su volumen y la carga en la superficie de separación de los medios $\xi \Delta S$. Por esta razón, de acuerdo con la (3.4), se obtiene que

$$\boldsymbol{D}_1 \nu_0' \Delta S + \boldsymbol{D}_2 \nu_0'' \Delta S + \Phi_{lat}^{\xi} = q + \xi \Delta S,$$

siendo designado por Φ_{lat}^{ξ} el flujo de la inducción $\boldsymbol{D}$ a través de la superficie lateral del cilindro.

Disminuyamos infinitamente la altura Δh del cilindro de tal modo que en su límite, para $\Delta h \to 0$, sus bases coincidan con el elemento de la superficie de separación ΔS; ya que junto con Δh tiende a cero la superficie lateral y el volumen del cilindro, en

la anterior igualdad desaparecerán Φ^{f}_{lat} y q. Sustituyamos

$$\nu_0' = \nu_0, \quad \nu_0'' = -\nu_0,$$

siendo ν_0 el vector unitario de la normal a la superficie de separación, dirigido hacia el primer medio. Seguidamente, dividiendo todos los miembros de la igualdad por ΔS, obtenemos que

$$(D_1 - D_2)\,\nu_0 = \xi, \tag{7.2}$$

o bien

$$D_{\nu 1} - D_{\nu 2} = \xi. \tag{7.2a}$$

Esto es el resultado definitivo de las operaciones realizadas que muestra que la componente normal D_ν del vector de inducción eléctrica en la superficie de separación de los medios sufre discontinuidad y la magnitud del salto es igual a la densidad de la carga superficial ξ. Si la superficie no está cargada, la componente normal de la inducción es continua:

$$D_{\nu 1} = D_{\nu 2} \quad (\xi = 0). \tag{7.3}$$

Las fórmulas (7.2), (7.2a) y (7.3) pueden escribirse fácilmente respecto a la intensidad del campo eléctrico E, sustituyendo con ayuda de la (5.6), D_1 por $\varepsilon_1 E_1$ y D_2 por $\varepsilon_2 E_2$. Para la anisotropia, en lugar de la (5.6), como ya sabemos, hay que hacer uso de la correlación (5.13).

Pasemos al vector de inducción magnética B. Retornando a la construcción realizada (fig. 7.1), aplicaremos en vez del teorema de Gauss (3.4) la ecuación (3.5), muy parecida a él. Ya que formalmente los primeros miembros de estas dos igualdades son idénticos, las operaciones realizadas anteriormente se repiten y tenemos

$$B_1 \nu_0' \Delta S + B_2 \nu_0'' \Delta S + \Phi^{m}_{lat} = 0,$$

siendo Φ^{m}_{lat} el flujo de la inducción magnética B a través de la superficie lateral del cilindro. Luego, si $\Delta h \to 0$, obtenemos un resultado semejante a la (7.2):

$$(B_1 - B_2)\,\nu_0 = 0, \tag{7.4}$$

o bien

$$B_{\nu 1} = B_{\nu 2}. \tag{7.4a}$$

Así, la componente normal B_ν del vector de inducción magnética en la superficie de separación de los medios es continua. Las fórmulas (7.4) y (7.4a) se pueden escribir fácilmente respecto a H con ayuda de la correlación (5.7) (y si es necesario, mediante la (5.14)).

Finalmente, señalemos el siguiente hecho. El vector de densidad de corriente total $j + \frac{\partial D}{\partial t}$ está supeditado a la correlación (2.12) que es absolutamente igual a la (3.5) que acabamos de emplear y que contiene el vector B. Esto significa que todos los cálculos

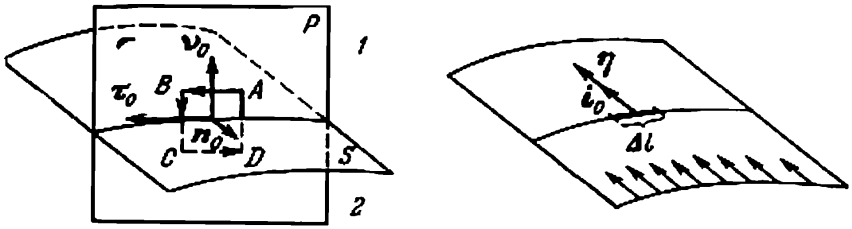
efectuados son también justos para el vector de densidad de corriente total. Por esta razón, podemos escribir directamente la siguiente igualdad:

$$\left(\boldsymbol{j}_1+\frac{\partial \boldsymbol{D}_1}{\partial t}\right)\boldsymbol{\nu}_0-\left(\boldsymbol{j}_2+\frac{\partial \boldsymbol{D}_2}{\partial t}\right)\boldsymbol{\nu}_0=0, \tag{7.5}$$

semejante a la (7.4). La anterior igualdad nos muestra que la componente normal de la densidad de corriente total en la superficie de separación de los medios es continua. En caso particular, para los procesos invariables respecto al tiempo ($\partial/\partial t=0$), la componente normal de la densidad de corriente de conducción es continua

$$j_{\nu 1}=j_{\nu 2}. \tag{7.6}$$

3. Componentes tangenciales de los vectores del campo. Con objeto de estudiar la conducta de las componentes de los vectores del campo tangenciales a la superficie de separación, realizaremos otra construcción. Intersequemos la superficie de separación S de



a b

Fig. 7.2.

los medios con el plano P (fig. 7.2, a) que puede considerarse perpendicular al elemento escogido de la superficie S (el elemento ΔS no se muestra en la figura). Tomemos en el plano P un contorno rectangular $L=ABCD$ que interseca la superficie de separación sin salir de los límites del indicado elemento ΔS. Además, $AB=CD=\Delta l$ y $BC=AD=\Delta h$; el lado lateral del contorno es paralelo a la normal de la superficie de separación $\boldsymbol{\nu}_0$. El vector unitario que coincide con la línea de intersección del plano P y la superficie S (en los límites de la construcción realizada) lo designaremos por $\boldsymbol{\tau}_0$. Su dirección se elige de forma que se satisfaga la correlación $\boldsymbol{\tau}_0=[\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{\nu}_0]$, siendo $\boldsymbol{n}_0$ un vector unitario de la normal a P que forma un sistema dextrógiro con la dirección del recorrido del contorno L.

Para investigar la conducta del vector de intensidad del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, al contorno L aplicamos la ecuación (2.4). Y como la región del espacio a examinar es muy pequeña, obtenemos un resultado de forma sencilla

$$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{\tau}_0\Delta l-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{\tau}_0\Delta l+C^{e}_{\text{lat}}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\boldsymbol{n}_0\Delta l\Delta h,$$

en el que (a la izquierda del signo de igualdad) la circulación del vector $\boldsymbol{E}$ por el contorno L está dividida en tres términos: los dos primeros términos corresponden a los lados AB y CD del contorno, mientras que el tercero expresa la parte de los lados laterales.

Disminuyamos infinitamente la altura Δh del contorno de forma que sus lados AB y CD coincidan en la superficie de separación. En tal caso, el segundo miembro de la anterior igualdad, así como C^{e}_{lat}, desaparecen y obtenemos

$$(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2)\,\tau_0 = 0, \tag{7.7}$$

o bien

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \tag{7.7a}$$

Señalemos que la orientación de la dirección tangencial escogida (vector τ_0) en la superficie de separación es arbitraria respecto al campo que consideramos. Por tal razón, en las fórmulas (7.7) y (7.7a) es justo suponer que E_τ es la *proyección* del vector $\boldsymbol{E}$ en S. Como nos lo indica el resultado obtenido, esta componente tangencial del vector de intensidad del campo eléctrico en la superficie de separación de los medios es continua.

Es evidentemente imposible que el sentido de las proyecciones de $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$ en S no coincidan (en tal caso, nuestra deducción sería injusta): efectivamente, la igualdad (7.7) no se cumpliría para ningún valor de τ_0. Es más, podemos examinar este problema de forma puramente formal. Como $\tau_0 = [\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{\nu}_0]$, escribimos en lugar de la (7.7)

$$(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2)\,[\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{\nu}_0] = [\boldsymbol{\nu}_0, (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2)]\,\boldsymbol{n}_0 = 0,$$

pero como esta igualdad no debe depender de la dirección del vector $\boldsymbol{n}_0$ que nos indica la orientación del contorno L en la superficie S, obtenemos la siguiente forma de la condición hallada anteriormente:

$$[\boldsymbol{\nu}_0, (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2)] = 0. \tag{7.7b}$$

Su conveniencia consiste en que a distinción de τ_0, la dirección del vector $\boldsymbol{\nu}_0$ en la superficie S es en todos los puntos corrientes enteramente determinada (sin exclusión, por ejemplo, de los puntos que pertenecen a las líneas de deformación de la superficie).

Pasemos a examinar la intensidad del campo magnético $\boldsymbol{H}$. Aplicando la ecuación (2.8), para el contorno L (fig. 7.2, *a*) escribimos una igualdad análoga a la obtenida anteriormente al estudiar el vector $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{H}_1\tau_0\Delta l - \boldsymbol{H}_2\tau_0\Delta l + C^{m}_{lat} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\right)\boldsymbol{n}_0\Delta l\Delta h.$$

Suponiendo que la densidad de corriente total $\partial \boldsymbol{D}/\partial t + \boldsymbol{j}$ es una magnitud limitada (no infinita), como resultado de una transición límite cuando $\Delta h \to 0$, determinamos que

$$(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)\,\tau_0 = 0 \tag{7.8}$$

o bien

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}, \tag{7.8a}$$

y también

$$[\mathbf{v}_0, (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)] = 0 \tag{7.8b}$$

(no mostramos los cálculos intermedios ya que formalmente no se distinguen de los anteriores). Así, cuando la densidad de corriente es limitada, la componente tangencial del vector de intensidad del campo magnético, como E_τ, es continua en la superficie de separación de los medios.

4. Caso de corriente superficial. Sin embargo, hay un caso particular, cuando no puede aplicarse la anterior deducción sobre la continuidad de la componente tangencial del vector $\boldsymbol{H}$. Supongamos que en la superficie de separación de los medios hay *corriente superficial*, es decir, una corriente que pasa por la superficie S sin ocupar volumen. La densidad de corriente superficial es la magnitud

$$\eta = \lim_{\Delta l \to 0} \boldsymbol{l}_0 \frac{\Delta I}{\Delta l}, \tag{7.9}$$

siendo (fig. 7.2, *b*) $\boldsymbol{l}_0$ el vector unitario que indica el sentido de transporte de las cargas; Δl, el elemento de la línea perpendicular a $\boldsymbol{l}_0$ que se interseca por la corriente ΔI. El concepto de corriente superficial es una útil abstracción de la que extensamente se hace uso en la teoría del electromagnetismo.

Retornemos al estudio de la conducta del vector $\boldsymbol{H}$ en la superficie de separación de los medios. Como en los puntos de dicha superficie $\eta \neq 0$, allí $j \to \infty$ (compárense las fórmulas (7.9) y (1.7)) y, por lo tanto, en las operaciones efectuadas en el punto 3, hay que verificar ciertos cambios [1]. En el segundo miembro de la igualdad que precede a la fórmula (7.8), tenemos ahora el término

$$\int_{\Delta l \Delta h} \boldsymbol{j} d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_0 \Delta l \int_{-\Delta h/2}^{\Delta h/2} \boldsymbol{j} dh \qquad (h = 0 \text{ en } S),$$

que, para $\Delta h \to 0$ no desaparece. Al tender el contorno L hacia el segmento Δl en la superficie de separación S (fig. 7.2, *a*), la expresión escrita anteriormente se reduce a cero, ya que por dicho segmento pasa la corriente superficial. Al mismo tiempo

$$\boldsymbol{n}_0 \Delta l \int_{-\Delta h/2}^{\Delta h/2} \boldsymbol{j} dh = \eta \boldsymbol{n}_0 \Delta l$$

y, por consiguiente, en lugar del anterior resultado (7.8), se obtiene

$$(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)\tau_0 = \eta \boldsymbol{n}_0 \tag{7.10}$$

---

[1] La densidad $\boldsymbol{j}$ puede ser expresada por medio de la δ-función según la (S2.8).

o bien

$$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = \eta_{n0} \tag{7.10a}$$

y, a continuación,

$$[\nu_0, (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)] = \eta. \tag{7.10b}$$

Si el contorno L está orientado de forma que τ_0 coincide con el sentido de la proyección del vector $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2$ en la superficie ΔS, el primer miembro de la (7.10) adquirirá su valor máximo y junto con ella, el segundo: $\eta n_0 = \eta$; de aquí es fácil deducir que los vectores $\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2$ y η son mutuamente perpendiculares. De la (7.10b) esto resulta de modo formal.

Así, de acuerdo con el resultado obtenido, la componente tangencial de intensidad del campo magnético es discontinua cuando en la superficie de separación hay corriente superficial.

5. **Condiciones límites.** Hagamos cierto resumen. El empleo de las ecuaciones de Maxwell en su forma integral nos ha permitido establecer una serie de correlaciones a las que se someten las componentes normales y tangenciales de los vectores del campo en las superficies de separación de los medios. Siguiendo las tradiciones, denominaremos dichas correlaciones *condiciones límites*. Evidentemente, su conjunto se reduce al siguiente sistema de igualdades:

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2)\,\nu_0 &= \xi, \\ (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2)\,\nu_0 &= 0, \\ [\nu_0, (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2)] &= 0, \\ [\nu_0, (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)] &= \eta \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

(por ejemplo, la (7.8b) es la forma particular de la (7.10b) si $\eta = 0$).

Es importante que gracias a las condiciones límites, disponemos de cierta información sobre el carácter del campo en una u otra superficie de separación de los medios, *aún no sabiendo nada* sobre el propio campo en los medios. Tal información nos es necesaria para hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Maxwell que definen dicho campo. En otras palabras, cuando se plantea cualquier problema de la teoría del electromagnetismo, las condiciones límites en la superficie prefijada del cuerpo que se considera que reflejan sus propiedades, nos dan la información concreta sobre el problema, necesaria para obtener una resolución determinada de las ecuaciones generales de la teoría del electromagnetismo. Pero hay que tomar en consideración que además de las condiciones límites ya estudiadas que se deducen de las ecuaciones de Maxwell, deben utilizarse las condiciones límites independientes. Dejando, por ahora, a un lado esta cuestión, señalemos solamente que las condiciones límites independientes pueden expresar la causa de la existencia del campo.

A partir del segundo capítulo, examinaremos múltiples problemas con condiciones límites prefijadas para determinadas superficies. Pero ya aquí podemos dar ciertas ilustraciones que nos mostrarán qué datos sobre los campos nos ofrecen las condiciones límites.

§ 8. Ejemplos de empleo de las condiciones límites

1. Superficie de separación de pantalla. Supongamos que la superficie S que separa los medios *1* y *2* tiene la propiedad de "apantallar" el campo, es decir, éste puede existir en uno de los medios (digamos en el *1*) sin penetrar al otro (medio *2*). Ya que en tal caso $E_2 = 0$ y, por esta razón, $E_{\tau 2} = 0$, de las condiciones de la (7.7a), deducimos directamente que:

$$E_{\tau 1} = 0, \tag{8.1}$$

o sea, el campo en el medio *1* está exento de la componente tangencial: de este modo, el campo es normal a la superficie de

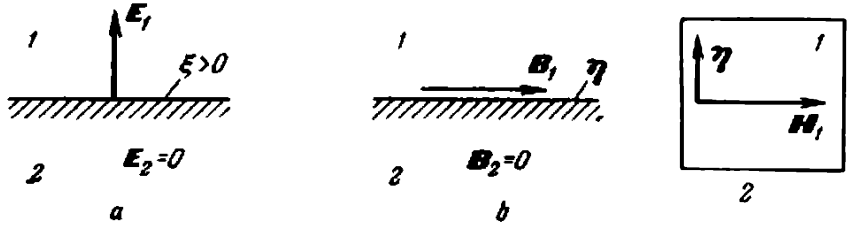


Fig. 8.1.

separación (fig. 8.1, *a*). Recurramos inmediatamente a la condición límite para las componentes normales (7.2a). Como en el medio *2* no hay campo: $D_{\nu 2} = 0$. De aquí

$$D_1 = D_{\nu 1} = \xi, \tag{8.2}$$

y si el primer medio es isótropo, $D_{\nu 1}$ puede sustituirse por $\varepsilon_1 E_{\nu 1}$, es decir,

$$E_1 = E_{\nu 1} = \frac{\xi}{\varepsilon_1}. \tag{8.3}$$

Así, en la superficie de separación de pantalla debe disponerse obligatoriamente una carga superficial, cuya densidad determina el campo existente. Si no hubiera tal carga ($\xi = 0$), entonces, como se deduce de la (8.2), en el medio *1* no habría componente normal $D_{\nu 1}$, lo que junto con la condición (8.1) significaría que en la superficie de separación no hay campo.

Continuando el estudio de la superficie de separación de pantalla, tomemos la condición (7.4a). Como en el medio *2* no hay campo, el segundo miembro debe ser igual a cero y, por esto,

$$B_{\nu 1} = 0, \tag{8.4}$$

es decir, el campo, en el medio *1*, resulta ser *tangente* a la superficie de separación (fig. 8.1, *b*), de lo que se deduce que $H_{v1}=0$ (cuando el medio es isótropo). Supongamos que en la superficie de separación de pantalla no hay corriente superficial ($\eta=0$). En tal caso, partiendo de que en el segundo medio no hay campo ($H_{\tau 2}=0$) resulta que $H_{\tau 1}=0$ y queda llegar a la conclusión de que en la superficie de separación no hay campo magnético alguno. Pero el campo existirá si hay corriente superficial. Efectivamente, teniendo en cuenta que en el segundo medio no hay campo, de las fórmulas (7.10a) y (7.10b) obtenemos

$$H_1 = H_{\tau 1} = \eta \tag{8.5a}$$

y

$$[\mathbf{v}_0,\ \boldsymbol{H}_1] = \eta \tag{8.5b}$$

(en la (8.5a) suponemos que $H_{\tau 1}$ es la proyección de $\boldsymbol{H}_1$ en ΔS); los vectores $\boldsymbol{H}_1$ y η son perpendiculares entre sí. Para un medio isótropo, también podemos escribir

$$B_1 = B_{\tau 1} = \mu_1 \eta \tag{8.6a}$$

y

$$[\mathbf{v}_0,\ \boldsymbol{B}_1] = \mu_1 \eta. \tag{8.6b}$$

Pues, si existiendo una superficie de separación de pantallas, hay campo electromagnético en uno de los medios separados, el vector $\boldsymbol{D}$ es normal a la superficie de separación, mientras que el vector $\boldsymbol{H}$ es tangente a ella y sus valores límites se determinan por la carga y corriente superficiales.

2. Refracción de las líneas de fuerza eléctricas y magnéticas. Consideremos un campo en la superficie de separación de dos dieléctricos isótropos cuando no hay carga superficial, así como carga en el volumen. Además, las líneas del vector $\boldsymbol{D}$ son continuas (§ 3), y si están trazadas hasta el límite de uno de los medios, se puede indicar fácilmente el sentido por el que cada una de las líneas continuará en el otro medio. Efectivamente, de acuerdo con la (7.3), las componentes normales del vector $\boldsymbol{D}$ por ambos lados de la superficie de separación son iguales, y de la (7.7a) se obtiene la relación de las tangenciales:

$$\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}. \tag{8.7}$$

La relación entre las componentes normal y tangencial es la tangente del ángulo de inclinación del vector respecto a la superficie de separación:

$$\frac{D_{v1}}{D_{\tau 1}} = \operatorname{tg}\alpha_1 \quad \text{y} \quad \frac{D_{v2}}{D_{\tau 2}} = \operatorname{tg}\alpha_2. \tag{8.8}$$

Basándonos en la (8.8) y teniendo en cuenta las (7.3) y (8.7), obtenemos

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}, \tag{8.9}$$

es decir, en la superficie de separación de los medios se produce la "refracción" de las líneas del vector $\boldsymbol{D}$ situadas en un plano que pasa por la normal a dicha superficie. Esto se muestra en la fig. 8.2, *a* en la que, para mayor precisión, han sido escogidos $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 (D_{\nu 1} = D_{\nu 2},\ D_{\tau 1} < D_{\tau 2})$.

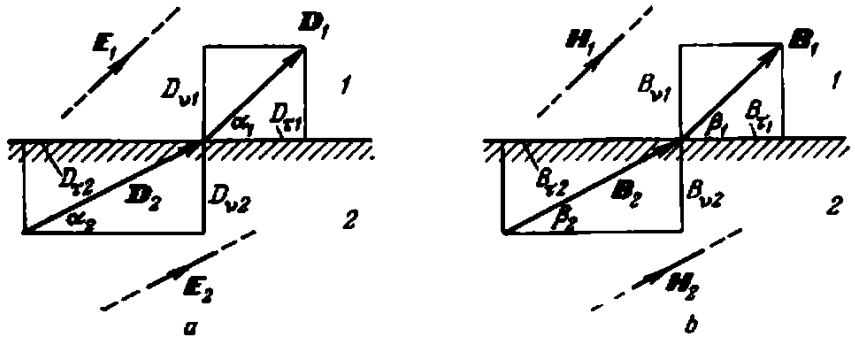


Fig. 8.2.

Como el medio es isótropo, entonces, cuando $\varepsilon > 0$, los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{D}$ son paralelos; de este modo, las líneas del vector $\boldsymbol{E}$ se refractan de la misma manera que las del vector $\boldsymbol{D}$ (lo que se expone en la fig. 8.2, *a*). A la fórmula (8.9) podríamos llegar considerando el vector $\boldsymbol{E}$ y partiendo, respectivamente, de las fórmulas (7.7a) y (7.3).

Las líneas del vector $\boldsymbol{B}$ (líneas de fuerza magnéticas) son siempre continuas y los anteriores razonamientos siguen, evidentemente, siendo justos. Empleando como complemento de la (7.4a) la correlación

$$\frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}, \tag{8.10}$$

que se desprende de la (7.8a) (si no hay corriente superficial), puede ser confeccionado un cuadro de la refracción de las líneas en la superficie de separación de los medios semejante al examinado más arriba (fig. 8.2, *b*). Si, como antes, designamos

$$\frac{B_{\nu 1}}{B_{\tau 1}} = \operatorname{tg} \beta_1 \quad \text{y} \quad \frac{B_{\nu 2}}{B_{\tau 2}} = \operatorname{tg} \beta_2, \tag{8.11}$$

obtenemos la fórmula

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}, \tag{8.12}$$

parecida a la (8.9).

Para isotropía, las líneas del vector $\boldsymbol{H}$ son paralelas a las del vector $\boldsymbol{B}$ (la permeabilidad magnética es positiva). Por esta razón, la fórmula (8.12) también caracteriza la refracción de las líneas del vector $\boldsymbol{H}$. Dicha fórmula podría haber sido obtenida partiendo de la (7.8a) y de la correlación que se desprende de la (7.4a), en la que figura la intensidad del campo.

Si $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 (\mu_2 > \mu_1)$, el cuadro de la refracción de las líneas de inducción tiene el aspecto representado en la fig. 8.3, *a*, mientras que si $\varepsilon_2 < \varepsilon_1 (\mu_2 < \mu_1)$, como se muestra en la fig. 8.3, *b*. En el primer caso, $D_2 > D_1 (B_2 > B_1)$ y las líneas de fuerza en el segundo medio se condensan, en tanto que en el segundo caso, cuando $D_2 < D_1 (B_2 < B_1)$, se dispersan.

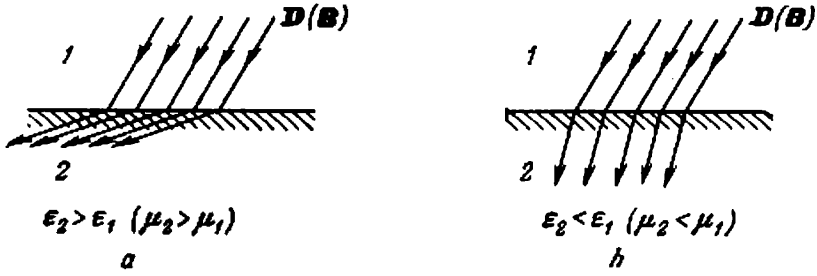


Fig. 8.3.

Para las intensidades $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ del campo, los cuadros de las líneas de fuerza confeccionados anteriormente no son válidos: aunque los ángulos de refracción quedan invariables, en el caso dado, al pasar por la superficie de separación, el número de líneas no se conserva. Efectivamente, escribamos, por ejemplo, la ecuación (3.2) respecto a $\boldsymbol{H}$:

$$\operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} = 0$$

y supongamos, primeramente, que μ queda siendo en la superficie de separación una función lisa, pasando de μ_1 a μ_2 en una capa muy fina. Aplicando la identidad (S1.30), obtenemos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mu} \boldsymbol{H} \operatorname{grad} \mu.$$

La permeabilidad magnética es constante y el $\operatorname{grad} \mu = 0$ en todo lugar, salvo en la capa de transición en cuyo interior, por consiguiente, $\operatorname{div} \boldsymbol{H} \neq 0$, es decir, se encuentran los manantiales vertederos de las líneas del vector $\boldsymbol{H}$. Al efectuarse en la superficie de separación una variación a saltos de μ, en S $\operatorname{grad} \mu \to \infty$, lo que corresponde a la distribución superficial de los manantiales vertederos de las líneas de $\boldsymbol{H}$ (compárese la correlación para ξ y ρ en el § 7, punto 2).

3. Rendijas estrechas. Por fin, consideremos el ejemplo siguiente. En un medio dieléctrico hay un campo caracterizado por el vector $\boldsymbol{E}$. Si perpendicularmente a $\boldsymbol{E}$ se corta una rendija estrecha (fig. 8.4, *a*), la intensidad del campo eléctrico en su interior será, en virtud de la (7.3), igual a

$$\boldsymbol{E}_\perp = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \boldsymbol{E}.$$

Si la rendija se corta en sentido paralelo a $\boldsymbol{E}$, entonces, debido a la continuidad de la componente tangencial, la intensidad en

el interior de la rendija quedará invariable:

$$E_{\parallel} = E.$$

Como vemos,

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}}, \tag{8.13}$$

es decir, la constante dieléctrica relativa del medio puede hallarse partiendo de dos medidas de E en el interior de las rendijas dispuestas en el medio. Claro está que los razonamientos efectuados

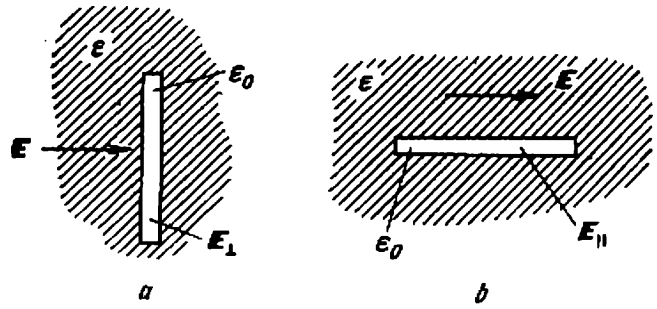


Fig. 8.4.

serán totalmente estrictos sólo para campos homogéneos y, por consiguiente, para rendijas infinitamente estiradas. Las cavidades de ranura reales, con una serie de precauciones, pueden ser realizadas de tal forma que la correlación (8.13) se observe con elevada precisión.

Cuando se determina la permeabilidad magnética del medio, en lugar de la (8.13), tendremos

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}}. \tag{8.14}$$

III. Energía del campo electromagnético

Cuando nos referimos a la realidad física del campo electromagnético, consideramos que éste está relacionado con la energía. Variando, el campo puede traspasar su energía a cualquier proceso no electromagnético, así como absorber energía. Los campos electromagnéticos pueden transportar la energía por el espacio.

Escojamos cierta región V; supongamos que en el momento t la energía del campo electromagnético es $W = W(t)$. En este caso puede resultar que

$$\frac{dW}{dt} < 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{dW}{dt} > 0.$$

La primera expresión significa que la energía del campo en V disminuye. La causa de la disminución de W puede consistir en la absorción de la energía en el medio, o bien, en su consumo para una carga útil. En los casos indicados, la energía del campo se convierte en otras formas (por ejemplo, irreversiblemente se convierte en calor); la causa puede también ser la emisión de energía al medio circundante. A su vez, el incremento de la energía en V ($dW/dt > 0$) puede estar relacionado con la acción de los manantiales (generación), procesos regenerativos en el medio o bien, por la afluencia de energía del exterior.

Indiquemos una vez más, que aunque el campo electromagnético, en ciertos casos, actúa directamente en los órganos sensitivos del hombre (la luz, el calor), la información científica principal sobre el campo se obtiene estudiando las conversiones de la energía del campo a otras formas. Podemos considerar que el principio de investigaciones de tal clase tuvo su comienzo al observar las conversiones electromecánicas; en determinado momento esto nos permitió llegar a la comprensión de las funciones vectoriales $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$.

Las particularidades específicas de variadas transformaciones de energía (por ejemplo, electroquímicas, fotoeléctricas, electromecánicas y otras muchas de las que se utilizan en la técnica), como es lógico, no se examinan en el curso de la teoría del electromagnetismo. El objeto del presente párrafo, es la descripción general del balance de la energía del campo, su distribución y movimiento. Simultáneamente, deberemos establecer la interacción entre las funciones vectoriales $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$ y las características energéticas de los procesos electromagnéticos.

§ 9. Absorción de energía y acción de los manantiales

1. Ley de Joule—Lenz. Como sobre la carga puntual q actúa una fuerza (véase (1.1))

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}]),$$

para la diferencial vectorial del camino $d\boldsymbol{l}$, la diferencial del trabajo tiene el aspecto

$$dA = \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{l} = q\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}$$

($d\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{v}$ son paralelos, de forma que $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}]\,d\boldsymbol{l} \equiv 0$; o sea, la fuerza de Lorentz no produce trabajo). De esta manera, la potencia determinada como un trabajo por la unidad de tiempo, será

$$P = \frac{dA}{dt} = q\boldsymbol{E}\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = q\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}. \qquad (9.1)$$

(se mide en *vatios*).

En calidad de q podemos tomar una región muy pequeña ΔV de distribución en el espacio de la carga; entonces, $q = \rho\Delta V$ y para

la potencia ΔP en el volumen ΔV, teniendo en cuenta la (6.3) y partiendo de (9.1), obtenemos

$$\Delta P = \boldsymbol{jE}\,\Delta V. \tag{9.2}$$

Por esta razón, la magnitud

$$p = \boldsymbol{jE} \tag{9.3}$$

expresa, precisamente, la *densidad de la potencia* en el volumen:

$$p = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} \tag{9.4}$$

(compárense con la determinación de la densidad de la carga en el § 1, punto 2). La densidad de la potencia p se mide en *vatios por metro cúbico* [W/m³].

No habiendo fuerzas exteriores, transcurre el consumo de la energía del campo, en particular, se producen las llamadas "pérdidas térmicas". Señalando este hecho, introducimos el índice "d" y, empleando la correlación (6.6), damos a la igualdad (9.3) la forma siguiente:

$$p_d = \boldsymbol{jE} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}. \tag{9.5}$$

Para hallar la *potencia de pérdidas* (o disipada) P_d en cierto volumen V, es suficiente integrar la densidad p_d (9.5) respecto al volumen V:

$$P_d = \int_V \boldsymbol{jE}\,dv = \int_V \sigma E^2 dV = \int_V \frac{j^2}{\sigma}\,dv. \tag{9.6}$$

Fácilmente podemos cerciorarnos de que la esencia física de las igualdades (9.5), (9.6) concuerda con la conocida *ley de Joule—Lenz*. Efectivamente, aplicando la (9.6) a la región cilíndrica representada en la fig. 6.1, *a*, se obtiene que

$$P_d = \int_l \int_S \boldsymbol{jE}\,dl\,ds = El \cdot jS = UI \tag{9.7}$$

(empleamos las designaciones del § 6, punto 2), lo que es la enunciación de la ley de Joule—Lenz para el sector de un conductor.

2 **Fuerzas exteriores.** Si en la región V actúan fuerzas exteriores, la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ en cualquier punto arbitrario de dicha región puede ser expresada partiendo de las igualdades (6.11) o bien (6.11a). Sea

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{ex}), \quad \text{o bien} \quad \boldsymbol{j} = \begin{cases} \sigma \boldsymbol{E} & \text{en } V - V_\Sigma, \\ \boldsymbol{j}^{ex} & \text{en } V_\Sigma. \end{cases}$$

En el primer caso en V se introduce un campo exterior (intensidad $\boldsymbol{E}^{ex}$), y en el segundo, en el interior de V está ubicada una "región del manantial" V_Σ en la que se preestablece una corriente exterior (densidad de corriente $\boldsymbol{j}^{ex}$). En virtud de esto, represen-

tamos la igualdad (9.3) en el siguiente aspecto:

$$p = \frac{j^2}{\sigma} - jE^{ex}, \quad \text{o bien} \quad p = \sigma E^2 + j^{ex}E. \tag{9.8}$$

La primera correlación se ha obtenido poniendo en la (9.3) la expresión $E = \frac{j}{\sigma} - E^{ex}$ que se desprende de a (6.11), la segunda, poniendo en la (9.3) la expresión de la densidad de corriente j representada en la (6.11a). En ambos casos se tiene que

$$p = p_d + p^{ex}. \tag{9.8a}$$

Aquí, la densidad de potencia p está dividida en dos partes, una de las cuales corresponde a las pérdidas de energía, y la segunda, a la acción de las fuerzas exteriores. Ya que $\sigma > 0$, también $p_d > 0$; hay, sin embargo, casos particulares en los que se estudian medios con conductibilidad negativa ($\sigma < 0$), pero en tales casos la magnitud negativa p_d caracteriza no las pérdidas, sino la generación (regeneración) de la energía en el medio. La magnitud p^{ex} es negativa si, como siempre, las fuerzas exteriores proporcionan trabajo "contra las fuerzas del campo" y se produce la transformación de la energía del proceso excitador en energía del campo electromagnético.

Integrando la (9.8) respecto a V, hallamos la potencia total en el volumen a examinar para las fuerzas exteriores:

$$\left.\begin{aligned} P &= \int_V \frac{j^2}{\sigma}\, dv - \int_V jE^{ex}\, dv, \\ \text{o bien} \qquad P &= \int_{V-V_\Sigma} \sigma E^2\, dv + \int_{V_\Sigma} j^{ex} E\, dv, \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

es decir,

$$P = P_d + P^{ex}, \tag{9.9a}$$

siendo P_d la potencia de pérdidas que se determina por la ley de Joule—Lenz en la forma (9.6), y

$$P^{ex} = -\int_V jE^{ex}\, dv, \quad \text{o bien} \quad P^{ex} = \int_{V_\Sigma} j^{ex} E\, dv = \int_V j^{ex} E\, dv. \tag{9.10}$$

La última magnitud se denomina *potencia de fuerzas exteriores* en el volumen V.

Si la potencia P es positiva, podemos decir que la región V, en su total, absorbe la energía del campo electromagnético. Si por el contrario, como resultado de la acción de las fuerzas exteriores, el incremento de la energía del campo supera su consumo durante un mismo intervalo de tiempo, la potencia P es negativa y la región V, en su total, actúa como *manantial de energía.*

§ 10. Ecuación de balance de energía

1. Deducción de la ecuación de balance de energía. Tomemos la primera ecuación de Maxwell (2.1) y multiplicando todos sus miembros y términos por $\boldsymbol{E}$, se escribe:

$$\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{jE}. \tag{10.1}$$

Como $\boldsymbol{jE}$ es la densidad de potencia, podemos esperar que los demás sumandos (que son magnitudes de igual dimensión) también tienen cierto sentido energético. Sin embargo, es preciso utilizar la segunda ecuación de Maxwell (2.2); después de multiplicar sus miembros y términos por $\boldsymbol{H}$, obtenemos

$$\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{10.2}$$

Intentando alcanzar una simplificación formal, unamos ambas igualdades de forma que pueda ser aplicada la identidad del análisis vectorial (S1.31). Evidentemente, con este objeto hay que sustraer los primeros y segundos miembros de (10.2) y (10.1), después de lo cual se tiene:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}] = -\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{jE}. \tag{10.3}$$

Como veremos más adelante, la ecuación obtenida expresa la característica local del balance de la energía del campo electromagnético.

Por otra parte, una forma integral más evidente del resultado obtenido, surge después de integrar todos los sumandos en (10.3) respecto a cierto volumen V y de aplicar al primer miembro el teorema de Ostrogradski—Gauss (S1.24). La forma integral tiene el aspecto

$$\oint_S [\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s} = -\int_V \left(\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) dv - \int_V \boldsymbol{jE}\,dv, \tag{10.4}$$

siendo S una superficie cerrada que limita la región de volumen V que consideramos. Nuestro más cercano objetivo será interpretar, por separado, el sentido de los miembros de la anterior igualdad.

Si suponemos que la polarización o imanación del medio (§ 5) transcurre sin consumo o desprendimiento de energía, es evidente que el último término del segundo miembro de (10.4), expresa la *potencia total* P en V:

$$P = \int_V \boldsymbol{jE}\,dv, \tag{10.5}$$

y caracteriza, en conjunto, todos los procesos de transformación de energía en el interior de la susodicha región. En esencia, con-

sideramos que estos procesos están relacionados con la corriente de conducción: cuando no hay dicha corriente ($j=0$) no se produce ninguna clase de transformaciones de energía ($P=0$). Tal representación física es, naturalmente, simplificada, pero en múltiples casos muy cercana a la realidad. Al mismo tiempo, la suposición que hemos hecho, nos permite analizar con facilidad la ecuación (10.4).

Para aclarar el sentido físico de la integral

$$\int_V \left(E\frac{\partial D}{\partial t} + H\frac{\partial B}{\partial t} \right) dv$$

consideramos un caso especial. Supongamos que en el interior de V con la superficie S linda una cubierta impermeable S' (pantalla) al campo (fig. 10.1). Además, la integral del primer miembro de la (10.4) es igual a cero, ya que en la superficie S no hay campo. Así, para la región V *energéticamente aislada*, la ecuación (10.4) toma el siguiente aspecto:

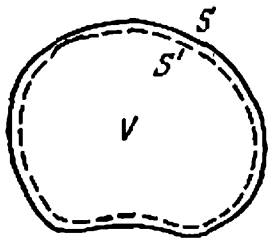


Fig. 10.1.

$$P = -\int_V \left(E\frac{\partial D}{\partial t} + H\frac{\partial B}{\partial t} \right) dv. \qquad (10.6)$$

Pero ya que la región V no se comunica con el medio exterior, la potencia P debe estar relacionada con la energía W en el interior de V mediante la siguiente correlación:

$$P = -\frac{dW}{dt}, \qquad (10.7)$$

que describe la acción de la ley de conservación de la energía: para $P>0$ (absorción) la reserva interior de la energía W se consume en la medida de lo necesario, mientras que siendo $P<0$ (generación), la energía crece. Comparando la (10.6) con la (10.7) nos convencemos de que la integral a investigar es igual a la derivada temporal de la energía W:

$$\int_V \left(E\frac{\partial D}{\partial t} + H\frac{\partial B}{\partial t} \right) dv = \frac{\partial W}{\partial t}. \qquad (10.8)$$

Retornemos al caso general (cuando no hay aislamiento energético) y consideremos toda la ecuación (10.4). Dando a la deducción (10.8) sentido universal, teniendo en cuenta la última igualdad y la (10.5), escribamos (10.4) en la forma siguiente:

$$\oint_S \Pi\, ds + \frac{dW}{dt} + P = 0, \qquad (10.9)$$

en donde se designa por

$$\Pi = [E, H]. \qquad (10.10)$$

La magnitud Π que hemos introducido es conocida como el *vector de Poynting* (se mide en *vatios por metro cuadrado*).

2. Flujo del vector de Poynting y balance de energía. Ahora no es dificultoso aclarar el sentido de la integral de superficie en la (10.4), que en la (10.9) pasa como el flujo del vector de Poynting a través de la superficie de separación S y, además, convencerse de que la ecuación escrita expresa el *balance de energía* en la región cerrada V.

La existencia del flujo del vector de Poynting

$$\oint_S \Pi \, ds \neq 0,$$

indica, por lo visto, la divergencia entre la región que se comunica con el espacio que la circunda, de la energéticamente aislada; la propia integral, que como los demás términos de la ecuación (10.9) tiene la misma dimensión que la potencia, caracteriza el intercambio de energía entre la región V y el medio exterior. Si en caso particular, el flujo del vector de Poynting es positivo, la suma de los otros dos términos de la (10.9) es negativa:

$$\oint_S \Pi \, ds > 0, \quad \frac{dW}{dt} + P < 0. \tag{10.11}$$

El sentido de las dos desigualdades escritas es evidente. El decrecimiento de la reserva de energía ($dW/dt < 0$) y los procesos de regeneración ($P < 0$) en el interior de V condicionan el paso de la energía por la superficie de separación S al medio exterior, teniendo en cuenta que, en virtud de la (10.9), el flujo del vector de Poynting es igual a la energía que sale de V por unidad de tiempo. Claro está, que al ser válidas las desigualdades (10.11) puede actuar uno de los indicados factores que, en tal caso, debe ser prevaleciente (por ejemplo, $dW/dt < 0$ si $P > 0$). La más sencilla variante es aquella, cuando la reserva de energía en el interior de V queda constante ($dW/dt = 0$), mientras que no hay absorción ($P_d = 0$); al mismo tiempo, en virtud de las (10.9) y (9.9a),

$$\oint_S \Pi \, ds = -P^{ex} \quad (P^{ex} < 0),$$

o sea, el flujo del vector de Poynting sólo se crea por fuerzas exteriores y es igual a la potencia de los manantiales que se encuentran en el interior de V. Podemos decir que las desigualdades (10.11) corresponden al "régimen de emisión" de la región V. Como sencillo ejemplo podemos indicar una antena emisora. Ella sola, o bien junto con cierta parte del espacio ambiente, puede ser considerada como una región V en "régimen de emisión".

Si el flujo del vector de Poynting es negativo, la suma de los términos restantes de la (10.9), será positiva:

$$\oint_S \Pi \, ds < 0, \quad \frac{dW}{dt} + P > 0. \tag{10.12}$$

El crecimiento de la reserva de energía ($dW/dt > 0$) y los procesos de absorción ($P > 0$) en el interior de V están relacionados con la afluencia de energía del exterior por la superficie S, mientras que el flujo del vector de Poynting, en virtud de la (10.9), tendrá una magnitud absoluta igual a la energía que afluye por unidad de tiempo. Al cumplirse las desigualdades (10.12) hablaremos del "régimen de absorción" de la región V. Supongamos, en particular, que la reserva de energía queda constante ($dW/dt = 0$) y que no hay fuerzas exteriores ($P^{ex} = 0$). Entonces, según las (10.9) y (9.9a),

$$\oint_S \Pi \, ds = -P_d \quad (P_d > 0),$$

y, por consiguiente, el flujo del vector de Poynting será, por su magnitud absoluta, igual a la potencia de los manantiales exteriores que se absorbe en el interior de V. Señalemos que el hecho de que el flujo del vector de Poynting es negativo en (10.12), es oportuno interpretar como la expresión del siguiente hecho: en relación a V, el espacio exterior juega el papel de "generador".

Así, pues, la magnitud absoluta del flujo del vector de Poynting a través de la superficie S acotada a examinar es siempre igual a la energía que por ella transcurre en una u otra dirección por unidad de tiempo, es decir, a la "velocidad de paso" de la energía por S; dicha magnitud, con dimensión de potencia, ha sido llamada *flujo de energía*. Este es positivo si la energía sale al medio exterior y negativo, si penetra a la región que se considera.

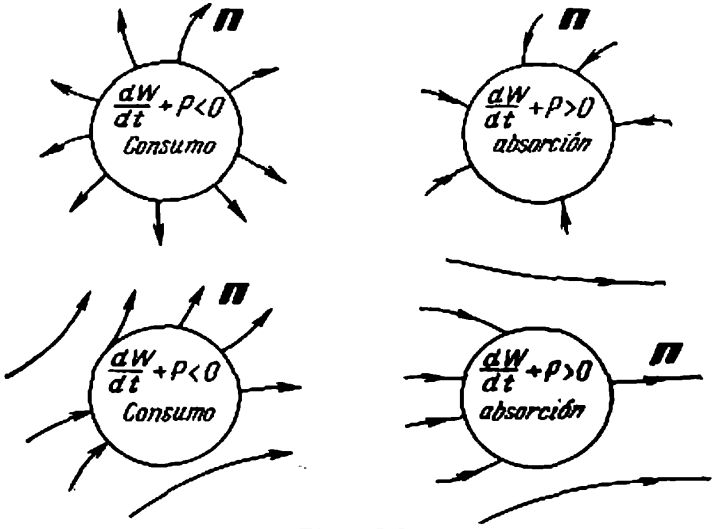


Fig. 10.2.

Queda, finalmente, marcar una circunstancia que, a primera vista, es formal: el flujo de energía se expresa por el *flujo del vector*. Recordemos que cuando el flujo del vector es positivo, sus líneas (predominante o totalmente) *salen* al exterior y cuando el flujo es

negativo, *entran* en el interior. De ese modo, las líneas salientes del vector de Poynting Π muestran la emisión de energía, mientras que las entrantes, su absorción; este hecho se explica en la fig. 10.2. La esencia física del vector de Poynting se tratará a continuación con más detalle.

§ 11. Energía del campo electromagnético, su localización y movimiento

1. Energías eléctrica y magnética. A base de lo expuesto anteriormente, podemos hallar la expresión de la energía de un campo electromagnético por medio de sus funciones vectoriales. Como resultado intermedio ya fue hallada la velocidad de variación de la energía del campo en el interior de la región del espacio a considerar; ahora, vamos a partir de la fórmula (10.8) ya obtenida.

Recordemos que ya hemos utilizado cierta suposición sobre la conducta del medio material y, concretamente, que los procesos de polarización e imanación transcurren sin transformación de la energía. Más adelante, al estudiar los campos electromagnéticos que varían periódicamente respecto al tiempo, esta limitación será levantada. Por el momento vamos a seguir considerando (sin examinar su relación con lo anteriormente estudiado) que la polarización e imanación son carentes de inercia, por lo que las permeabilidades ε y μ no dependen del tiempo. Aplicando las correlaciones (5.6) y (5.7), realicemos bajo el signo de la integral (10.8) las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= \boldsymbol{E}\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{ED}}{2}\right), \\ \boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= \boldsymbol{H}\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu \boldsymbol{H}^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{HB}}{2}\right) \end{aligned} \tag{11.1}$$

(idénticas operaciones pueden también ser realizadas para anisotropía). Es decir, la igualdad (10.8) toma el aspecto

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2}{2} + \frac{\mu \boldsymbol{H}^2}{2}\right) dv, \tag{11.2}$$

lo que a su vez nos da la base para la siguiente expresión de la energía del campo electromagnético en la región V:

$$W = \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2)\, dv = \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{ED} + \boldsymbol{HB})\, dv. \tag{11.3}$$

Se crea la representación que esta energía se distribuye en el espacio con una densidad

$$w = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}, \tag{11.4}$$

igual a

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{2}(ED + HB). \qquad (11.5)$$

La integral (11.3) se descompone en dos sumandos, uno de los cuales sólo depende del campo eléctrico y el otro, sólo del magnético:

$$W = W^e + W^m, \qquad (11.6)$$

siendo

$$W^e = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2\, dv = \frac{1}{2}\int_V ED\, dv \quad \text{y} \quad W^m = \frac{1}{2}\int_V \mu H^2\, dv = \frac{1}{2}\int_V HB\, dv.$$

Por esta razón, distinguimos la *energía eléctrica* W^e y la *energía magnética* W^m del campo electromagnético. De acuerdo con esto se interpreta la densidad de la energía w:

$$w = w^e + w^m, \qquad (11.7)$$

siendo

$$w^e = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} \quad \text{y} \quad w^m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{HB}{2}.$$

2. Balance local de energía e interpretación del vector de Poynting. Aquí, podemos de nuevo retornar a la ecuación (10.3) con objeto de aclarar su sentido. Aplicando las fórmulas (9.3), (10.10), (11.1) y (11.5), se tiene

$$\operatorname{div} \Pi + \frac{\partial w}{\partial t} + p = 0, \qquad (11.8)$$

es decir, la divergencia del vector de Poynting en cada punto del campo se equilibra por la velocidad de variación de la densidad de energía y por la densidad de potencia. Si en el entorno decrecientemente pequeño del punto que consideramos tiene lugar el "régimen de emisión", en dicho punto $\frac{\partial w}{\partial t} + p < 0$ y, en virtud de la (11.8), $\operatorname{div} \Pi > 0$, mientras que en el "régimen de absorción" $\frac{\partial w}{\partial t} + p > 0$ y, por consiguiente, $\operatorname{div} \Pi < 0$. Finalmente, cuando no hay cambios cuantitativos o transformaciones de energía o bien, cuando éstos se equilibran $\frac{\partial w}{\partial t} + p = 0$, así que $\operatorname{div} \Pi = 0$. Pues, en dependencia de si el punto dado es "manantial" o "vertedero" de las líneas del vector de Poynting, o bien no es ni lo uno ni lo otro, podemos juzgar sobre el carácter local del balance de energía.

¿Cuál es el sentido directo del vector Π? Para poder responder a esta pregunta partimos de la suposición de que el flujo Π por *cualquier* superficie S (y no sólo por una superficie cerrada como en el § 10) expresa el flujo de energía que pasa por dicha superficie, es decir, es igual a la energía por unidad de tiempo. En este caso, es evidente, que Π es la *densidad del flujo de energía*:

$$\Pi = \lim_{\Delta S \to 0} \pi_0 \frac{\Delta W}{\Delta S}. \qquad (11.9)$$

Aquí, ΔW es la cantidad de energía que pasa por el elemento ΔS de superficie reducida a la unidad de tiempo y π_0, el vector unitario perpendicular a ΔS que indica el sentido de movimiento de energía. Como vemos, el flujo de energía $\int_S \Pi\, ds$ y su densidad Π forman una misma correlación igual que la corriente de conducción $I = \int_S j\, ds$ y la densidad de corriente j. Esta analogía formal puede ser fácilmente prolongada. Si $p = 0$, la ecuación (11.8) se transforma en la siguiente:

$$\operatorname{div} \Pi = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad (p = 0), \tag{11.10}$$

es decir, hemos obtenido el análogo de la "ecuación de continuidad" (4.2) que en forma diferencial expresa la ley de conservación de la carga. En este caso, se trata de la conservación de la energía del campo electromagnético al no haber procesos de transformación.

Al estudiar el movimiento de la energía sin transformaciones, pueden, también, aplicarse los razonamientos que se dieron en el § 6, punto 1, sustituyendo j por Π y ρ por w. Esto, claro está, nos lleva al siguiente análogo de la fórmula (6.3):

$$\Pi = wv, \tag{11.11}$$

siendo aquí v la *velocidad de movimiento de energía* del campo electromagnético. Como vemos, el conocimiento del vector de Poynting y la densidad de energía del campo electromagnético como funciones de las coordenadas, nos permite hallar la velocidad de su movimiento en cualquier punto del espacio.

Sin embargo, en resumen, conviene decir que dicha interpretación universalmente adoptada del vector de Poynting no es consecuencia necesaria de las ecuaciones del electromagnetismo y de la del balance de energía. Digamos en otras palabras que el concepto del vector de Poynting como densidad del flujo de energía del campo electromagnético contiene una concepción física independiente. Efectivamente, ni la forma diferencial (11.8) ni la integral (10.9) de la ecuación del balance de energía, no define la densidad del flujo de energía univocamente. En lugar de $\Pi = [E, H]$ podríamos introducir tanto en la (11.8) como en la (10.9), la función $\Pi + \Sigma$, donde Σ es una función solenoidal vectorial cualquiera ($\operatorname{div} \Sigma = 0$); evidentemente que en virtud del teorema de Ostrogradski—Gauss (S1.24), $\oint_S \Sigma\, ds = 0$. La indeterminación de la densidad del flujo de energía se desprende de que la sustitución de Π por $\Pi + \Sigma$ no cambia la divergencia del vector y su flujo por una superficie cerrada.

§ 12. Aplicación de los resultados obtenidos

1. Sistema energéticamente aislado. Los conceptos de energía eléctrica y magnética del campo electromagnético y su densidad, el flujo de energía y el vector de Poynting, se emplearán frecuentemente en adelante al describir procesos electromagnéticos. Aquí consideraremos sólo ciertos sencillos ejemplos que nos permitirán asimilar más fácilmente el contenido de dichos conceptos.

Sea un sistema energéticamente aislado, y, además, la potencia P proporcional a la reserva de su energía:

$$P = \alpha W. \tag{12.1}$$

El coeficiente de proporcionalidad α es positivo al prevaler la absorción y negativo al haber generación suficientemente eficaz. Introduciendo la expresión de la potencia (12.1) en la ecuación del balance de energía (10.9) y suponiendo que $\Pi = 0$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial respecto a la reserva de energía del sistema:

$$\frac{dW}{dt} + \alpha W = 0. \tag{12.2}$$

Su solución

$$W(t) = W(0) \exp(-\alpha t) = W(0) \exp\left(-\frac{P(t)}{W(t)} t\right) \tag{12.3}$$

nos muestra que la reserva de energía es una función exponencial del tiempo que decrece o bien crece en dependencia del sentido de la transformación de energía.

Si $\alpha = 0$, la reserva de energía queda invariable:

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2)\, dv = \text{const} \quad (\alpha = 0). \tag{12.4}$$

Sin embargo, de esta ecuación no se desprende que no varían las energías eléctrica y magnética del sistema. Es importante, por ejemplo, el caso de las oscilaciones armónicas, para las cuales los valores absolutos de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ se escriben como funciones de las coordenadas y el tiempo:

$$E = A(x, y, z) \operatorname{sen} \omega t \quad \text{y} \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, B(x, y, z) \cos \omega t,$$

además,

$$\int_V A^2(x, y, z)\, dv = \int_V B^2(x, y, z)\, dv.$$

Podemos convencernos fácilmente de que aunque la reserva de energía queda constante, la correlación de las energías eléctrica y magnética varía ininterrumpidamente. Hay ciertos momentos

cuando la energía del sistema es puramente eléctrica ($H=0$), así como momentos cuando es puramente magnética ($E=0$).

2. Ejemplo de cálculo de la energía magnética. Consideremos un toroide de material magnético de sección radial rectangular (fig. 12.1) y por cuyo orificio pasa un conductor cilíndrico infinito con corriente continua I.

A causa de la simetría axial del sistema, las líneas de fuerza magnéticas son circunferencias concéntricas, como en el ejemplo del punto 5 del § 2 y la intensidad del campo magnético fuera del conductor se expresa por la fórmula (2.14). Supongamos que la permeabilidad magnética puede considerarse magnitud constante y calculemos la densidad de la energía magnética:

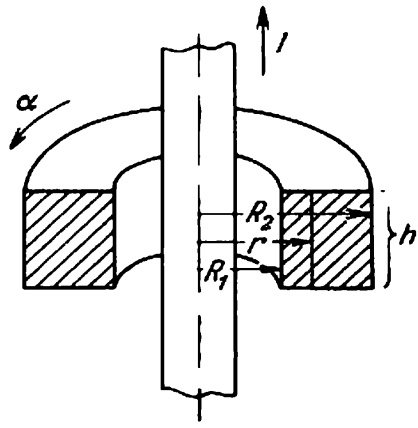


Fig. 12.1.

$$w^{m}=\frac{\mu H}{2}=\frac{\mu I^{2}}{8\pi^{2}r^{2}} \qquad (12.5)$$

(como vemos ésta es la función de la coordenada radial). La energía magnética concentrada en el interior del toroide, se define integrando w^{m} respecto a su volumen (fig. 12.1):

$$W^{M}=\frac{\mu I^{2}}{8\pi^{2}}h\int_{R_1}^{R_2}\int_{0}^{2\pi}\frac{dr\,d\alpha}{r}=\frac{\mu I^{2}h}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}. \qquad (12.6)$$

Señalemos, que la magnitud obtenida es proporcional al flujo magnético Φ a través de la sección radial del toroide

$$\Phi=\int_{S}\boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s}=\frac{\mu I}{2\pi}h\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=\frac{\mu I h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}, \qquad (12.7)$$

relacionado linealmente con la corriente I:

$$\Phi=\mathscr{L}I, \quad \mathscr{L}=\frac{\mu h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}. \qquad (12.8)$$

Por dicha razón, podemos escribir:

$$W^{M}=\frac{\Phi I}{2}=\frac{\mathscr{L}I^{2}}{2}. \qquad (12.9)$$

El coeficiente $\mathscr{L}$ se denomina *inductancia* y el ejemplo a considerar muestra que la energía magnética, relacionada con la corriente continua, se puede expresar por la inductancia y la corriente según la fórmula (12.9). Este problema será examinada con todo detalle en el § 25.

3 . **Ejemplo de cálculo de la energía eléctrica.** Tomemos un condensador plano. Suponiendo que un campo eléctrico constante respecto al tiempo, se encuentra totalmente en su interior y es homogéneo (fig. 12.2), calculemos la energía eléctrica:

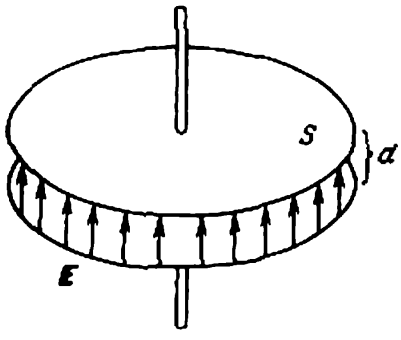


Fig. 12.2.

$$W^e = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2\, dv = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd. \qquad (12.10)$$

Destacando "la tensión" entre las placas del condensador $U = El$ (más adelante, escogeremos un término más adecuado), escribimos:

$$W^e = \frac{CU^2}{2}, \qquad (12.11)$$

siendo

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad (12.12)$$

la *capacidad* del condensador (detalladamente véase el § 17).

4. Flujo de energía en un conductor con corriente continua. Vamos a examinar un conductor con corriente I como si fuera un cilindro conductor aislado (al considerar muy pequeña la influencia de otros objetos cualquiera y, en particular, sectores lejanos del circuito). Aplicando las fórmulas (6.6) y (2.14), hallamos las intensidades de los campos eléctrico y magnético en cualquier punto de la superficie del conductor ($r = R$):

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} = \boldsymbol{z}_0 \frac{I}{\pi R^2 \sigma}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{I}{2\pi R}. \qquad (12.13)$$

El vector $\boldsymbol{E}$ está dirigido en el sentido de la corriente ($\boldsymbol{z}_0$), mientras que el vector $\boldsymbol{H}$, de modo que las líneas de fuerza forman con la corriente un sistema dextrógiro ($\boldsymbol{\alpha}_0$); se ha tenido en cuenta que el valor absoluto de la densidad de la corriente es igual a $j = I/\pi R^2$.

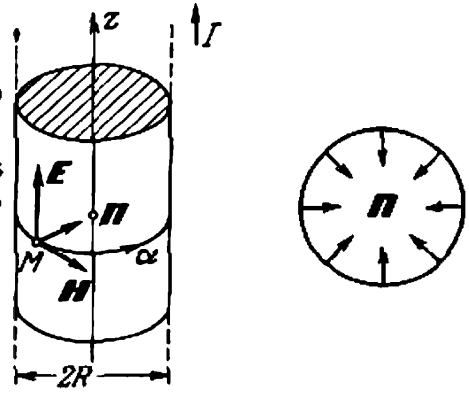


Fig. 12.3.

Confeccionando el producto vectorial de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, hallamos el vector de Poynting en un punto arbitrario de la superficie del conductor:

$$\boldsymbol{\Pi} = [\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}] = -\boldsymbol{r}_0 \frac{I^2}{2\pi^2 R^3 \sigma}. \qquad (12.14)$$

Como vemos, el vector $\boldsymbol{\Pi}$ está siempre dirigido radialmente hacia el interior del conductor (fig. 12.3, *a*, *b*). De ese modo, la energía del campo exterior "fluye" al conductor.

El flujo de energía en un sector del conductor de longitud l, tiene el siguiente valor:

$$\int_S \Pi\, ds = \frac{I^2}{2\pi^2 R^3 \sigma} \cdot 2\pi R l = I^2 \frac{l}{\pi R^2 \sigma} = I^2 \mathcal{R}, \qquad (12.15)$$

siendo $\mathcal{R}$ (véase también el § 6, punto 2) la resistencia del sector del conductor y, ni más ni menos, que la *potencia de las pérdidas térmicas* P_d en el conductor (§ 9, punto 1): la energía que penetra al conductor se absorbe. Si partimos de la ecuación del balance de energía, podemos afirmar que la energía del campo exterior penetra al conductor ya que se absorbe por él. Para un conductor ideal ($\sigma \to \infty$, $\mathcal{R} \to 0$), la absorción de energía desaparece y junto con ésta, como vemos por el resultado obtenido, también desaparece el flujo de energía al conductor.

IV. Conclusión

En el presente capítulo fueron enunciados los conceptos básicos iniciales de la teoría del electromagnetismo, así como deducidos sus corolarios más sencillos y generales. En aquellos casos cuando fue posible hacer uso de hechos elementales, ampliamente conocidos, se dieron ejemplos para esclarecerlos. Sin embargo, el empleo consecutivo de la teoría general para estudiar los procesos electromagnéticos más importantes es la tarea de los siguientes capítulos. Antes de proceder a lo anteriormente dicho, será conveniente confeccionar y considerar el sistema completo de las ecuaciones de la teoría del electromagnetismo, es decir, el *sistema de ecuaciones de Maxwell*. Esto nos dará una idea sobre diversas clases de fenómenos electromagnéticos y, simultáneamente, sobre el posterior contenido del presente curso.

§ 13. Sistema de ecuaciones de Maxwell y tipos de fenómenos electromagnéticos

1. Sistema de ecuaciones de Maxwell. Reduzcamos las ecuaciones (2.1), (2.2), (3.1), (3.2), así como (5.6), (5.7) y (6.6), al siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}, & \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13.1a)$$

y

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \qquad (13.1b)$$

al mismo tiempo, al actuar fuerzas exteriores en lugar de la última de estas ecuaciones se escribe la (6.11) o bien la (6.11a), o sea,

$$j = \sigma (E + E^{ex})$$

o bien

$$j = \sigma E + j^{ex}, \tag{13.2}$$

lo que es el *sistema de ecuaciones de Maxwell en forma diferencial*. Las ecuaciones materiales (13.1b) incluidas en el sistema, como se señaló en los §§ 5 y 6, no son las más generales, pero abarcan un círculo considerable de fenómenos. En caso de necesidad, dichas ecuaciones pueden ser sustituidas por otras (debido a esta razón, fueron destacadas en un grupo especial). Acordemos que para la anisotropía del medio consideraremos que ε, μ y σ son tensores; de acuerdo con las (5.13), (5.14) y (6.7) podemos, en tal caso, utilizar las designaciones $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, $\overleftrightarrow{\mu}$ y $\overleftrightarrow{\sigma}$.

Vamos siempre a considerar que las superficies de separación de los medios son ideales (con variación a saltos de sus propiedades). Por esta causa, el complemento obligatorio del sistema de ecuaciones de Maxwell (13.1a) y (13.1b), son las condiciones límites (7.11).

Al tomar en consideración las observaciones realizadas, el sistema de ecuaciones de Maxwell (13.1a) y (13.1b) es el sistema *completo* de las ecuaciones de la teoría del electromagnetismo. Dicho sistema expresa los principios generales de esta teoría, *suficientes* para la descripción de distintos procesos electromagnéticos particulares. De por sí, el sistema de ecuaciones de Maxwell no tiene soluciones prescritas. La solución precisa, es decir, el conjunto de E, H, B, D, j y ρ como funciones concretas de coordenadas y el tiempo, sólo existe al imponer ciertas condiciones complementarias que caractericen cualquiera de los problemas a plantear. O sea, después de que el problema sobre el proceso electromagnético que investigamos fue planteado correctamente, se convierte en problema matemático que incluye el sistema de ecuaciones de Maxwell y las condiciones complementarias, con las que existe la solución que describe el proceso investigado.

Sustituyendo las ecuaciones (13.1a) por sus análogos integrales

$$\left.\begin{aligned} \oint_L H\,dl = \frac{d}{dt}\int_S D\,ds + I, \quad \oint_S D\,ds = q, \\ \oint_L E\,dl = -\frac{d}{dt}\int_S B\,ds, \quad \oint_S B\,ds = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

obtenemos el *sistema de ecuaciones de Maxwell en forma integral* que se estudia junto con las ecuaciones materiales (13.1b).

2. Tipos de fenómenos electromagnéticos. Puesto que el sistema de ecuaciones de Maxwell describe todo tipo de fenómenos electro-

magnéticos, para considerar cualquiera de sus clases sólo es preciso formular las respectivas limitaciones generales.

Los campos más sencillos son aquellos que, al no haber corrientes, no varían en el transcurso del tiempo, es decir, a la condición de limitación $\partial/\partial t = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$ (la reducción a cero de las derivadas del tiempo está expresada simbólicamente). Es evidente, que el sistema de ecuaciones (13.1a), (13.1b) se descompone en dos sistemas independientes:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= \rho, \\ \boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E} \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0, \\ \boldsymbol{B} &= \mu \boldsymbol{H}. \end{aligned}\right\} \tag{13.4}$$

Estas son las denominadas *ecuaciones de electrostática* (la columna izquierda) y las *ecuaciones de magnetostática* (columna derecha). En virtud de la (13.3), escribamos también las ecuaciones en forma integral que les corresponden:

$$\left.\begin{aligned} \oint_L \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} &= 0, \\ \oint_S \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} &= q, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \oint_L \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} &= 0, \\ \oint_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

Es decir, se llama *electrostático* un campo eléctrico cuando en él hay cargas inmóviles, mientras que *magnetostático* es un campo magnético de corriente continua en aquellas regiones donde no hay corriente [1], así como el campo de un imán constante; sin embargo, conviene tener en cuenta que en el último caso (como en general para los materiales ferromagnéticos), la ecuación material $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ debe ser sustituida por la expresión de una dependencia más complicada, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$.

Dejando sólo la exigencia de que el campo sea *estacionario* $\partial/\partial t = 0$, del sistema de ecuaciones de Maxwell (13.1a), (13.1b) se obtiene el siguiente *sistema* parcial *de ecuaciones del campo electromagnético estacionario:*

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= 0, & \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= \rho, & \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0, \\ \boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E}, & \boldsymbol{B} &= \mu \boldsymbol{H}, \\ & \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, & & \\ & [\boldsymbol{j} = \sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{ex}})], & & \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

y de la (13.3), las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \oint_L \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} &= 0, & \oint_L \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} &= I, \\ \oint_S \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} &= q, & \oint_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

[1] Las precisiones necesarias se efectuarán en los §§ 21, 22.

Las ecuaciones diferenciales que describen el campo eléctrico (columna izquierda) no difieren de las ecuaciones de electroestática, pero en el último caso ya no son independientes. Efectivamente, con la intensidad $\boldsymbol{E}$ está relacionado el vector de la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ que también está incluido en la primera ecuación de la segunda columna del (13.6). Las ecuaciones escritas caracterizan, en forma general, los campos eléctrico y magnético para corriente continua.

Como hemos podido apreciar, a ciertos tipos de fenómenos electromagnéticos les corresponden formas especiales del sistema de ecuaciones de Maxwell. Más adelante, gracias a otros ejemplos, nos convenceremos de esto. Entre los procesos electromagnéticos variables respecto al tiempo, son relativamente sencillos los *cuasiestacionarios*, próximos a los estacionarios, es decir, que transcurren con suficiente lentitud. Como ya se indicó en la Introducción precisamente para los procesos cuasiestacionarios es justa la teoría de circuitos. En el § 27 examinaremos las suposiciones simplistas para las que las ecuaciones de la teoría de circuitos de corriente alterna se desprenden del sistema de ecuaciones de Maxwell. Particular importancia tienen los procesos que varían respecto al tiempo según la ley de las oscilaciones armónicas. En el capítulo 3 se mostrará que, en este caso, el sistema de ecuaciones de Maxwell se simplifica considerablemente al aplicar el método de las amplitudes complejas.

3. Principio de superposición. Detengámonos en una importante propiedad del sistema de ecuaciones de Maxwell. Si el medio es lineal (§§ 5, 6), dicho sistema, en conjunto, tendrá la propiedad de linealidad (pág. 641). Esto significa que en el caso dado, para los procesos electromagnéticos es válido el *principio de superposición*. Dicho principio se manifiesta en que al haber varias soluciones del sistema (13.1a), (13.1b): $(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{j}_1, \rho_1)$, $(\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{j}_2, \rho_2)$, $(\boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{H}_3, \boldsymbol{D}_3, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{j}_3, \rho_3)$, ..., también es solución su combinación lineal, o sea, $(a_1\boldsymbol{E}_1 + a_2\boldsymbol{E}_2 + a_3\boldsymbol{E}_3 + \ldots, a_1\boldsymbol{H}_1 + a_2\boldsymbol{H}_2 + a_3\boldsymbol{H}_3 + \ldots, a_1\boldsymbol{D}_1 + a_2\boldsymbol{D}_2 + a_3\boldsymbol{D}_3 + \ldots, a_1\boldsymbol{B}_1 + a_2\boldsymbol{B}_2 + a_3\boldsymbol{B}_3 + \ldots, a_1\boldsymbol{j}_1 + a_2\boldsymbol{j}_2 + a_3\boldsymbol{j}_3 + \ldots, a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + a_3\rho_3 + \ldots)$, siendo a_1, a_2, a_3, ... coeficientes constantes arbitrarios (en caso particular, iguales a la unidad), lo que puede comprobarse fácilmente mediante su sustitución.

Si la solución 1 (es decir, $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$, etc.) tiene lugar para las fuerzas exteriores en forma de $\boldsymbol{f}_1^{ex}$, o bien $\boldsymbol{E}_1^{ex}$, en otras palabras, si el campo 1 se excita por manantiales conocidos y asimismo, el campo 2 se excita por sus manantiales, el campo 3, por los suyos, etc., la combinación de soluciones indicada anteriormente representa un campo que se excita por una combinación análoga lineal de manantiales (las fuerzas exteriores están prefijadas en forma de $a_1\boldsymbol{f}_1^{ex} + a_2\boldsymbol{f}_2^{ex} + a_3\boldsymbol{f}_3^{ex} + \ldots$ o bien, $a_1\boldsymbol{E}_1^{ex} + a_2\boldsymbol{E}_2^{ex} + a_3\boldsymbol{E}_3^{ex} + \ldots$). Por esto, el principio de superposición se expresa de la forma siguiente: un campo creado por varios manantiales puede conside-

rarse como la suma de los campos de todos los manantiales que actúan por separado.

Marquemos que el principio de superposición no se extiende a la energía. Si, por ejemplo, el campo 1 (intensidad E_1) posee una energía W_1^e y el campo 2, W_2^e, al existir los dos campos simultáneamente, la energía será igual a

$$W^e = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon (E_1 + E_2)^2\, dv = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E_1^2\, dv + \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E_2^2\, dv + \int_V \varepsilon E_1 E_2\, dv,$$

es decir,

$$W^e = W_1^e + W_2^e + W_{12}^e,$$

donde el término complementario $W_{12}^e = \int_V \varepsilon E_1 E_2\, dv$ se denomina *energía mutua* de ambos campos.

Desde un punto de vista formal, hemos obtenido una simple consecuencia del hecho de que la energía es una función *no lineal* de la intensidad del campo. En realidad, el decrecimiento o crecimiento de la energía total de campo (en dependencia de si W_{12} es mayor o menor que cero), puede sólo estar relacionado con la variación de los manantiales.

4. Observaciones. El posterior contenido de nuestro manual estará confeccionado según las leyes de deducción: teniendo a su disposición el sistema de ecuaciones de Maxwell consideraremos diversos tipos de fenómenos electromagnéticos, pasando de lo general a lo particular. En este caso, se estudian primeramente los fenómenos más sencillos y a continuación, complicando gradualmente el contenido, se dedica la atención a los procesos de importancia directa para la radiotecnia.

En el caso de dicha tendencia dejaremos a un lado ciertos temas de la teoría del electromagnetismo no relacionados directamente con la rediotecnia. No estudiaremos casi por completo la electrodinámica microscópica y la electrodinámica de medios en movimiento. A esto úlimo debemos dedicar varias palabras.

En virtud del *principio de relatividad* adoptado por la física moderna, todas las leyes de la naturaleza son idénticas para todos los determinados *sistemas inerciales* (estos sistemas se desplazan unos respecto a otros rectilínea y uniformemente). Pasando de un sistema inercial a otro, se efectúan determinadas transformaciones de las coordenadas y el tiempo llamadas *transformaciones de Lorentz*; en ellas se basa la *teoría especial de relatividad de Einstein*. En los límites de dicha teoría las leyes de la naturaleza deben tener el aspecto de ecuaciones invariantes respecto a las transformaciones de Lorentz, o sea, que conservan su contenido durante tales transformaciones. Por ejemplo, las leyes de Newton no tienen tal propiedad, pero es propia de las ecuaciones de Maxwell.

La indicada propiedad de las ecuaciones de Maxwell no significa que el campo electromagnético tiene un mismo aspecto en

diferentes sistemas inerciales. Un estudio detallado de esta cuestión es imposible sin la aplicación de la teoría especial de relatividad, pero, sin embargo, la esencia de los fenómenos es fácilmente comprensible gracias a sencillos razonamientos. Supongamos que en cierto sistema existe un campo magnético estático y la inducción magnética es igual a $\boldsymbol{B}$, pero en dicho sistema no hay campo eléctrico ($\boldsymbol{E}=0$). No obstante, un observador que se desplaza respecto al sistema dado con una velocidad $\boldsymbol{v}$, advertirá un campo eléctrico ya que en la carga de prueba q que él emplea actuará la fuerza $\boldsymbol{F}=q[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}]$ (§ 1, punto 1). Efectivamente, como en el sistema del observador la carga es inmóvil, la fuerza $\boldsymbol{F}$ será atribuida a la acción de un campo eléctrico de una intensidad $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{F}/q$.

En la electrodinámica de objetos en movimiento, los vectores del campo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ sólo tienen un sentido relativo.

Capítulo 2

Campos estáticos, estacionarios y cuasiestacionarios

1. Electrostática y magnetostática

Tradicionalmente, en los cursos de física, se presta gran atención a los fenómenos de electrostática. La exposición de dichos fenómenos se basa frecuentemente en la ley de Coulomb. A nosotros, la electrostática nos interesa no sólo por sí sola, sino en mayor grado, como región en la que se manifiestan las leyes generales del electromagnetismo. Por esta razón, partiremos del sistema de ecuaciones de Maxwell que nos llevará a las *ecuaciones de electrostática* en calidad de una de sus formas particulares (véase el § 13, punto 2). En lo que se refiere a la ley de Coulomb, ésta se obtendrá como consecuencia de dichas ecuaciones.

Podemos considerar la electrostática como un "párrafo preparatorio" de la teoría del electromagnetismo que, al estudiarlo, permite asimilar las operaciones del análisis vectorial y las nociones más sencillas. Posteriormente, dicho material encontrará una aplicación al enunciar conceptos más complicados. Por ejemplo, existe determinada relación entre la concepción de dipolo electrostático (§ 15) y el dipolo de Hertz, radiador elemental (capítulo 4). La electrostática nos permite construir un sencillo modelo que aclara el fenómeno de la polarización del medio, sobre el que anteriormente (§ 5) se trataba en rasgos generales. Y finalmente, en electrostática hallamos la fuente de ciertas nociones que se aplican extensamente en la técnica (potencial, capacidad, etc.).

Hablando en rigor, en la naturaleza no existen fenómenos reales de electrostática. Todo medio real tiene alguna electrocon-

ductibilidad y la condición $j=0$ está idealizada; por ejemplo, un objeto cargado que se encuentra en el aire, pierde gradualmente su carga a causa de su "fuga". Despues, cuando dos cuerpos cargados se atraen o repelen, su desplazamiento es, ni más ni menos, que la corriente que está obligatoriamente acompañada del campo magnético (véase el § 2, punto 3). En general, en los experimentos se juzga sobre los campos reales "electrostáticos" por los procesos dinámicos ajenos a la electrostática ideal. El campo electrostático ideal no intercambia su energía con nada y, en general, no podría ser advertido ya que en cualesquiera de sus puntos el vector de Poynting (véase los §§ 10—11) es igual a cero. Todo lo anteriormente dicho, no impide que la electrostática sea una útil abstracción. No obstante, es importante tener en cuenta que cuando en electrostática se habla sobre el desplazamiento de partículas cargadas, se sobreentiende un movimiento tan lento, con el que en este caso es posible no tomar en consideración el campo magnético.

A la esfera de acción de las *ecuaciones de magnetostática* (véase § 13, punto 2) se incluyen los campos magnéticos invariables respecto al tiempo, al no haber corrientes. Posteriormente (§§ 21—22) examinaremos la rama de fenómenos a que ellas responden.

§ 14. Ecuaciones principales de electrostática. Potencial

1. Ecuaciones de Maxwell y concepto de potencial. En calidad de las ecuaciones más generales de electrostática tomaremos la siguiente forma particular de las ecuaciones de Maxwell (véase el § 13, punto 2):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{14.1a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho, \tag{14.1b}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}. \tag{14.1c}$$

También escribamos las correlaciones integrales que corresponden a las dos primeras ecuaciones:

$$\oint_l \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = 0, \tag{14.2a}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{s} = q. \tag{14.2b}$$

En virtud de la (14.1a) el campo electrostático es *irrotacional (de potencial)*. Efectivamente, es suficiente comparar la (14.1a) con la identidad del análisis vectorial (S1.33), para poder escribir

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{14.3}$$

Posteriormente, se explicará por qué en el segundo miembro se ha escogido el signo negativo (es decir, en la (S1.33) se ha tomado $\psi = -\varphi$). La función escalar φ se denomina *potencial electrostático*. El hecho de que en electrostática en la solución de la ecuación de Maxwell $\boldsymbol{E}$ se expresa como el gradiente de cierta magnitud escalar $-\varphi$, indica la relativa sencillez del campo. Efectivamente, las tres (en el caso general) componentes del vector $\boldsymbol{E}$ se determinan suficientemente por medio de una función escalar φ.

2. Propiedades del potencial electrostático. Primeramente, aclaremos el contenido físico de la noción de potencial electrostático φ. Con este objeto, figurémonos que en el campo electrostático se desplaza una carga q (con anterioridad ya indicamos hasta qué punto dicha representación es convencional). Como sabemos, en la carga actuará una fuerza $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ (§ 1, punto 1) y, por consiguiente, el trabajo que se efectúa durante su desplazamiento por cierto recorrido l desde el punto M_1 a M_2, se expresa por medio de la siguiente integral respecto a dicho recorrido:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{l} = q \int_{M_1}^{M_2} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -q \int_{M_1}^{M_2} \operatorname{grad} \varphi\, d\boldsymbol{l}. \qquad (14.4)$$

La integral obtenida es bien conocida en el análisis vectorial; representando la expresión subintegral en coordenadas cartesianas $\left(d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}_0\, dx + \boldsymbol{y}_0\, dy + \boldsymbol{z}_0\, dz \quad \text{y} \quad \operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \boldsymbol{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \boldsymbol{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$, se tiene

$$\int_{M_1}^{M_2} \operatorname{grad} \varphi\, d\boldsymbol{l} = \int_{M_1}^{M_2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz\right) = \int_{M_1}^{M_2} d\varphi,$$

ya que el producto escalar desarrollado ha resultado ser la diferencial total de la función φ. Por esta razón

$$A = q\,(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (14.5)$$

siendo φ_1 y φ_2 los potenciales electrostáticos (valores de φ) en los puntos M_1 y M_2. Como vemos, si se toma una carga unitaria positiva ($q = +1$), el trabajo será simplemente igual a la *diferencia de potencial* $\varphi_1 - \varphi_2$. El trabajo es positivo, o sea, la energía del campo se consume para desplazar la carga positiva desde el mayor potencial hacia el menor ($\varphi_1 > \varphi_2$). Esta interpretación precisamente da sentido a la elección del signo del segundo miembro de la igualdad (14.3) verificado anteriormente.

Comparando las (14.4) y (14.5), obtenemos una correlación muy importante de electrostática

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}, \qquad (14.6)$$

contraria respecto a la (14.3). En el caso particular, cuando el recorrido es cerrado (los puntos M_1 y M_2 coinciden), la (14.6) se convertirá en (14.2a), pero esto se producirá sólo si resulta que $\varphi_1 = \varphi_2$. En otras palabras, la función φ es, en este sentido, *unívoca* [1]). Según la (14.5), el trabajo que se realiza para desplazar la carga se determina por los valores de φ en los puntos inicial y final de su recorrido. Ya que la función φ es unívoca, de aquí se deduce que no depende del tipo de recorrido y será idéntica para los recorridos M_1mM_2 y M_1nM_2 en la fig. 14.1. A tal conclusión se puede llegar examinando solamente la integral de contorno (14.2a); como es igual a cero, el trabajo no se realiza al desplazarse por el recorrido cerrado y, en particular, por el $M_1mM_2nM_1$.

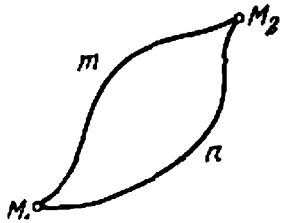


Fig. 14.1.

El potencial electrostático φ, así como en general el potencial en el análisis vectorial, está determinado con exactitud salvo el sumando constante: las fórmulas (14.3) y (14.6) conservan su validez al sustituir φ por $\varphi + C$. Habitualmente, en electrostática se considera que el potencial de un punto infinitamente alejado es nulo. Entonces, basándonos en la (14.6), el potencial φ en cierto p. nto M es

$$\varphi = \int_M^\infty \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} \qquad (14.7)$$

o sea, resulta ser igual al trabajo que se efectúa para alejar de este punto una carga puntual positiva al infinito. Por lo demás, en ciertos casos y sobre todo en la técnica, es más cómodo considerar igual a cero el potencial de la Tierra o de cualquier pantalla conductora (posteriormente nos convenceremos de que en cualquier conductor el potencial es constante en todos sus puntos).

3. **Ecuaciones del potencial.** Debido al potencial del campo electrostático, para calcular su intensidad $\boldsymbol{E}$ (como ya se indicó en el punto 1) es suficiente sólo conocer la función escalar φ; conociendo el potencial, la intensidad $\boldsymbol{E}$ se calcula por la fórmula (14.3). ¿Qué ecuación satisface φ?

Sustituyendo en la (14. 1b) $\boldsymbol{D}$ por $\varepsilon\boldsymbol{E}$ y expresando seguidamente $\boldsymbol{E}$ por el potencial, empleando para esto la (14.3), se obtiene que

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = -\rho. \qquad (14.8)$$

Esta es la ecuación necesaria.

Con mayor frecuencia se utiliza una forma particular de la (14.8), válida si la permitividad es constante (independiente de las coor-

[1]) Por ejemplo, tal propiedad no la tiene la coordenada azimutal α que varía su valor en 2π cuando el punto en movimiento retorna a su posición inicial después de circundar el origen de coordenadas por un contorno cerrado.

denadas), es decir, para medios homogéneos:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (14.9)$$

El aspecto general de esta *ecuación de Poisson* para una región no limitada puede ser escrita a base de las (S5.1), (S5.5):

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(r')}{|r-r'|}\,dv'. \qquad (14.10)$$

Para aquellas regiones en las que no hay carga ($\rho = 0$), la (14,9) se convierte en la *ecuación de Laplace*

$$\nabla^2\varphi = 0. \qquad (14.11)$$

Los problemas de electrostática para medios homogéneos, así como medios compuestos de regiones homogéneas (también se sobreentiende la isotropía) pueden siempre considerarse como problemas para las ecuaciones de Poisson (14.9) y de Laplace (14.11).

En virtud de lo dicho, es preciso comprender la conducta del potencial electrostático en las superficies de separación de distintos medios. Tomando las condiciones límites de la (7.7a) para las componentes tangenciales del vector $\boldsymbol{E}$ y la (7.2a) para las componentes normales del vector $\boldsymbol{D}$ y, en virtud de la (14.3), obtenemos

$$(\operatorname{grad}\varphi)_{\tau 1} = (\operatorname{grad}\varphi)_{\tau 2}, \qquad -\varepsilon_1(\operatorname{grad}\varphi)_{\nu 1} + \varepsilon_2(\operatorname{grad}\varphi)_{\nu 2} = \xi.$$

De acuerdo con la (S1.6)

$$(\operatorname{grad}\varphi)_\tau = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \quad \text{y} \quad (\operatorname{grad}\varphi)_\nu = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu},$$

siendo τ y ν los ejes tangencial y normal del sistema local de coordenadas cartesianas en la superficie de separación, pero escogidas de tal forma que $\boldsymbol{E} = \tau_0 E_\tau + \nu_0 E_\nu$. El primer renglón de las condiciones límites demuestra, de este modo, la continuidad de la derivada tangencial del potencial, lo que es posible para la continuidad del *propio potencial*. Definitivamente, para φ tendremos las siguientes condiciones límites:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \qquad -\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu} + \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\nu} = \xi. \qquad (14.12)$$

Señalemos que el requerimiento de la continuidad $\partial\varphi/\partial\tau$ se cumpliría también con la condición límite $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{const}$; pero en tal caso, la componente normal del campo en la superficie de separación se reduciría a la infinidad.

4. Ecuaciones vectoriales de segundo orden. También podemos obtener las ecuaciones de Poisson y Laplace respecto a la intensidad del campo electrostático $\boldsymbol{E}$. En virtud de la (14.1a)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0,$$

y por esta razón, basándonos en la (S1.34),

$$\text{grad div } \boldsymbol{E} - \nabla^2 \boldsymbol{E} = 0. \tag{14.13}$$

Si $\varepsilon = \text{const}$ y teniendo en cuenta las (14.1b), (14.1c), obtenemos

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \rho. \tag{14.14}$$

Esta *ecuación vectorial de Poisson* se convierte para $\rho = 0$ en la *ecuación vectorial de Laplace*

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = 0. \tag{14.15}$$

§ 15. Cargas puntuales. Dipolo

1. Carga puntual. El más sencillo objeto de electrostática es la carga puntual y su campo. En el § 1, punto 1 ya dijimos que, prácticamente, se llama carga puntual cualquier cuerpo cargado en aquellos casos, cuando la distancia desde la que se observa, supera considerablemente las dimensiones del cuerpo cargado. De este modo, todo campo electrostático a distancias suficientemente grandes de la región cargada limitada en cierto espacio, puede considerarse como campo de una carga puntual. Y mientras mayor sea la distancia, en mayor grado el campo resulta ser tal, como si en realidad toda la carga estuviera situada en un punto.

El campo de una carga puntual fue definido en el § 3, punto 2, empleando con este objeto el teorema de Gauss, es decir, la fórmula (14.2b). Repitamos la principal esencia de la deducción. Una carga, localizada en cierto punto O es manantial de líneas eléctricas de fuerza; todas las direcciones que parten de O, son físicamente equitativas, de modo que las líneas deben propagarse radialmente y con idéntica densidad y, por consiguiente, en la superficie de una esfera de radio r, con el centro en el punto O, el vector $\boldsymbol{D}$ es constante y está dirigido por la normal. Esto significa, que la integral en la (14.2b) nos da $4\pi r^2 D$, de donde se deduce la fórmula (3.7). Escribamos de nuevo este resultado, pero en forma más general, sustituyendo el vacío por un medio arbitrario homogéneo e isótropo ($\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ en lugar de $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$) y designando el punto de localización de la carga por $P(r')$ y el punto de observación por $M(r)$ (fig. 15.1):

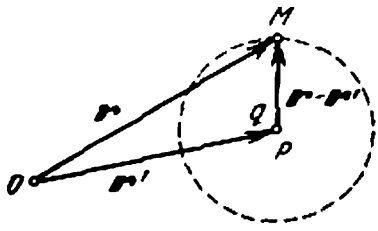


Fig. 15.1.

$$\boldsymbol{E}(r) = r_{0q} \frac{q}{4\pi |r - r'|^2}. \tag{15.1}$$

Aquí, r_{0q} es el vector unitario para la dirección PM, es decir,

$$r_{0q} = \frac{r - r'}{|r - r'|}.$$

Disponiendo de la expresion de la intensidad del campo de la carga puntual, podemos, gracias a la fórmula (14.7), determinar el correspondiente potencial electrostático φ en cualquier punto del espacio. Como el camino de integración es indiferente, lo tomamos a lo largo de la línea de fuerza que pasa por el punto de observación (es decir, hacia la dirección $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$). Entonces, la dirección de $\boldsymbol{E}$ y $d\boldsymbol{l}$ coinciden: $\boldsymbol{r}_{0q}\, d\boldsymbol{l} = d\boldsymbol{l}$. Introduciendo la (15.1) en la (14.7) y designando por x la variable de integración (camino), se obtiene que

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \int\limits_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \qquad (15.2)$$

Intentemos obtener este mismo resultado haciendo uso del aparato matemático dado en el Suplemento. A base de la (S2.6) la densidad de la carga puntual q situada en $P(\boldsymbol{r}')$, será

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \qquad (15.3)$$

El potencial $\varphi(\boldsymbol{r})$ es la solución de la ecuación de Poisson (14.9) que se expresa por la fórmula (14.10) para un espacio no limitado. Poniendo en la (14.10) la función de densidad (15.3) y teniendo en cuenta la propiedad de δ-función (S2.4), hallamos que

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int\limits_{V} \frac{\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|}\, dv'' = \frac{q}{4\pi\varepsilon\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (15.4)$$

(para no confundirla con $\boldsymbol{r}'$ en la (15.3), la variable de integración en la (14.10) se marca con dos rayas). Como vemos, los resultados de las (15.4) y (15.2) coinciden.

Retornando a la expresión de la intensidad de campo de una carga puntual (15.1), debemos marcar que dicha magnitud puede obtenerse con facilidad partiendo de la expresión para el potencial (15.4), según la fórmula (14.3); con este objeto, recomendamos al lector ubicar la carga en el origen de un sistema esférico de coordenadas y emplear la fórmula (S1.9).

En conclusión, representémonos una carga puntual ideal que efectivamente no ocupe volumen (es decir, no simplemente un cuerpo cargado muy pequeño). Para tal partícula, todas las expresiones que hemos anteriormente considerado son válidas a *cualquier* distancia *finita* $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$, lo que, precisamente, es la ventaja de la idealización efectuada. Sin embargo, podemos advertir que las fórmulas (15.1) y (15.2) pierden su sentido para el propio "punto cargado" ($\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$), ya que nos llevan a infinidades; este hecho nos muestra la imperfección de la abstracción de la carga puntual ideal.

2. Ley de Coulomb. Según la (15.1) podemos expresar la fuerza de interacción de dos cargas puntuales. Efectivamente, si en un punto con radio vector $\boldsymbol{r}_1$ se encuentra situada la carga q_1, la fuerza que actúa en una carga unitaria positiva ubicada en un punto con radio vector $\boldsymbol{r}_2$ se determina como $\boldsymbol{E}$ por la fórmula (15.1), susti-

tuyendo q por q_1, r' en r_1 y r por r_2. Supongamos, seguidamente, que en lugar de una carga unitaria se ha tomado q_2 y entonces, la fuerza será q_2E, es decir (fig. 15.2),

$$F = r_{0q} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon |r_2 - r_1|^2}. \qquad (15.5)$$

Esta fórmula expresa no otra cosa que la *ley de Coulomb* que, en resumidas cuentas, ha sido obtenida partiendo de las ecuaciones de Maxwell.

La correlación (15.5) expresa directamente la fuerza que actúa en la carga q_2; cuando su signo coincide con el de q_1, esta fuerza está dirigida por $r_{0q} \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}$, o sea, la carga q_2 se repele de q_1; si los signos de q_1 y q_2 son contrarios, la fuerza está dirigida por $-r_{0q}$, lo que significa que la carga q_2 se atrae por q_1. Como es natural, de forma análoga podemos razonar respecto a la fuerza que actúa sobre la carga q_1, pero en tal caso, como vector unitario r_{0q} se debe tomar no $\frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}$ sino $\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}$, es decir, hay que cambiar el signo.

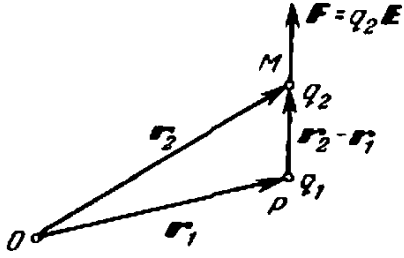


Fig. 15.2.

3. Sistema de cargas. Pasemos, a continuación, a la investigación de un sistema de cargas puntuales. Basándonos en el principio de superposición, el campo puede ser hallado al sumar los campos de cargas independientes, o sea,

$$E(r) = \sum_i E_i(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_i r_{0i} \frac{q_i}{|r - r_i|^2}, \qquad (15.6)$$

siendo E_i la intensidad del campo de la carga q_i situada en el punto $M_i(r_i)$ y $r_{0i} = \frac{r - r_i}{|r - r_i|}$. Un ejemplo de la definición gráfica de un campo de varias cargas puntuales se muestra en la fig. 15.3; las distancias $|r - r_i|$ se designan por x_i.

De forma análoga se calcula el potencial:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{q_i}{|r - r_i|}. \qquad (15.7)$$

Es curioso que de la (15.7), por medio de sencillas operaciones (y aunque no de forma totalmente impecable), podemos obtener la

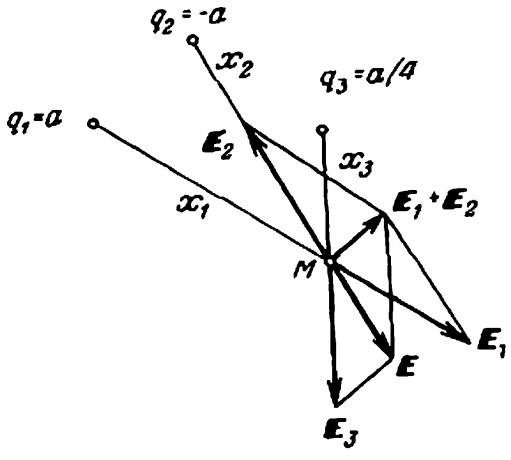


Fig. 15.3.

solución general de la ecuación de Poisson (14.9) para un espacio no limitado, expresada por la fórmula (14.10). Examinemos la distribución arbitraria continua de una carga de densidad ρ en el volumen V. Si dividimos V en elementos ΔV_i suficientemente pequeños, en cada uno de los cuales $\rho \approx \rho_i$, se puede confeccionar un sistema "equivalente" de cargas puntuales $q_i = \rho_i \Delta V_i$, suponiendo que cada una de ellas está ubicada en su célula ΔV_i. Luego se verifica la disminución infinita de los elementos ΔV_i. Aplicando la fórmula (15.7), obtenemos que

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, dv', \qquad (15.8)$$

lo que coincide con la (14.10)

4. Dipolo. Como caso importante, pero sencillo, de un sistema de cargas puntuales consideremos un dipolo. Tomemos dos cargas puntuales q y $-q$ de signos contrarios pero de igual magnitud absoluta, alejada la una de la otra a una distancia l. Suponiendo que $q > 0$, llamaremos *momento eléctrico* de este sistema el vector

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}, \qquad (15.9)$$

donde $\boldsymbol{l}$ es un vector con valor absoluto l, dirigido desde la carga negativa a la positiva. Si la distancia r, desde la que se observa este sistema (es decir, se estudia su campo), es muy grande en comparación con la dimensión l, tal sistema se denomina *dipolo*. Vamos a disminuir l mentalmente, conservando ql constante, es decir, acerquemos las cargas de signos contrarios, variando su magnitud de la forma necesaria. Entonces, en el límite para $l \to 0$, obtendremos un "punto dipolar" que se caracteriza por el momento $\boldsymbol{p}$ y que se llama *dipolo ideal*, es decir, un sistema de cargas que puede ser considerado dipolo a cualquier distancia finita.

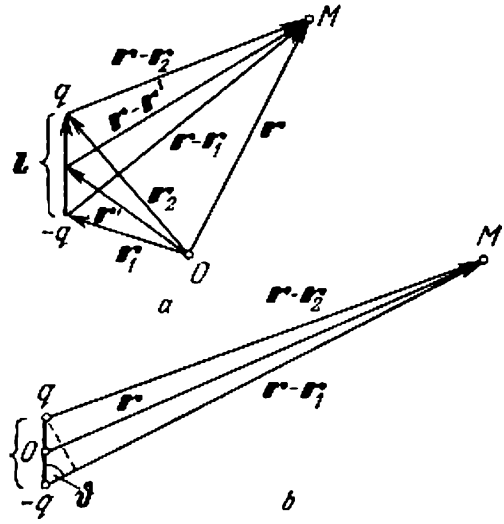


Fig. 15.4.

Partiendo de la (15.7), podemos fácilmente escribir la expresión del potencial del sistema de dos cargas $q_1 = -q$ y $q_2 = q$:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|}\right). \qquad (15.10)$$

En la fig. 15.4 está representado el propio sistema junto con el punto de observación en dos formas de disposición del origen de coordenadas O. En el segundo caso, el punto O se encuentra en la mitad del segmento l, así que $\boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{l}/2$ y $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{l}/2$.

Para determinar el potencial del dipolo emplearemos la fórmula (15.10); con esto conviene hacer que l tienda a cero, dejando ql de ser constante, es decir, calcular el límite:

$$\varphi(r) = \lim_{\substack{l \to 0 \\ ql = \text{const}}} \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{|r - r_1| - |r - r_2|}{|r - r_2|\,|r - r_1|}. \qquad (15.11)$$

En el caso mostrado en la fig. 15.4, *b*, para

$$r - r_2 \to r - r_1 \to r,$$
$$q\,|r - r_1| \to q\,|r - r_2| \to ql\cos\vartheta,$$

por lo que

$$\varphi(r) = \frac{ql\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{pr_0}{4\pi\varepsilon r^2}. \qquad (15.12)$$

En comparación con éste, el caso más general de la fig. 15.4, *a* se diferencia sólo en que $r - r_2$ y $r - r_1$ tienden a $r - r'$, siendo r' el radio vector del punto medio del segmento l y tenemos que

$$\varphi(r) = \frac{ql\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon\,|r - r'|^2} = \frac{pr_{0q}}{4\pi\varepsilon\,|r - r'|^2}. \qquad (15.12a)$$

El vector unitario $r_{0q} = \frac{r - r'}{|r - r'|}$, como r_0 en la (15.12) está dirigido desde la mitad del segmento l al punto de observación M.

La intensidad del campo E del dipolo puede hallarse fácilmente como el gradiente del potencial según la fórmula (14.3), empleando

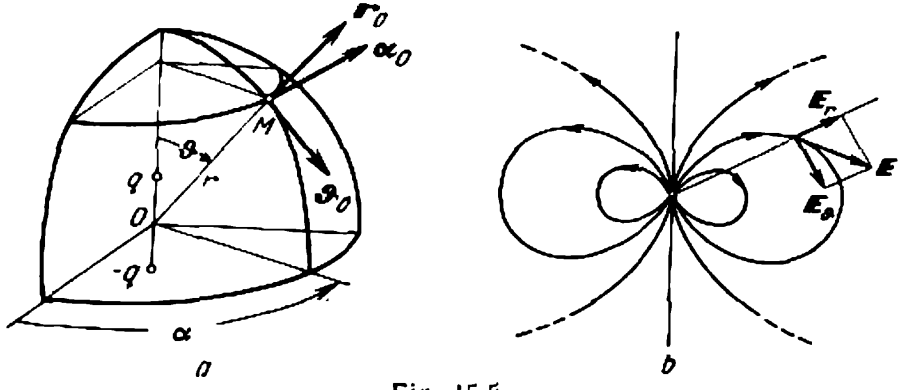


Fig. 15.5.

las coordenadas esféricas (fig. 15.5, *a*). Basándonos en el (S1.9), de la (15.12) se obtiene

$$E(r) = \frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}(r_0\,2\cos\vartheta + \vartheta_0 \operatorname{sen}\vartheta). \qquad (15.13)$$

El campo es simétrico respecto al eje del dipolo y por esta razón, φ y E no dependen de la coordenada azimutal α; al aumentar la distancia, el campo decrece con mayor rapidez que el de una sola carga puntual: $E = O\,(1/r^3)$ en lugar de $E = O\,(1/r^2)$.

Hallemos la ecuación de las líneas de fuerza del campo a examinar. En virtud de la (S1.37) y la tabla 6.1

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\vartheta}{E_\vartheta},$$

y las componentes del vector $\boldsymbol{E}$ son conocidas de la (15.13). Introduciéndolas en la relación anterior, podemos escribir la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dr}{r} = 2 \operatorname{cotg} \vartheta \, d\vartheta, \tag{15.14}$$

que describe las líneas de fuerza en un plano arbitrario. Dicha ecuación puede fácilmente integrarse y obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{r} = C. \tag{15.15}$$

Para confeccionar cualquier línea de fuerza por separado hay que prefijar cierto valor de la constante C. El cuadro de las líneas de fuerza de un dipolo se muestra en la fig. 15.5, *b*.

§ 16. Ejemplos de campos electrostáticos

1. Campos con simetría central. Seguidamente, examinaremos varios campos electrostáticos sencillos, empleando para hallarlos consideraciones de simetría. Con esto, el resultado se obtiene con gran rapidez debido al teorema de Gauss.

Comencemos indicando que la fórmula (15.1) es, en realidad, válida para describir no sólo el campo de una carga puntual, sino cualesquiera campos electrostáticos con igual simetría central. Por ejemplo, tenemos una esfera con radio R cargada uniformemente ($\rho = \text{const}$) y situada en un medio isótropo; su carga total es $q = 4\pi R^3 \rho/3$; designaremos, respectivamente, por ε_1 y ε_2 la constante dieléctrica de la esfera y del medio.

Describiendo una superficie esférica concéntrica del radio $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| > R$ (en la fig. 16.1, *a* $\boldsymbol{r}' = 0$), igual que para una carga puntual, al calcular la integral de Gauss obtenemos que $4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2 D = q$, de donde se deduce la (15.1). En el caso dado, el origen de coordenadas será cómodo ubicarlo en el centro de la esfera (fig. 16.1, *a*), así que

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} = \boldsymbol{r}_0 \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_1 r^2}, \quad r > R. \tag{16.1}$$

De modo análogo se halla el campo en el interior de la esfera ($r < R$), pero en virtud de la esencia del teorema de Gauss, en este caso, en lugar de la carga total q tenemos que tomar la carga q' situada dentro de la esfera del radio r (fig. 16.1, *b*) e igual a $q' = 4\pi r^3 \rho/3$. Pero como $q'/q = (r/R)^3$, la fórmula necesaria

se obtiene de la (16.1), sustituyendo q por qr^3/R^3 y ε_1 por ε_2:

$$E = r_0 \frac{qr}{4\pi\varepsilon_2 R^3} = r_0 \frac{\rho r}{3\varepsilon_2}, \quad r < R. \tag{16.2}$$

Como vemos, en el interior de una esfera uniformemente cargada el campo crece al aumentar la distancia desde el centro, mientras

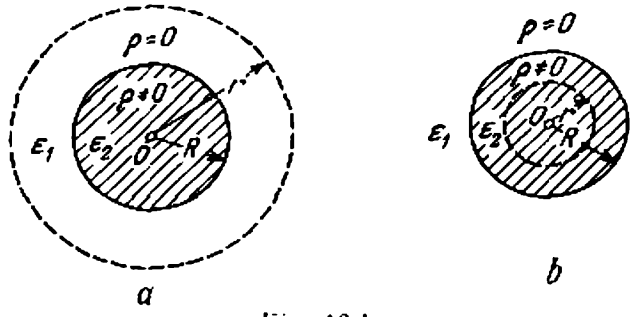


Fig. 16.1.

que fuera de ella, resulta ser tal como si la carga estuviera totalmente ubicada en el centro de la esfera. En la fig. 16.2, *a*, *b* están representadas las funciones $D(r)$ y $E(r)$, cuando $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, y también para $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Si la carga de la esfera está distribuida uniformemente por su superficie ($q = 4\pi R^2\xi$), fuera de la esfera el campo se expresa, como

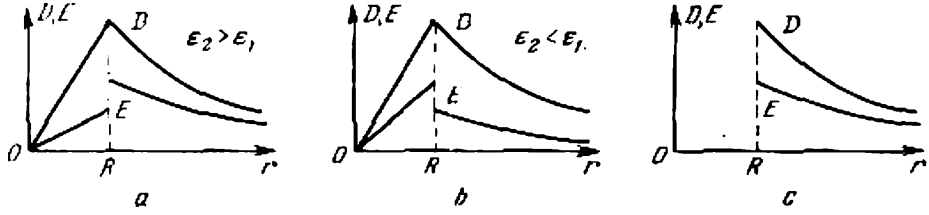


Fig. 16.2.

anteriormente, mediante la fórmula (15.1), o sea, con el origen de coordenadas en el centro

$$E = r_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} = r_0 \frac{\xi}{\varepsilon}\left(\frac{R}{r}\right)^2, \quad r > R, \tag{16.3}$$

mientras que en su interior ($r < R$) el campo no existe: $E = 0$. Efectivamente, en virtud de la simetría el campo podría ser sólo radial y uniforme y con esto para las esferas interiores ($r < R$), $4\pi r^2 D = 0$. En la fig. 16.2, *c* la distribución del campo se muestra gráficamente.

2. Campos con simetría axial. El teorema de Gauss también se emplea exitosamente para hallar campos de simetría axial, semejantes al campo de un hilo infinito uniformemente cargado. Al tratar un hilo y partiendo de la simetría, resulta que las líneas

eléctricas de fuerza son radiales y se disponen con densidad constante. Confeccionando en un segmento del hilo un cilindro coaxial (fig. 16.3, *a*, *b*), vemos que las líneas de fuerza salen sólo a través de su superficie lateral ($S = 2\pi rl$) y el teorema de Gauss nos da:

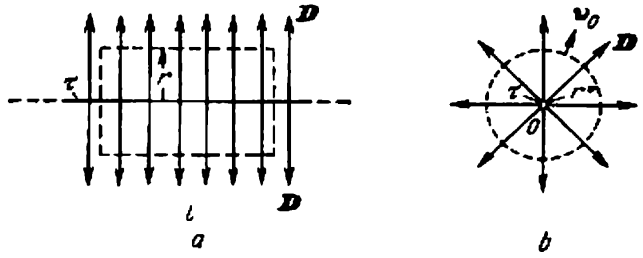


Fig. 16.3.

$2\pi rlD = q$. Designemos por τ la carga q/l que corresponde a la unidad de longitud del hilo y escribamos:

$$E = r_0 \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}. \qquad (16.4)$$

Demos al lector la posibilidad de comprobar que la intensidad del campo de un cilindro infinito de radio R uniformemente cargado ($\rho = \text{const}$) con constante dieléctrica ε_2 y para la constante dieléctrica exterior ($r > R$), ε_1 es

$$E = \begin{cases} r_0 \dfrac{\tau r}{2\pi\varepsilon_2 R^2} = r_0 \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_2}, & r < R, \\ r_0 \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 r} = r_0 \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_1 r}, & r > R, \end{cases} \qquad (16.5)$$

mientras que la intensidad del campo de un cilindro con carga superficial

$$E = r_0 \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r} = r_0 \frac{\xi}{\varepsilon} \frac{R}{r}, \qquad r > R \qquad (16.6)$$

($E = 0$ si $r < R$).

3. Campos de sistemas laminares. Consideremos a continuación una capa plana infinita de grosor $2d$ cargada uniformemente por su volumen. En este caso, la simetría será tal que las líneas de fuerza deberán estar distribuidas con densidad constante en dirección normal a la superficie de la capa. Con objeto de poder aplicar el teorema de Gauss, confeccionemos una superficie cilíndrica que abarque un sector de la capa de área S (fig. 16.4, *a*); las bases del cilindro son paralelas a la superficie de la capa y equidistantes respecto a su plano medio zOx. Según el teorema de Gauss $2SD = q = 2Sd\rho$ (S es simultáneamente el área de la base del cilindro, y el flujo por su superficie lateral es igual a cero). Si, disminuyendo la altura del cilindro, aproximamos sus bases hasta que resulten situadas en el interior de la capa cargada, la superficie

cerrada que se crea contendrá sólo cierta parte de la carga y de acuerdo con este hecho $2SD = q' = 2S|y|\rho$. De ese modo,

$$E = \begin{cases} \pm y_0 \frac{\hat{\xi}}{2\varepsilon_1} = \pm y_0 \frac{\rho d}{\varepsilon_1} & \begin{cases} y > d, \\ y < -d, \end{cases} \\ y_0 \frac{\hat{\xi} y}{2\varepsilon_2 d} = y_0 \frac{\rho y}{\varepsilon_2} & \begin{cases} 0 \leqslant y < d, \\ 0 \geqslant y > -d, \end{cases} \end{cases} \qquad (16.7)$$

siendo $\hat{\xi} = q/S$ la carga que corresponde a la unidad de superficie de la capa y ε_2, ε_1, las constantes dieléctricas de la capa y del

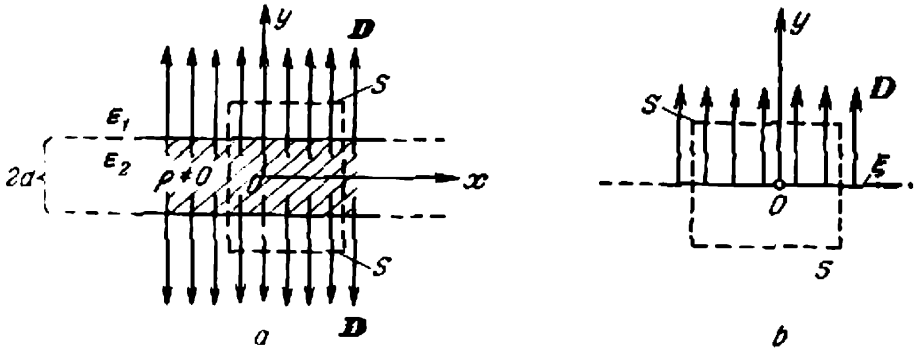


Fig. 16.4.

medio exterior. En la fig. 16.5, *a* se da una gráfica que nos aclara la dependencia hallada.

Ahora, supongamos que el plano $y = 0$ cargado con una densidad superficial ξ, crea un campo sólo en el semiespacio superior ($y > 0$). En este caso, la aplicación análoga del teorema de Gauss

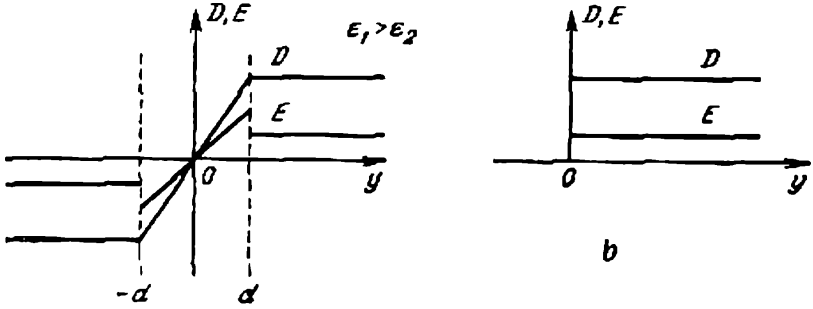


Fig. 16.5.

nos lleva al siguiente resultado:

$$E = y_0 \frac{\xi}{\varepsilon}, \qquad (16.8)$$

lo que también se desprende directamente de la condición límite para D_y (compárese con el § 8, punto 1); véase las figs. 16.4, *b* y 16.5, *b*.

4. Aplicación de las ecuaciones de Poisson y Laplace. Marquemos que todos los resultados anteriormente obtenidos podían haber sido hallados integrando las ecuaciones de Poisson y Laplace determinando, posteriormente, el vector $\boldsymbol{E}$ por la fórmula (14.3). Tal enfoque, en cierto grado más complicado, resulta ser infructuoso si se puede operar directamente con el teorema de Gauss. Pero, partiendo de razones metodológicas, daremos, a pesar de todo, dos ejemplos que nos muestran el contenido de las ecuaciones de electrostática.

Para resolver el problema de una capa cargada uniformemente, la ecuación de Poisson (14.9) toma la forma

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{16.9}$$

siendo $\rho = \text{const} \neq 0$ y $\varepsilon = \varepsilon_2$ para $-d < y < d$; $\rho = 0$ y $\varepsilon = \varepsilon_1$ si $y > d$, $y < -d$ (fig. 16.4, *a*); fuera de la capa, la (16.9) se convierte en la ecuación de Laplace.

Integrando (16.9), escribimos

$$d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}\,dy$$

y luego

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_2}y + A, \\ \varphi &= -\frac{\rho}{2\varepsilon_2}y^2 + Ay + B \end{aligned}\right\} -d < y < d,$$

donde A y B son ciertas constantes desconocidas hasta el momento. Análogamente

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= A', \\ \varphi &= A'y + B' \end{aligned}\right\} y > d; \qquad \left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= A'' \\ \varphi &= A''y + B'' \end{aligned}\right\} y < -d.$$

Como a causa de la simetría del sistema $\boldsymbol{E}(-y) = -\boldsymbol{E}(y)$, es decir,

$$\frac{d\varphi(-y)}{dy} = -\frac{d\varphi(y)}{dy},$$

entonces $A = 0$ y $A' = -A''$. De ese modo,

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{y}_0\frac{d\varphi}{dy} = \boldsymbol{y}_0\frac{\rho}{\varepsilon_2}y, \quad -d < y < d. \tag{16.10a}$$

A continuación, aplicando la condición límite de la (14.12) para $y = d$ ($\xi = 0$, ya que no hay carga superficial), se obtiene

$$-\varepsilon_1 A' + \varepsilon_2\frac{\rho}{\varepsilon_2}d = 0,$$

de donde hallamos A'. De aquí

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{y}_0\frac{\rho d}{\varepsilon_1}, \; y > d \quad \text{y} \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{y}_0\frac{\rho d}{\varepsilon}, \; y < -d. \tag{16.10b}$$

Los resultados obtenidos (16.10a) y (16.10b) coinciden con la (16.7).

Como segundo ejemplo, consideremos un cilindro que porta una carga superficial. La ecuación de Laplace (14.11) en coordenadas cilíndricas toma, en virtud de la (S1.18), el aspecto

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)=0 \qquad (16.11)$$

($\partial/\partial\alpha=0$ y $\partial/\partial z=0$); en el interior del cilindro ($r<R$) no hay campo.

Integrando la ecuación (16.11), obtenemos

$$r\frac{d\varphi}{dr}=A \quad (A=\text{const})$$

y después

$$d\varphi=A\frac{dr}{r},$$

de donde

$$\varphi=A\ln r+B \quad (B=\text{const}).$$

El segundo renglón de las condiciones límites (14.12) toma, en el caso dado, el aspecto

$$-\varepsilon\frac{d\varphi}{dr}=\xi \text{ cuando } r=R,$$

debido a que $A=-\xi R/\varepsilon$. Definitivamente, obtenemos el siguiente resultado:

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{r}_0\frac{d\varphi}{dr}=\boldsymbol{r}_0\frac{\xi}{\varepsilon}\frac{R}{r}, \qquad (16.12)$$

lo que coincide con la (16.6).

5. **Campo de dos hilos cargados.** El resultado (16.4) obtenido en el punto 2 se puede aplicar, empleando el principio de superposición (compárese con el punto 3, § 15), para hallar el campo de varios hilos cargados.

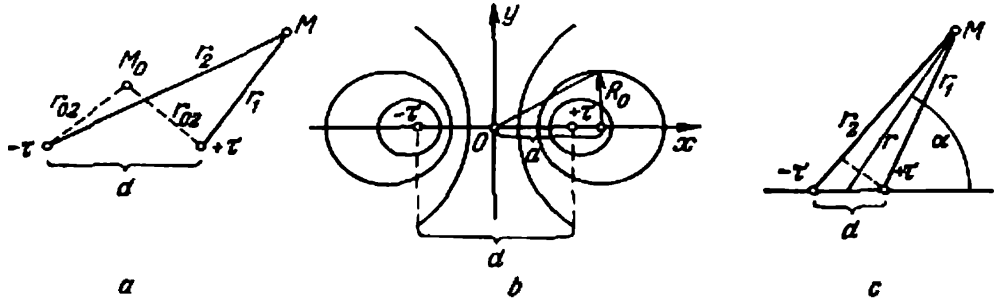


Fig. 16.6.

Tomando dos hilos paralelos a una distancia d con cargas por unidad de longitud, respectivamente, τ y $-\tau$, para cierto punto de observación M (fig. 16.6, *a*), obtenemos

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{r}_{01}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon r_1}+\boldsymbol{r}_{02}\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon r_2} \qquad (16.13)$$

y

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{16.14}$$

A base de la (14.6)

$$\varphi_1 - \varphi_{01} = \int_{M}^{M_0} \boldsymbol{E}_1 \, d\boldsymbol{r}_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_{01}}{r_1}$$

y

$$\varphi_2 - \varphi_{02} = \int_{M}^{M_0} \boldsymbol{E}_2 \, d\boldsymbol{r}_2 = \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_{02}}{r_2},$$

siendo φ_{01} y φ_{02} los potenciales de los campos $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$ en el punto M_0. Supongamos que este punto es equidistante de los dos hilos ($r_{01} = r_{02}$), entonces, a causa de la simetría axial de los campos $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$ y para el valor de éstos dado, $\varphi_{02} = -\varphi_{01}$. Sumando los dos potenciales, obtenemos

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{16.15}$$

Así, el potencial es constante en las superficies que se definen por la ecuación

$$\frac{r_2}{r_1} = k \quad (k = \text{const}). \tag{16.16}$$

Podemos convencernos fácilmente de que esta ecuación representa las superficies de cilindros paralelos a los hilos, pero no coaxiales a ellos. Escribiendo de nuevo la (16.16) en un sistema de coordenadas cartesianas (fig. 16.6, *b*), se tiene que

$$\frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} = k^2, \tag{16.16a}$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} &(x-a)^2 + y^2 = R_0^2, \\ &a = \frac{d}{2}\,\frac{k^2+1}{k^2-1} \quad \text{y} \quad R_0^2 = a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{16.17}$$

Esta es la ecuación de *circunferencias* que son las secciones transversales de cilindros equipotenciales. Sus centros se encuentran en el eje x fuera del segmento $-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$, y sus radios, a medida que *se alejan del origen de coordenadas, aumentan infinitamente.*

Si el punto de observación M está muy alejado ($r \gg d$), entonces

$$r_1 \approx r - \frac{d}{2}\cos\alpha \quad \text{y} \quad r_2 \approx r + \frac{d}{2}\cos\alpha$$

(fig. 16.6, *c*) y la fórmula (16.15) toma el aspecto

$$\varphi \approx \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2r + d\cos\alpha}{2r - d\cos\alpha}. \tag{16.18}$$

Calculando la intensidad del campo E como $-\nabla\varphi$ por medio del (SI.8), en el límite, cuando $d/r \to 0$ y $\tau d = \text{const}$, tendremos

$$E = \frac{\tau d}{2\pi\varepsilon r^2}(r_0 \cos\alpha + \alpha_0 \operatorname{sen}\alpha). \qquad (16.19)$$

Este campo es de un "hilo dipolar" (cada punto de la recta es un dipolo transversalmente orientado); τd es el valor absoluto del momento dipolar, reducido a la unidad de longitud del hilo.

§ 17. Conductores en el campo electrostático. Capacidad

1. Campos y potenciales al haber conductores. Bajo la acción del campo eléctrico, las cargas que se encuentran en los conductores deben ponerse en movimiento. Esto significa que en electrostática, que estudia exclusivamente cargas inmóviles, en el interior de los conductores nunca hay campos. Tal deducción se desprende formalmente de la ecuación (6.6),

$$j = \sigma E, \qquad (17.1)$$

en virtud de la cual, en un medio conductor ($\sigma \neq 0$), cuando hay campo eléctrico ($E \neq 0$) existe corriente ($j \neq 0$). Puesto que no hay corriente ($j = 0$), entonces, si $\sigma \neq 0$ (¡el medio es conductor!), no debe haber campo: $E = 0$.

En electrostática las cargas libres de un cuerpo conductor se encuentran en su superficie, donde ocupan tal posición de equilibrio con la que sus campos en el interior del cuerpo se compensan mutuamente. Al mismo tiempo, en la superficie del conductor tampoco existe la componente tangencial del vector E,

$$E_\tau = 0 \text{ en } S. \qquad (17.2)$$

En efecto, si $E_\tau \neq 0$, habría una corriente tangencial de una densidad $j_\tau = \sigma E_\tau$. Sin embargo, recordemos que la deducción (17.2) ya se desprende de la ausencia de campo en uno de los medios límites (§ 8, punto 1). Ahora, podemos ya decir que respecto a los conductores resulta ser útil el concepto de *carga superficial* caracterizada por la densidad ξ. Así, el campo electrostático existe fuera de los cuerpos conductores y es normal a su superficie, y por lo tanto, para un campo en la superficie del conductor es válida la correlación (8.2)

$$D = \varepsilon_0 \xi \text{ en } S. \qquad (17.3)$$

Por último, el sentido ortogonal de las líneas de fuerza respecto a las superficies conductoras, expresado por la fórmula anterior, significa que en electrostática semejantes superficies son *equipotenciales*. Efectivamente, en virtud de la (17.2) $E = -\tau_0 \nabla_\tau \varphi = -\tau_0 \partial\varphi/\partial\tau = 0$ para toda dirección tangente τ y, por consiguiente,

$$\varphi = \text{const} \text{ en } S. \qquad (17.4)$$

En todos los puntos interiores del conductor el potencial tiene el mismo valor que en su superficie, ya que para $\boldsymbol{E} = 0$ es constante y, en virtud del primer renglón de la (14.12), es continuo en la superficie de separación del cuerpo y el medio exterior. Por esta razón, decimos "potencial del conductor" teniendo en cuenta el valor de la función φ que ésta adquiere en todos los puntos del conductor.

2. Inducción electrostática. Retornando al material estudiado en el párrafo anterior, podemos constatar que las fórmulas (16.3), (16.6) y (16.8) son justas sólo para cuerpos cargados uniformemente ($\xi = \text{const}$). Hablando en general, los conductores de forma más complicada se cargan no uniformemente ($\xi \neq \text{const}$); para poder compararlos, en la fig. 17.1 se muestran los cuadros de ciertos campos.

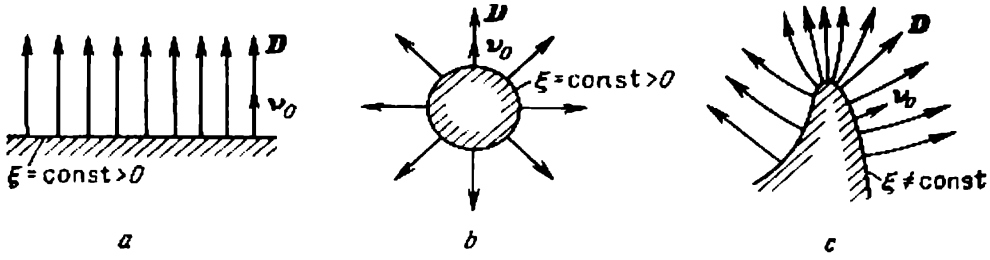


Fig. 17.1.

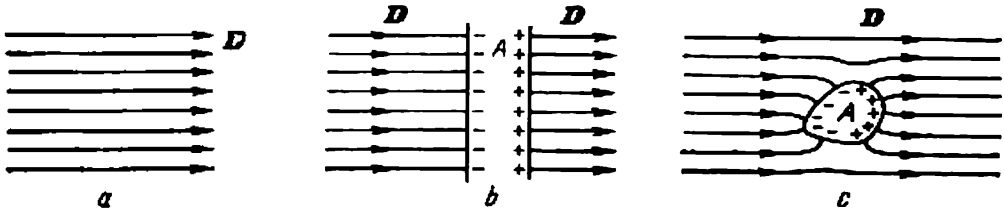


Fig. 17.2.

Ahora, supongamos que en el campo electrostático prefijado (por ejemplo, el campo homogéneo en la fig. 17.2, *a*) se sitúa el conductor *A* *no cargado*. Primeramente, consideremos el caso idealizado cuando *A* es una capa plana conductora infinita perpendicular al campo. De acuerdo con la (17.3) en sus dos superficies se creará una carga distribuida con densidad constante ξ y $-\xi$, respectivamente, (fig. 17.2, *b*); la carga total de la capa ($q = 0$) y la estructura inicial del campo no varían. En otros casos, al introducir el conductor *A*, el campo debe deformarse de manera que las líneas de fuerza sean ortogonales a la superficie conductora (fig. 17.2, *c*). Se crea una carga superficial cuya densidad será, en virtud de la (17.3), igual al valor de *D* en *S*. Al mismo tiempo está claro que la carga *total* del cuerpo será también igual a cero. La carga surgida se denomina "inducida" y el propio fenómeno, *inducción electrostática*.

Cuando varios conductores cargados se aproximan, el campo en la superficie de cada uno de ellos varía y se produce la redistribución de la carga; aquí, la inducción electrostática se manifiesta como la influencia mutua entre los cuerpos.

3. **Planteamiento del problema límite.** Es evidente que en un sistema de conductores la distribución de la carga en cada uno de ellos es de antemano una incógnita y la tarea de electrostática no se restringe a la definición del campo de las cargas prefijadas; no sabemos cómo se distribuye la carga en la superficie de un conductor aislado, salvo en casos muy sencillos, como los que examinamos en el § 16 y otros, análogos a ellos.

Sean dados uno o varios cuerpos conductores situados en un medio homogéneo isótropo. El potencial φ por todo el espacio entre los cuerpos se somete a la ecuación de Laplace (14.11), y en sus superficies toma, debido a la (17.4), valores constantes. Por esto, φ es precisamente la solución del problema límite:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\varphi = 0, \\ &\varphi = \Phi_i \quad \text{en} \quad S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \end{aligned}\right\} \tag{17.5}$$

(S_i son las superficies de los cuerpos, cuyo número es N). Este es el *problema de Dirichlet* (S5.9) que, como sabemos, tiene una sola solución. Por lo tanto, si se ha hallado la función φ que satisfaga la ecuación de Laplace y que adquiera el valor exigido Φ_i en las superficies de los conductores a examinar, podemos con seguridad afirmar que dicha función es el potencial electrostático φ de su campo.

El problema de Dirichlet (17.5) no puede ser planteado si los potenciales de los conductores Φ_i no son conocidos de antemano. Sin embargo, en lugar de los potenciales es suficiente conocer las cargas totales de todos los conductores. En efecto, en el suplemento 5 se indica (pág. 646) que el problema límite tiene, para la ecuación de Laplace, una sola solución al prefijar las integrales $\int \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$. Y puesto que

$$-\varepsilon \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds = q,$$

en virtud de la (14.12) o bien la (17.3), es, ni más ni menos, que la carga total de un conductor con superficie S, de aquí se desprende la unicidad de la solución del problema electrostático en forma de la ecuación de Laplace (14.11) para un sistema de conductores, cuando son prefijadas sus cargas totales.

Los dos conceptos enunciados anteriormente, componen el llamado *teorema de unicidad electrostática*. El valor práctico de este teorema consiste en que nos permite emplear los más diferentes métodos para resolver los problemas electrostáticos sobre los conductores situados en un medio homogéneo ya que, observando ciertas condiciones, nos garantiza la veracidad de los resultados. En realidad, independientemente del modo por medio del que hallamos

la solución φ, siempre podemos comprobar si ella satisface las condiciones de unicidad (es decir, realiza o no los potenciales prefijados o las cargas totales de los conductores) y, por consiguiente, es o no el potencial electrostático del campo a investigar.

4. Imágenes especulares. Como ejemplo de inducción electrostática, consideremos la influencia de una superficie conductora en el campo de una carga puntual. Es interesante que para resolver este problema es suficiente introducir en nuestras consideraciones una carga complementaria (ficticia) que podríamos definir como la "imagen especular" de la carga prefijada, pero con signo contrario. Por lo tanto, para hallar el campo de la carga q dispuesta a una distancia h sobre la superficie conductora P (fig. 17.3, *a*) tomamos

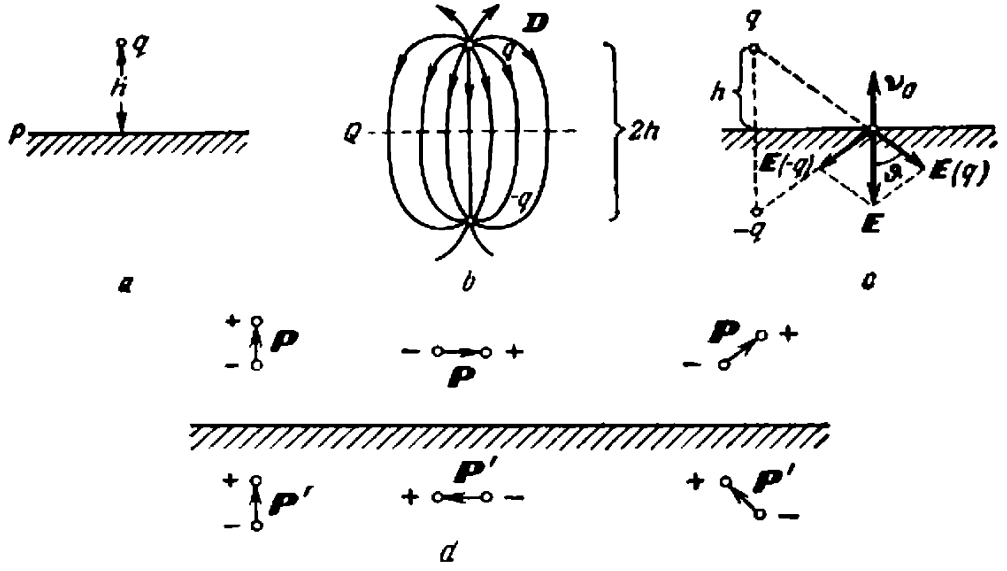


Fig. 17.3.

un sistema de dos cargas iguales por su valor absoluto $|q|$, pero con signos contrarios, alejadas la una de la otra a una distancia $2h$. Investiguemos su campo. Vemos evidentemente que el plano de simetría Q (fig. 17.3, *b*), al que las líneas de fuerza se aproximan bajo un ángulo recto, es, por esta causa, equipotencial. Entretanto, en el problema planteado nos es preciso hallar el campo de una carga situada sobre el plano equipotencial P. Como podemos fácilmente presentir, este campo en nada se diferencia del campo situado en el semiespacio superior sobre el plano Q. Esto significa que lo podemos hallar como el campo de dos cargas mediante la fórmula (15.6), lo que se explica en la fig. 17.3, *c*. En los puntos del plano P el campo tiene, por lo visto, una intensidad

$$E = -\nu_0 2 \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \cos\vartheta = -\nu_0 \frac{qh}{2\pi\varepsilon r^3}. \qquad (17.6)$$

Por consiguiente, de acuerdo con la (17.3), en el plano está distribuida una carga con una densidad

$$\xi = -\frac{qh}{2\pi r^3}. \qquad (17.7)$$

La carga total inducida en P es igual a $-q$, hecho que se establece aplicando el teorema de Gauss o bien integrando ξ por todo el plano (esta operación se la recomendamos al lector). Señalemos que el sistema "carga—plano" puede ser considerado como *dos* cuerpos conductores, uno de los cuales es puntual con cargas q y $-q$. En este caso, la solución del problema electrostático es única y no puede surgir la duda de validez del procedimiento denominado *método de imágenes especulares*.

El método de imágenes especulares puede aplicarse para determinar el campo de cualquier sistema preestablecido de cargas situado sobre un plano conductor; las imágenes se confeccionan por separado para cada una de las cargas y seguidamente se aplica el principio de superposición. Dejemos que el lector compruebe que el campo de un hilo cargado (§ 16, punto 2) dispuesto sobre un plano a una distancia h induce en él una carga de densidad

$$\xi = -\frac{\tau h}{\pi r^2}, \qquad (17.8)$$

siendo r la distancia hasta el hilo. Confeccionando las reflexiones de cargas independientes también podemos obtener las reglas para confeccionar las reflexiones de los momentos dipolares (fig. 17.3, *d*). Como vemos, un dipolo paralelo al plano crea una imagen antiparalela, mientras que un dipolo perpendicular, paralela. Estando el dipolo dirigido arbitrariamente, su momento se descompone en las componentes perpendicular y paralela al plano.

5. **Capacidad.** Detengámonos a continuación nuestra atención en un concepto muy usable de la *capacidad* de un conductor. Como ya hemos dicho, todos los puntos del conductor tienen obligatoriamente un mismo potencial. Además, a conductores aislados de diferentes formas y dimensiones hay que comunicar distintas cargas para obtener cierto potencial prefijado. En este sentido, cada cuerpo conductor se caracteriza por la capacidad C que se determina por una magnitud de la carga para la que el potencial del conductor respecto a la infinidad (14.7) es igual a la unidad. Debido a la linealidad de las ecuaciones de electrostática (cuando el medio es lineal), el potencial y la carga están relacionados por la dependencia $q = C\varphi$, es decir,

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (17.9)$$

La unidad de capacidad es el *faradio* [F].

Como ejemplo, determinemos la capacidad de un conductor esférico de radio R. Ya que el campo fuera de la esfera no se diferencia del campo de una carga puntual (§ 16, punto 1), halla-

remos su potencial aplicando la fórmula (15.2). Suponiendo que en la (15.2) $|r-r'|=R$ (superficie del conductor), se tiene que

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon R}. \tag{17.10}$$

Por esta razón, basándonos en la (17.9), la capacidad de la esfera es

$$C=4\pi\varepsilon R. \tag{17.11}$$

En un sistema de cuerpos conductores, la carga de cualesquiera de ellos está relacionada linealmente con los potenciales de todos los cuerpos:

$$q_i=a_{i1}\varphi_1+a_{i2}\varphi_2+\ldots+a_{ii}\varphi_i+\ldots+a_{ik}\varphi_k+\ldots$$

Esta expresión es más comprensible si se escribe en otro aspecto:

$$q_i+C_{i1}(\varphi_i-\varphi_1)+C_{i2}(\varphi_i-\varphi_2)+\ldots+C_{ii}\varphi_i+\ldots+C_{iN}(\varphi_i-\varphi_N),$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{17.12}$$

donde se considera un sistema de N cuerpos. El coeficiente C_{ii} se llama *capacidad propia* del conductor i, mientras que C_{ik}, *capacidades mutuas* de los conductores i y k. Las capacidades propias de los conductores de un sistema se distinguen, naturalmente, de las capacidades de idénticos conductores aislados. De igual modo, las capacidades mutuas de pares por separado de conductores se determinan no sólo por los dos conductores dados, sino que por todos los demás; podemos demostrar que $C_{ik}=C_{ki}$. La expresión (17.12) es un sistema de N ecuaciones algebraicas lineales respecto a los potenciales (diferencias de potencial), para cargas de los conductores y coeficientes de capacidad C_{ik} prefijados.

Un sistema de dos conductores protegidos contra las influencias exteriores se llama *condensador*. Indiquemos de paso que la protección total contra los campos electrostáticos exteriores se consigue introduciendo el objeto en el interior de una cubierta conductora cerrada, llamada *pantalla electrostática*. Todos campos exteriores inducen una carga en la superficie externa de la pantalla, mientras que en su interior, el campo de las cargas exteriores es igual a cero, como sucede en un conductor continuo (si en un conductor donde nunca hay campo se hace una cavidad, nada debe variar). El condensador ideal más sencillo, es el sistema de dos cuerpos, uno de los cuales se encuentra en el interior del segundo (fig. 17.4, *a*). En la cavidad se encuentra sólo el campo creado por la carga del cuerpo interior q que induce en la superficie interior de la pantalla una carga $-q$, lo que se demuestra aplicando el teorema de Gauss a cierta superficie cerrada, situada en el interior de una pantalla y que circunda la cavidad. El flujo del vector $\boldsymbol{D}$ que pasa por dicha superficie, marcada en la fig. 17.4, *a* a trazos, es igual a cero, ya que en el conductor no hay campo. Por dicha razón, la carga total en el interior de la superficie es también nula y de aquí se desprende que la carga q dentro del conductor

se compensa con la carga $-q$, inducida en la superficie interior de la pantalla.

La *capacidad del condensador* es la relación

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}, \tag{17.13}$$

siendo q la carga de un conductor y $\Delta\varphi$, la diferencia de potencial de los conductores, además, ambas magnitudes deben tener el mismo signo.

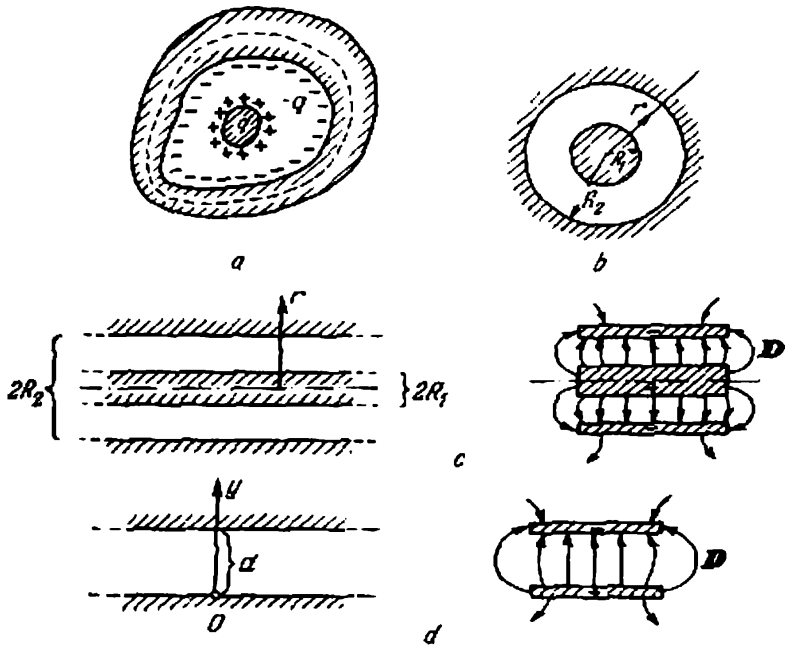


Fig. 17.4.

6. Cálculo de la capacidad de un condensador. Un ejemplo de condensador ideal nos da el sistema de dos superficies conductoras esféricas concéntricas (fig. 17.4, b). A base de las (14.6) y (16.3), la diferencia de potencial de los dos conductores se determina como

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right). \tag{17.14}$$

De aquí, según la fórmula (17.13),

$$C = \frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \tag{17.15}$$

De forma análoga, para superficies cilíndricas coaxiales infinitas (fig. 17.4, *b* a la izquierda), en virtud de las (14.6) y (16.4),

$$\Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}, \qquad (17.16)$$

y la capacidad, que corresponde a la unidad de longitud, es igual a

$$C' = \frac{\tau}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}. \qquad (17.17)$$

Para los condensadores cilíndricos reales de longitud finita (fig. 17.4, *c* a la derecha), el resultado obtenido puede emplearse sólo aproximadamente, ya que el campo en los extremos se diferencia considerablemente del campo radial longitudinalmente homogéneo.

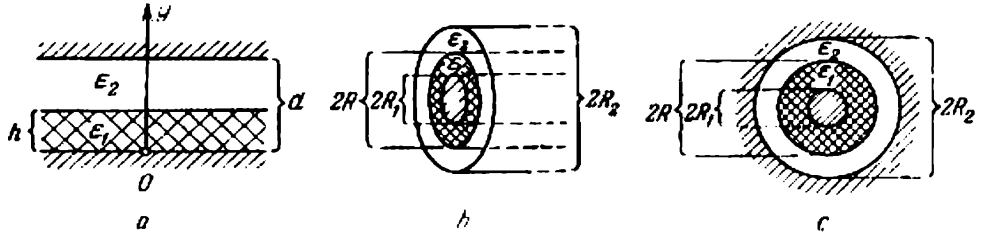
Entre los planos paralelos conductores, el campo es homogéneo y se define por la expresión (16.8), fig. 17.4, *d* a la izquierda. La diferencia de potencial entre los planos es igual a

$$\Delta\varphi = \frac{\xi}{\varepsilon}\int_0^d dy = \frac{\xi}{\varepsilon}d. \qquad (17.18)$$

Es decir, la capacidad que corresponde a la unidad del área de un sistema de planos paralelos, será

$$C'' = \frac{\xi}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon}{d}. \qquad (17.19)$$

Esta fórmula, como la deducida anteriormente (17.17), puede emplearse para calcular condensadores planos reales (fig. 17.4, *d* a la derecha) sólo para obtener resultados aproximados debido a la deformación del campo en los extremos.



a *b* *c*

Fig. 17.5.

Finalmente, damos las expresiones de capacidad para sistemas de dos capas:

plano (fig. 17.5, *a*)

$$C'' = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 h + \varepsilon_1(d-h)}, \qquad (17.20)$$

cilíndrico (fig. 17.5, *b*)

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 \ln \frac{R}{R_1} + \varepsilon_1 \ln \frac{R_2}{R}}, \tag{17.21}$$

esférico (fig. 17.5, *c*)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 R_1 R R_2}{\varepsilon_2 R_2 (R - R_1) + \varepsilon_1 R_1 (R_2 - R)}. \tag{17.22}$$

En todos estos casos, las líneas de fuerza están dirigidas por la normal a la superficie de separación de los medios y por esta razón, el vector $\boldsymbol{D}$ no sufre salto. Cuando el sistema es plano $\boldsymbol{D} = \gamma_0 \xi$, por lo que

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \gamma_0 \dfrac{\xi}{\varepsilon_1}, & 0 < y < h, \\ \gamma_0 \dfrac{\xi}{\varepsilon_2}, & h < y < d \end{cases}$$

y en lugar de la (17.18)

$$\Delta\varphi = \frac{\xi}{\varepsilon_1} \int_0^h dy + \frac{\xi}{\varepsilon_2} \int_h^d dy = \xi \left(\frac{h}{\varepsilon_1} + \frac{d-h}{\varepsilon_2} \right),$$

de la que se obtiene la fórmula (17.20). La deducción de las fórmulas (17.21) y (17.22) se la dejamos al lector.

§ 18. Sistemas de dipolos y polarización de un dieléctrico

1. Sistema neutral de cargas. Retornemos a las cuestiones consideradas en el § 15, puntos 3 y 4. Sea un sistema de cargas q_i iguales por su valor absoluto y en su conjunto *neutra*, es decir,

$$\sum_i q_i = 0. \tag{18.1}$$

Designaremos su *momento eléctrico* por el vector

$$\boldsymbol{p} = \sum_i q_i \boldsymbol{r}_i, \tag{18.2}$$

siendo $\boldsymbol{r}_i$ los radios vectores de las cargas q_i (¡puntuales!) referidos a cualquier origen de coordenadas; podemos convencernos con facilidad de que la magnitud de $\boldsymbol{p}$ no depende de la disposición del origen de coordenadas.

En caso particular, cuando tenemos dos cargas ($q_1 = -q$ y $q_2 = q$) llegamos a la definición del momento eléctrico dado en el § 15, punto 4. Efectivamente, (fig. 18.1),

$$\boldsymbol{p} = q(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = q\boldsymbol{l},$$

donde $\boldsymbol{l}$ es un vector dirigido desde la carga negativa a la positiva y que es igual por su valor absoluto a la distancia entre las cargas.

Determinemos el potencial del sistema neutral por la fórmula (15.7). Si la distancia desde cualesquiera de las cargas del sistema hasta el punto de observación es considerablemente mayor que todas las distancias entre las cargas, el origen de coordenadas puede ser escogido de tal manera que para todas las i, $r \gg r_i$. Además, los términos de la suma (15.7) es preferible transformarlos del modo siguiente:

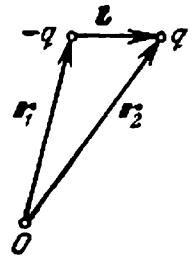


Fig. 18.1.

$$\frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} = \frac{q_i}{\sqrt{r^2 - 2\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_i + r_i^2}} = \frac{q_i}{r}\left(1 + \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_i}{r^2} + \ldots\right),$$

en donde han sido despreciados los términos de orden superior de pequeñez. Debido a la (18.1), la suma de tales sumandos lleva a transformar la fórmula (15.7) en la siguiente:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}\sum_i q_i\boldsymbol{r}_i = \frac{\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}_0}{4\pi\varepsilon r^2}, \qquad (18.3)$$

donde ha sido utilizada la definición (18.2). En el límite, cuando $\frac{r_i}{r} \to 0$ y $p = \text{const}$, la fórmula se hace exacta. Comparando las (18.3) y (15.12), advertimos que un sistema neutral de cargas con momento $\boldsymbol{p}$ se comporta como un dipolo con igual momento.

Es natural, que un sistema neutral de cargas puntuales puede considerarse como un *sistema de dipolos* y al calcular el momento por la fórmula (18.2) las cargas de signos contrarios pueden unirse a pares hallando, previamente, los momentos de los pares $\boldsymbol{p}_i$. Entonces

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i. \qquad (18.4)$$

Supongamos, por fin, que examinamos un sistema neutral compuesto de una gran cantidad de cargas; vamos a considerar que incluso en cada elemento de volumen ΔV relativamente pequeño, el número de cargas es muy grande. Si $\boldsymbol{p}_{\Delta V}$ es el momento del sistema de cargas situadas en ΔV, después de confeccionar la fracción $\boldsymbol{p}_{\Delta V}/\Delta V$, obtendremos el momento referido a la unidad de volumen. Seguidamente, introducimos la magnitud

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\boldsymbol{p}_{\Delta V}}{\Delta V}, \qquad (18.5)$$

donde el símbolo $\Delta V \to 0$ tiene el mismo sentido convencional que al obtener las fórmulas (1.6), (1.7), etc. (la tendencia de ΔV a cero es posible para cierto medio continuo idealizado que sustituye el sistema dado de cargas y en el que la división del volumen debe

ser finita). La magnitud $\boldsymbol{P}$ es la *densidad del momento eléctrico* de un medio convencional que sustituye un sistema de cargas.

El concepto de la densidad $\boldsymbol{P}$ es útil en múltiples casos. Por ejemplo, a cuenta de cierta generalización podemos retornar de nuevo a un sistema esencial discreto, e incluso describir un medio que sólo contenga un dipolo. En este último caso, es suficiente tomar

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{18.6}$$

siendo $\boldsymbol{p}$ el momento de este dipolo situado si $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$, y $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ es la δ-función (suplemento 2).

2. Polarización de un dieléctrico. Al situar un dieléctrico en un campo electrostático éste se deforma, lo mismo que al ubicar en él un cuerpo conductor: en caso contrario, hablando en general, no se satisfarían las condiciones límites. Por ejemplo, si al principio el campo es homogéneo (fig. 18.2, *a*) y el cuerpo tiene forma

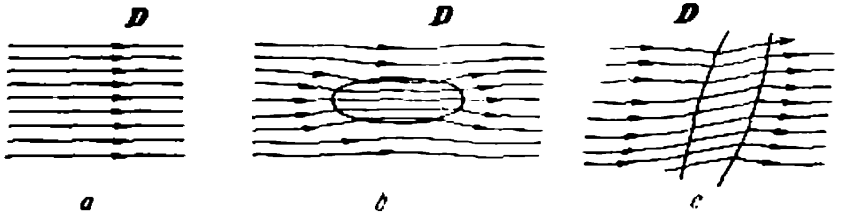


Fig. 18.2.

de elipsoide, al encontrarse un dieléctrico en el campo, este último resulta ser tal como se muestra en la figura 18.2, *b*, *c*: en el interior del cuerpo es paralelo y homogéneo (lo mismo sucede con una esfera, cilindro infinito y capa plana que son formas particulares de la elipsoide). Para hallar el campo hay que resolver el problema límite lo que se mostrará en el § 20. Por el momento, fijaremos nuestra atención en los procesos interiores que transcurren en el dieléctrico.

La polarización del medio (§ 5, punto 1) es un conjunto de procesos que transcurren en él bajo la acción del campo eléctrico y que ejercen en el mismo campo una influencia inversa: el campo "interior", creado a causa de la deformación de las partículas de la materia, se superpone en el campo inicial "exterior". En virtud de la (5.1), para una misma intensidad $\boldsymbol{E}$ del campo, la inducción eléctrica $\boldsymbol{D}$ en un dieléctrico se diferencia de la inducción $\boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$ en el vacío por la magnitud $\boldsymbol{P}$, llamada polarizabilidad:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{P}. \tag{18.7}$$

La descripción macroscópica de la polarización en electrostática basada en esto, se determina totalmente por la correlación entre la inducción $\boldsymbol{D}$ y la intensidad del campo $\boldsymbol{E}$ y toma el aspecto de la ecuación (14.1 c).

Sin embargo, ahora podemos completar tal descripción puramente fenomenológica, con la representación interior de la polarización que, aunque es esquemática, será útil para aclarar la esencia de los fenómenos.

Se denominan *ligadas* aquellas cargas que en el interior de los átomos (iones) y moléculas no pueden desplazarse a distancias macroscópicamente considerables; esta expresión fue empleada en el § 5. En electrostática debemos examinar solamente dieléctricos ideales, es decir, privados de conductibilidad. En realidad, éstos son medios compuestos de cargas ligadas y mutuamente equilibradas. Además, debido a la simetría de distribución de la carga, cada molécula puede no tener momento dipolar, pero, bajo la influencia del campo, la molécula en conjunto adquiere cierto momento $\boldsymbol{p}$ (fig. 18.3, *a*). Si por el contrario, desde el principio,

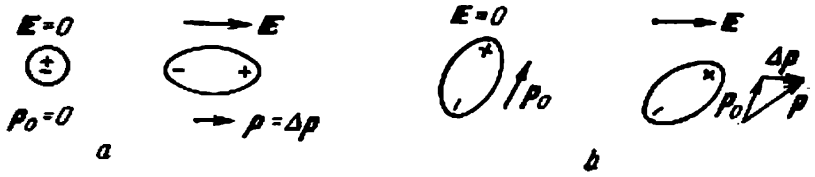


Fig. 18.3.

la molécula tiene un momento eléctrico $\boldsymbol{p}_0$, entonces con mayor facilidad que la deformación se produce su orientación en el campo eléctrico (fig. 18.3, *b*), la que puede apreciarse como el incremento del momento eléctrico $\boldsymbol{p}_0$ a una magnitud $\Delta\boldsymbol{p}$ paralela al campo:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + \Delta\boldsymbol{p}, \quad \Delta\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{E}.$$

En general, en límites prácticamente amplios, el momento dipolar complementario es proporcional al vector $\boldsymbol{E}$ del campo:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + \alpha\boldsymbol{E}. \tag{18.8}$$

En el caso, cuando sin campo exterior una microparticula está privada de momento, aquí hay que tomar $\boldsymbol{p}_0 = 0$; a causa de la proporcionalidad de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{E}$ podemos, al mismo tiempo, decir que la fuerza que deforma el campo se equilibra, al parecer, por la fuerza de elasticidad.

Tomemos cualquier región macroscópica ΔV que contiene $N_{\Delta V}$ particulas y, considerándola como un sistema de dipolos (es decir, como el sistema neutral de cargas descrito anteriormente en el punto 1), calculemos el momento eléctrico total $\boldsymbol{p}_{\Delta V}$. A base de la (18.4)

$$\boldsymbol{p}_{\Delta V} = \sum_i^{(\Delta V)} \boldsymbol{p}_i = \sum_i^{(\Delta V)} \boldsymbol{p}_{0i} + N_{\Delta V}\alpha\boldsymbol{E} = N_{\Delta V}\alpha\boldsymbol{E}, \tag{18.9}$$

ya que en el caso de $\boldsymbol{p}_{0i} \neq 0$, la suma $\sum \boldsymbol{p}_{0i}$ se convierte en cero debido a la orientación caótica inicial de los momentos eléctricos de partículas por separado. Reduciendo el momento $\boldsymbol{p}_{\Delta V}$ al volu-

men ΔV y pasando al límite, como lo hicimos en la (18.5) obtenemos en cierto punto la densidad del momento eléctrico del dieléctrico polarizado:

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\boldsymbol{P}_{\Delta V}}{\Delta V} = \alpha N' \boldsymbol{E} \quad \left(N' = \frac{dN}{dV} \right). \tag{18.10}$$

El resultado obtenido lo escribimos en la forma siguiente:

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi^e \boldsymbol{E} \quad \left(\chi^e = \frac{1}{\varepsilon_0} \alpha N' \right). \tag{18.11}$$

Ahora, resta cerciorarse de que el vector de la densidad del momento eléctrico $\boldsymbol{P}$ que, como $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{D}$, es función de las coordenadas para un medio continuo macroscópico, resulta ser, ni más ni menos, que la *polarizabilidad* $\boldsymbol{P}$, componente de la (18.7) y χ^e es la *susceptibilidad eléctrica* (§ 5, puntos 1 y 2).

3. Polarizabilidad y cargas ligadas. Pues bien, mostremos que en la correlación (18.7) toma parte la magnitud $\boldsymbol{P}$ determinada precisamente por la fórmula (18.11).

Supongamos, que a un medio con permitividad constante ε se ha introducido la distribución de una carga, caracterizada por la densidad ρ. En cierto punto $M(\boldsymbol{r})$ el potencial electrostático φ se determina por medio de la (15.4), es decir,

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dv'. \tag{18.12}$$

Si se utiliza la definición deducida anteriormente en el punto 2 de un dieléctrico como sistema de cargas ligadas en el vacío, tendremos que

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_d \tag{18.13}$$

donde, en virtud de la (15.4),

$$\varphi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dv' \tag{18.14}$$

es el potencial que se crea por la distribución prefijada de las cargas en el vacío ($\varepsilon = \varepsilon_0$), mientras que φ_d es el potencial determinado por todos los dipolos del modelo tomado del medio.

Con objeto de calcular φ_d se toma, primeramente, en consideración que un elemento suficientemente pequeño de un dieléctrico actúa como un dipolo con el momento $\boldsymbol{P}_{\Delta V}$ y crea un potencial que designaremos por $\Delta\varphi_d$. Este último se determina directamente por la fórmula (15.12a):

$$\Delta\varphi_d(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \Delta V',$$

mientras que el potencial de un sistema de dipolos equivalente a todo el dieléctrico, se halla integrando esta magnitud respecto al

volumen total:

$$\varphi_d(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv'. \qquad (18.15)$$

Según las (S1.11), (S1.36)

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\ \mathrm{grad}'\ \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

y a continuación, teniendo en cuenta (S1.30),

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\ \mathrm{grad}'\ \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \mathrm{div}'\ \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{\mathrm{div}'\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

Sobre esta base transformamos la expresión subintegral (18.15), empleando también el teorema de Ostrogradski—Gauss (S1.24). De esta forma se obtiene

$$\varphi_d(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\oint_S \frac{\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,d\boldsymbol{s}' - \int_V \frac{\mathrm{div}'\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv'\right\}. \qquad (18.16)$$

Supongamos que el medio dieléctrico a examinar ocupa todo el espacio. Tomemos el volumen V en forma de una esfera con radio infinitamente creciente y cuyo centro está ubicado en el punto de observación $M(\boldsymbol{r})$ y convezcámonos de que la integral de superficie en la (18.16) desaparece. Efectivamente, el campo $\boldsymbol{E}$ que se crea por la distribución preestablecida de la carga, a medida de aumentar la distancia, se aproxima al campo de una carga puntual $q = \int_V \rho\,dv$, situada en el centro de la esfera. Esto significa, que expresando $\boldsymbol{P}$ por $\boldsymbol{E}$ mediante (18.11), tendremos

$$\lim_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\to\infty} \oint_{S=4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,d\boldsymbol{s}' =$$

$$= \lim_{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\to\infty} 4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\varepsilon_0\chi^e \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} = 0.$$

Como resultado, el potencial creado por el modelo dipolar de un dieléctrico (con todas las cargas ligadas), es igual a

$$\varphi_d(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\mathrm{div}'\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv', \qquad (18.17)$$

lo que nos da la posibilidad de expresar el potencial total φ en forma de la suma (18.13), del modo siguiente:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}') - \mathrm{div}\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv'. \qquad (18.18)$$

Ahora, por último, podemos hacer deducciones del hecho de que las fórmulas (18.12) y (18.18) de manera diferente expresan una

misma función $\varphi(r)$ y, por consiguiente,

$$\frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{\rho - \operatorname{div} P}{\varepsilon_0}.$$

Valiéndonos de las ecuaciones (14.1b) y (14.1c), de aquí obtenemos

$$\operatorname{div} D = \operatorname{div}(D_0 + P) \quad (D_0 = \varepsilon_0 E), \tag{18.19}$$

lo que concuerda con la (18.7).

Retornemos a la expresión (18.17). Puesto que el potencial φ_d se crea por el sistema de cargas ligadas de un modelo de dieléctrico situadas en el vacío, de acuerdo con la (15.4) debemos escribir

$$\varphi_d(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_{\text{lig}}(r')}{|r - r'|} dv'. \tag{18.20}$$

Comparando las (18.17) y (18.20), obtenemos una correlación que establece la relación entre la polarizabilidad P y la densidad de cargas ligadas ρ_{lig}:

$$\rho_{\text{lig}} = -\operatorname{div} P. \tag{18.21}$$

Como conclusión del párrafo, señalemos que hasta el momento hemos ignorado el fenómeno llamado polarización espontánea; sobre este fenómeno hablaremos en el § 21, punto 4, al tratar la imanación espontánea.

§ 19. Energía del campo electrostático

1. Energía y carga. Como sabemos (§ 11, punto 1), en el espacio donde existe un campo electrostático la energía W^e está distribuida con una densidad

$$W^e = \frac{ED}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2}. \tag{19.1}$$

Es decir, al calcular la energía de un campo electrostático ubicada en cierta región V y en virtud de la (14.3), tenemos

$$W^e = \frac{1}{2} \int_V ED\, dv = -\frac{1}{2} \int_V D \operatorname{grad} \varphi\, dv. \tag{19.2}$$

Transformando la expresión subintegral por medio de la fórmula (S1.30) y aplicando el teorema de Ostrogradski—Gauss (S1.24), así como sustituyendo div D por ρ, obtenemos

$$W^e = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi\, dv - \frac{1}{2} \oint_S \varphi D\, ds. \tag{19.3}$$

Para determinar la energía total del campo hay que difundir la integración por todo el espacio. De modo semejante a lo realizado en el § 18, punto 3, tomamos el volumen V en forma de

una esfera del radio infinitamente creciente y con el centro en la región de distribución de la carga o bien a una distancia finita de ella (se sobreentiende que dicha región es limitada). En tal caso, la integral de superficie en la (19.3) desaparece ya que a distancias suficientemente grandes, la distribución que hemos tomado se manifiesta como una carga puntual $q = \int_V \rho\, dv$ ubicada en el centro de la esfera $M(r')$. Efectivamente,

$$\lim_{|r-r'|\to\infty} \oint_{S=4\pi|r-r'|^2} \varphi(r)\, \boldsymbol{D}(r)\, ds =$$

$$= \lim_{|r-r'|\to\infty} 4\pi |r-r'|^2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |r-r'|} \frac{q}{4\pi |r-r'|^2} = 0$$

(por todo el espacio, fuera de cierta región limitada, $\varepsilon = \varepsilon_0$). Por esto la energía de un campo electrostático, creado por una distribución limitada de la carga en el espacio, es igual a

$$W^e = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi\, dv. \tag{19.4}$$

Con todo podemos ver, que la integración se difunde prácticamente sólo por la región (que posiblemente consta de partes separadas) que contiene la carga ($\rho \neq 0$). La energía del campo electrostático se expresa, por lo tanto, no considerando directamente su contenido en todo el espacio infinito, como se verifica al integrar W^e (19.1), sino a través de los manantiales del campo, o sea, de las cargas.

2. Caso de conductores. Si se examina un cuerpo conductor cargado en un espacio en el que no hay otras cargas, en la (19.4) $\varphi = \text{const}$, y la integral $\int_V \rho\, dv$ conserva el sentido de la carga total del cuerpo q ya que, si lo deseamos, podemos suponer que la carga dispuesta en forma de una capa fina cerca de la superficie del conductor, es espacial. Además, incluso para una carga superficial ideal, en virtud de la (S2.7),

$$\int_V \rho\, dv = \oint_S \int_{\nu'-a}^{\nu'+a} \xi\delta(\nu-\nu')\, ds\, d\nu = \oint_S \xi\, ds = q,$$

siendo ν la coordenada de la normal a la superficie del conductor (en la última $\nu = \nu'$). Por consiguiente, mediante la expresión (19.4) obtenemos

$$W^e = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{1}{2} C\varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \tag{19.5}$$

(aquí empleamos también la correlación (17.9)).

Mostremos un ejemplo sencillo de que el cálculo de la energía según la fórmula (19.5) nos da, efectivamente, el mismo resultado que la integración de la densidad w^e (19.1) por todo el espacio

que el campo ocupa. Para una esfera conductora con carga q, a base de la (16.3), $w^e = 0$ para $0 \leqslant r < R$ y $w^e = q^2/32\pi^2\varepsilon r^4$ si $r \geqslant R$. Integrando esta función en un sistema esférico de coordenadas, hallamos que

$$W^e = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon} \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r^2}\, dr\, d\vartheta\, d\alpha = \frac{q}{8\pi\varepsilon R} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2},$$

lo que confirma el resultado (19.5).

En el caso cuando tenemos un sistema de N cuerpos conductores con potenciales φ_i y cargas totales q_i, partiendo de la (19.4), obtenemos

$$W^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \int_{V_i} \rho_i\, dv = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i q_i. \tag{19.6}$$

Aplicando esta fórmula a un condensador ($N = 2$, $q_1 = q$ y $q_2 = -q$), tomando en consideración la (17.13), tenemos

$$W^e = \frac{q}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{C}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{q^2}{2C}. \tag{19.7}$$

3. **Energía propia y mutua.** Se ha señalado anteriormente (§ 13, punto 3) que a la energía del campo electrostático no se aplica el principio de superposición: al reunir los elementos en un sistema, a su *propia* energía se adiciona la energía de interacción o bien, energía *mutua*. Cuando tenemos un sistema de conductores, el potencial de cada uno de ellos puede expresarse como la suma

$$\varphi_i = \dot{\varphi}_i + \tilde{\varphi}_i, \tag{19.8}$$

siendo $\dot{\varphi}_i$ el potencial del i-ésimo conductor al faltar todos los demás y $\tilde{\varphi}_i$, el potencial creado por la acción de estos últimos. Debido a esto, escribimos la expresión de la energía (19.6) en la forma siguiente:

$$W^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \dot{\varphi}_i q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \tilde{\varphi}_i q_i, \tag{19.9}$$

donde

$$\dot{W}^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \dot{\varphi}_i q_i \quad \text{y} \quad \tilde{W}^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \tilde{\varphi}_i q_i$$

es la energía propia y mutua del sistema de conductores.

Determinemos la energía propia y mutua de dos esferas conductoras (radios R_1 y R_2, cargas q_1 y q_2), pero la distancia entre los centros de las esferas r supera considerablemente R_1 y R_2. Utilizando la (17.10), tenemos

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{q_{1,2}}{4\pi\varepsilon R_{1,2}} \quad \text{y} \quad \dot{W}^e = \frac{1}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{q_1^2}{R_1} + \frac{q_2^2}{R_2}\right), \tag{19.10}$$

y como cada una de las esferas en el campo de la segunda puede considerarse como carga puntual, entonces, en virtud de la (15.2),

$$\tilde{\varphi}_{1,2} = \frac{q_{2,1}}{4\pi\varepsilon r} \text{ y } \tilde{W}^e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r}. \tag{19.11}$$

Referirse a la energía de una carga puntual ideal no tiene sentido: la magnitud $\tilde{W}^e$ (19.5) se invierte, en este caso, en la infinidad junto con φ. Aquí se manifiesta la imperfección de la noción de la carga concentrada en un punto. Sin embargo, haciendo uso de la expresión (19.10), podemos afirmar que para un sistema de cargas puntuales el concepto de la energía mutua $\tilde{W}^e$ conserva su sentido físico, ya que todos los potenciales $\tilde{\varphi}_i$ son finitos.

También podemos examinar la energía de interacción de cargas puntuales *con el campo prefijado. El trabajo que se efectúa al* extraer de un campo electrostático con intensidad $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ una carga q, es igual a $q\varphi$. Por consiguiente, $q\varphi$ expresa la energía de interacción de la carga con el campo que designaremos por $\tilde{W}^E$. Para un sistema de N cargas

$$\tilde{W}^E = \sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i, \tag{19.12}$$

siendo φ_i el potencial del campo $\boldsymbol{E}$ en el punto en que está situada la carga q_i.

En particular, para un dipolo ($N = 2$, $q_1 = -q$ y $q_2 = q$)

$$\tilde{W}^E = q(\varphi_2 - \varphi_1) q\Delta\varphi. \tag{19.13}$$

Por esta razón, cuando el dipolo es ideal

$$\tilde{W}^E = q\frac{\partial\varphi}{\partial l} l = ql \operatorname{grad}_l \varphi = -\boldsymbol{pE}, \tag{19.14}$$

es decir, la energía de interacción con el campo $\boldsymbol{E}$ se determina por su momento $\boldsymbol{p}$. En la misma medida en la que la fórmula (19.14) puede ser utilizada en lugar de la (19.13), como es posible mostrar, ella resulta ser también válida para un sistema neutral arbitrario de cargas caracterizado por su momento eléctrico (18.2).

§ 20. Deformación de un campo homogéneo por conductores y dieléctricos de forma sencilla

1. Observaciones generales. Cilindro conductor. Cuando en un campo electrostático se introduce un cuerpo conductor en su superficie aparecen cargas inducidas (§ 17, punto 2), mientras que siendo el cuerpo dieléctrico, se produce la polarización del medio (§ 18, punto 2). En uno y otro caso, debido a la creación de un campo complementario, el inicial, hablando en general, se deforma.

Además, a pesar de la diferencia física entre los procesos de inducción electrostática y la polarización de un dieléctrico, los problemas sobre los conductores y dieléctricos introducidos en determinados campos, se estudian de igual forma. Efectivamente, el campo resultante y su potencial en cualquier medio deben satisfacer las ecuaciones principales de electrostática (§ 14), y en la superficie del cuerpo, sea éste conductor o dieléctrico, ciertas condiciones límites.

Por ejemplo, en un campo electrostático homogéneo, paralelo al eje x,

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{x}_0 E_1, \tag{20.1}$$

se introduce un cilindro conductor o dieléctrico, cuyo eje es perpendicular a la dirección de dicho campo (fig. 20.1, *a*). En virtud

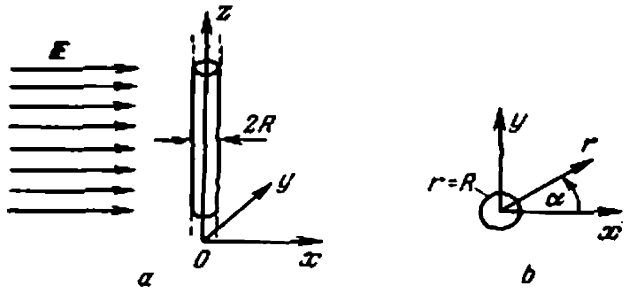


Fig. 20.1.

de la (14.6), el potencial del campo $\boldsymbol{E}_1$ es

$$\varphi_1 = \varphi_{01} - \int_0^x \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{x}_0 \, dx = \varphi_{01} - E_1 x,$$

siendo φ_{01} el potencial en el plano $x = 0$, o bien en un sistema cilíndrico de coordenadas (fig. 20.1, *b*)

$$\varphi_1 = \varphi_{01} - E_1 r \cos \alpha. \tag{20.2}$$

Primeramente consideremos un cilindro conductor, cuya superficie ($r = R$) debe ser equipotencial (§ 17, punto 1). Como para $r = R$, el potencial del campo inicial $\boldsymbol{E}_1$ no es constante, llegamos a la conclusión de que al introducir en el campo $\boldsymbol{E}_1$ un cilindro conductor se provoca la creación de un campo complementario $\boldsymbol{E}_2$ que equilibra el potencial en su superficie. Designando el po encial del campo resultante $\boldsymbol{E}$ por el símbolo φ, obtendremos la condición

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \text{const} \quad \text{si} \quad r = R, \tag{20.3}$$

siendo φ_2 el potencial del campo $\boldsymbol{E}_2$. Esta condición puede ser satisfecha sólo en el caso, si φ_2 varía para $r = R$ de la misma forma que φ_1, es decir, si es una función cosenoidal del ángulo α.

El potencial φ_2 debe satisfacer la ecuación de Laplace. La solución general de dicha ecuación en coordenadas cilíndricas se ha hallado en el suplemento 7; φ_2 debe considerarse como el producto de las funciones $\mathcal{R}(r)$ y $\mathcal{A}(\alpha)$, cuyo aspecto general se da mediante las fórmulas (S7.4) y (S7.5). Como, según las (20.3) y (20.2) la dependencia azimutal tiene la forma de $\cos\alpha$, en la solución general

$$\varphi_2 = (A\cos n\alpha + B\operatorname{sen} n\alpha)(Cr^n + Dr^{-n}) \qquad (20.4)$$

hay que tomar $n=1$ y $B=0$ y, ya que el potencial φ_2 no puede crecer infinitamente a medida que se aleja del cilindro, también $C=0$. Por consiguiente,

$$\varphi_2 = Kr^{-1}\cos\alpha, \qquad (20.5)$$

donde $K=Ad$ es hasta el momento una constante desconocida.

Introduciendo las expresiones (20.2) y (20.5) en la condición límite (20.3), advertimos que esta última se cumple cuando

$$K = E_1R^2, \qquad (20.6)$$

ya que para este valor de K, la dependencia azimutal del potencial en la superficie del cilindro

$$\varphi(R) = \varphi_{01} - E_1R\cos\alpha + KR^{-1}\cos\alpha$$

se compensa y éste resulta ser constante. En realidad, después de hallar el valor de K por medio de la (20.5), podemos considerar resuelto el problema de Dirichlet (S5.9) para un cilindro y la condición límite (20.3).

Conociendo φ_1 y φ_2, el potencial φ del campo resultante $\boldsymbol{E}$ se halla como la suma de los dos primeros. Empleando las (20.2), (20.5) y (20.6), obtenemos

$$\varphi = \varphi_{01} - E_1\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\cos\alpha. \qquad (20.7)$$

Para determinar la intensidad del campo $\boldsymbol{E}$ tomaremos la fórmula (14.3) y la representación del gradiente en coordenadas cilíndricas (S1.8). De esta forma, se obtiene

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}_0E_1\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0E_1\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\operatorname{sen}\alpha. \qquad (20.8)$$

Así queda resuelto el problema planteado. Suponiendo que en la (20.8) $r=R$, podemos convencernos de que el vector $\boldsymbol{E}$ es normal a la superficie del cilindro:

$$\boldsymbol{E}(R) = \boldsymbol{r}_02E_1\cos\alpha, \qquad (20.9)$$

y que a medida que se aleja de él, $\boldsymbol{E}$ se aproxima a la intensidad del campo inicial $\boldsymbol{E}_1$ ("no perturbado"):

$$\lim_{r\to\infty} \boldsymbol{E} = E_1(\boldsymbol{r}_0\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\operatorname{sen}\alpha) = \boldsymbol{x}_0E_1 = \boldsymbol{E}_1. \qquad (20.10)$$

La estructura del campo resultante ("perturbado") $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D})$, se muestra esquemáticamente en la fig. 20.2, *a*. Es interesante que el campo complementario ("perturbador")

$$\boldsymbol{E}_2 = E_1 \frac{R^2}{r^2} (\boldsymbol{r}_0 \cos\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0 \operatorname{sen} a) \tag{20.11}$$

que se superpone sobre el inicial homogéneo $\boldsymbol{E}_1$, es tal como si hubiera sido creado por hilos paralelos cargados con un momento por unidad de longitud (§ 16, punto 5)

$$\tau d = 2\pi R^2 e E_1, \tag{20.12}$$

lo que se desprende al comparar las (20.11) y (16.19).

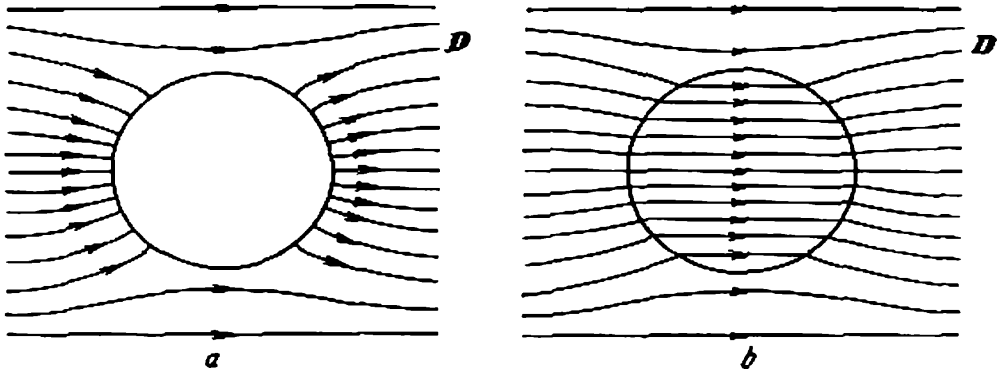


Fig. 20.2.

2. Cilindro dieléctrico. A continuación, en lugar de un cilindro conductor, tomemos un dieléctrico. En el caso que consideramos, el campo resultante incógnito puede tanto existir fuera, como dentro del cilindro; introduzcamos las siguientes designaciones:

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \boldsymbol{E}_e, & r > R, \\ \boldsymbol{E}_i, & r < R. \end{cases} \tag{20.13}$$

Las componentes radial y azimutal de los campos exterior e interior en la superficie del cilindro son una función de las condiciones límites que se desprenden de las (7.7a) y (7.3):

$$\left.\begin{aligned} E_{e\alpha} &= E_{i\alpha}, \\ e_e E_{er} &= e_i E_{ir} \end{aligned}\right\} r = R, \tag{20.14}$$

siendo e_i y e_e, respectivamente, las constantes dieléctricas del cilindro y del medio exterior.

Representemos el potencial del campo exterior en forma de la suma

$$\varphi_e = \varphi_1 + \varphi_2, \tag{20.15}$$

siendo φ_1, como hasta ahora, el potencial del campo inicial $\boldsymbol{E}_1$ (20.2), mientras que φ_2 tiene el aspecto de la (20.5), además, es aún desconocido el coeficiente K.

En lo que se refiere al potencial del campo interior φ_i, éste, lo mismo que φ_2, no es más que la resolución de la ecuación de Laplace del tipo (20.4) para $n = 1$ y $B = 0$. Sin embargo, el aspecto de la función $\mathcal{R}(r)$ es ahora diferente: se necesita tomar $D = 0$, ya que de lo contrario φ_i en el eje del *cilindro* se reduce a la infinidad. Es decir,

$$\varphi_i = Mr \cos \alpha. \tag{20.16}$$

Expresando el campo mediante los potenciales, según la fórmula (14.3), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} E_e &= r_0\left(E_1 + \frac{K}{r^2}\right)\cos\alpha - \alpha_0\left(E_1 - \frac{K}{r^2}\right)\operatorname{sen}\alpha, \\ E_i &= M\left(-r_0\cos\alpha + \alpha_0 \operatorname{sen}\alpha\right) \end{aligned}\right\} \tag{20.17}$$

y tomando de estas fórmulas las expresiones de sus componentes para ponerlas en las condiciones límites (20.14), transformamos estas últimas en un sistema de ecuaciones respecto a los coeficientes K y M desconocidos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{K}{R^2} - M &= E_1, \\ \frac{K}{R^2} + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_e} M &= -E_1. \end{aligned}\right\}$$

De aquí:

$$K = E_1 R^2 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} \quad \text{y} \quad M = -2E_1 \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}, \tag{20.18}$$

y partiendo de la (20.17), hallamos la siguiente solución del problema planteado para el cilindro dieléctrico:

$$\left.\begin{aligned} E_e &= E_1\left[r_0\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}\right)\cos\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_0\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}\right)\operatorname{sen}\alpha\right], \\ E_i &= \frac{2E_1\varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}\left(r_0\cos\alpha - \alpha_0\operatorname{sen}\alpha\right) = \frac{2E_1\varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}. \end{aligned}\right\} \tag{20.19}$$

Es característico que el campo interior es homogéneo y paralelo al *campo inicial* E_1 (*"perturbado"*). El *campo exterior* es la suma del campo E_1 y del campo

$$E_2 = E_1 \frac{R^2}{r^2}\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}\left(r_0\cos\alpha + \alpha_0\operatorname{sen}\alpha\right), \tag{20.20}$$

creado, al parecer, por hilos paralelos cargados con momento por unidad de longitud igual a

$$\tau d = 2\pi R^2 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}\varepsilon_e E_1. \tag{20.21}$$

Una representación sobre la estructura del campo nos da la fig. 20.2, *b*.

Señalemos, en conclusión, que al resolver problemas, en lugar de *las condiciones límites (20.14), podríamos hacer uso de las* equivalentes para los potenciales que se desprenden de (14.12). La comprobación de esta identidad se la dejamos al lector.

3. Cuerpos esféricos. Polarizabilidad. De forma absolutamente análoga, podemos hallar la solución del problema de la introducción de una esfera conductora y dieléctrica en un campo electrostático homogéneo. Con este objeto, según el método de separación de las variables (Suplemento 7) se halla la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. No obstante, las operaciones se reducen considerablemente, si prevemos que una esfera dieléctrica, lo mismo que un cilindro, se polariza homogéneamente.

De ese modo, desde el principio tomamos en cuenta que el campo interior de la esfera $\boldsymbol{E}_i$ es paralelo al campo inicial $\boldsymbol{E}_1$:

$$\boldsymbol{E}_i = A\boldsymbol{E}_1. \tag{20.22}$$

La orientación del sistema esférico de coordenadas a utilizar más adelante respecto al campo inicial, se muestra en la fig. 20.3, *a*, *b*.

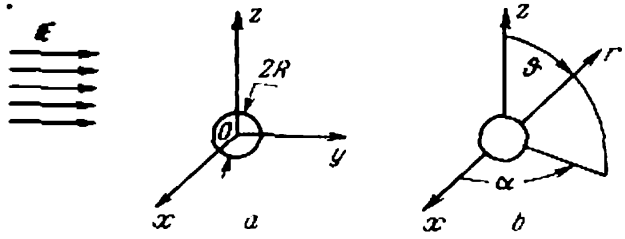


Fig. 20.3.

Con todo, el campo complementario $\boldsymbol{E}_2$, creado por la esfera, y que al sobreponerlo en el $\boldsymbol{E}_1$ nos da un campo exterior resultante

$$\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2, \tag{20.23}$$

debe tener el carácter del campo de un dipolo situado en el centro de la esfera:

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{B}{r^2}(\boldsymbol{r}_0 2\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0 \operatorname{sen}\vartheta). \tag{20.24}$$

En lo que se refiere al campo inicial, en el sistema de coordenadas a emplear éste tiene el aspecto

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{z}_0 E_1 = E_1(\boldsymbol{r}_0\cos\vartheta - \boldsymbol{\vartheta}_0 \operatorname{sen}\vartheta). \tag{20.25}$$

Aplicando a $\boldsymbol{E}_e$ y $\boldsymbol{E}_i$ las condiciones límites (7.7a) y (7.3), tenemos

$$\left.\begin{aligned} E_{e\vartheta} &= E_{i\vartheta}, \\ \varepsilon_e E_{er} &= \varepsilon_i E_{ir}, \end{aligned}\right\} \quad r = R, \tag{20.26}$$

lo que nos lleva a un sistema de ecuaciones respecto a los coeficientes desconocidos A y B:

$$\left.\begin{aligned} AE_1 + \frac{B}{R^3} &= E_1, \\ AE_1 \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_e} - \frac{2B}{R^3} &= E_1, \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$A = \frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \text{ y } B = E_1 R^3 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i - 2\varepsilon_e}. \tag{20.27}$$

Por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_e &= E_1 \left[\boldsymbol{r}_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \right) \cos\vartheta - \right. \\ &\left. - \boldsymbol{\vartheta}_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \right) \operatorname{sen}\vartheta \right], \\ \boldsymbol{E}_i &= \frac{3E_1\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}. \end{aligned}\right\} \tag{20.28}$$

Este campo, situado en el plano de simetría de la esfera, se parece al campo análogo que observamos en el caso del cilindro (fig. 20.2, *b*).

Comparando las fórmulas (20.24) y (15.13), hallamos el momento eléctrico equivalente de una esfera dieléctrica en el campo $\boldsymbol{E}_1$:

$$\boldsymbol{p} = 4\pi R^3 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \varepsilon_e \boldsymbol{E}_1. \tag{20.29}$$

Supongamos que la esfera se encuentra en el vació ($\varepsilon_e = \varepsilon_0$, $\varepsilon_i = \varepsilon$). En virtud de la homogeneidad del campo interior, la polarizabilidad $\boldsymbol{P}$ del dieléctrico (§ 18, punto 2), a base de la (18.10), es

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{p}}{V} = 3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1, \tag{20.30a}$$

pero, simultáneamente, según la (18.7) y partiendo de la (20.28),

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}_i - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_i = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, \boldsymbol{E}_i = 3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1. \tag{20.30b}$$

Recomendamos que el lector efectúe una comprobación análoga para el caso del cilindro (punto 2).

Cuando la esfera es conductora, el campo interior $\boldsymbol{E}_i$ no existe. Como en la (20.28) $\boldsymbol{E}_i \to 0$ si $\varepsilon_i/\varepsilon_e \to \infty$, podemos suponer que para este límite análogo, en la primera de las correlaciones (20.28) se obtendrá el campo exterior (resultante) para una esfera conductora. La expresión hallada

$$\boldsymbol{E} = E_1 \left[\boldsymbol{r}_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos\vartheta - \boldsymbol{\vartheta}_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \operatorname{sen}\vartheta \right] \tag{20.31}$$

da, efectivamente, la solución del problema sobre la esfera conductora. Podemos convencernos con facilidad de que el vector $\boldsymbol{E}$ (20.31) en la superficie de la esfera está dirigido por la normal

$$\boldsymbol{E}(R) = \boldsymbol{r}_0 3E_1 \cos\vartheta, \tag{20.32}$$

mientras que para $r \to \infty$, el campo $\boldsymbol{E}$ tiende a $\boldsymbol{E}_1$; en el plano de simetria de la esfera se parece al campo análogo del cilindro (fig. 20.2, *a*). El momento eléctrico equivalente de la esfera conductora es

$$\boldsymbol{p} = 4\pi\varepsilon_e R^3 \boldsymbol{E}_1. \qquad (20.33)$$

Acabando el presente párrafo, recordemos la indicación hecha al principio del § 18, punto 2. Al resolver el problema según el método de separación de las variables (véase, por ejemplo, [A.2]), se puede mostrar que el campo interior de cualquier cuerpo elipsoidal dieléctrico, introducido en el campo homogéneo prefijado, resulta ser homogéneo (fig. 18.2). La esfera, el cilindro, así como una capa plana, son formas particulares de una elipsoide.

§ 21. Magnetostática

1. Ecuaciones principales. Comencemos por escribir el sistema de las ecuaciones (§ 13, punto 2) que, en un espacio sin corrientes, caracterizan un campo magnético invariable respecto al tiempo:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \qquad (21.1a)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \qquad (21.1b)$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}. \qquad (21.1c)$$

Estas *ecuaciones de magnetostática* son análogas a las ecuaciones de electrostática (14.1), pero su diferencia sustancial consiste en que el segundo miembro de la (21.1b) es igual a cero, mientras que en la ecuación electrostática semejante (14.1b) vemos la densidad de la carga ρ: en la naturaleza no hay cargas magnéticas libres. Las correlaciones integrales que responden a dos de las ecuaciones (21.1) tienen el aspecto

$$\oint_L \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 0, \qquad (21.2a)$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = 0. \qquad (21.2b)$$

Recordemos también que las condiciones límites para los vectores del campo que forman parte de las ecuaciones de magnetostática (7.4a) y (7.8a), son formalmente idénticas a las condiciones límites (7.3) y (7.7*a*) aplicadas en electrostática, la primera de las cuales es válida cuando no hay carga superficial.

Lo mismo que en electrostática, podemos expresar la intensidad del campo en forma del gradiente del potencial:

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} \varphi^m. \qquad (21.3)$$

De las (21.1b), (21.1c) obtenemos respecto a φ^m la ecuación

$$\operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \varphi^m = 0, \qquad (21.4)$$

semejante a la (14.8) que, cuando el medio es homogéneo ($\mu = \text{const}$), se convierte en la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \varphi^m = 0. \tag{21.5}$$

Basándonos en las (7.4a) y (7.8a) y (21.3), tampoco es complicado obtener para el potencial magnetostático φ^m condiciones límites análogas a las condiciones (14.12):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^m &= \varphi_2^m, \\ \mu_1 \frac{\partial \varphi_1^m}{\partial \nu} &= \mu_2 \frac{\partial \varphi_2^m}{\partial \nu}. \end{aligned}\right\} \tag{21.6}$$

Finalmente, de forma semejante a como se hizo en el § 14, punto 4 para un medio homogéneo, se puede obtener la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = 0. \tag{21.7}$$

2. **Magnetostática y electrostática.** De todo lo expuesto se desprende que pueden ser comparados objetos magnetostáticos y electrostáticos, cuando en estos últimos no hay cargas libres. Debemos añadir que no hay necesidad de resolver problemas magnetostáticos si ya fue resuelto el correspondiente problema de electrostática. Efectivamente, a causa de la correspondencia de las ecuaciones (21.1) y (14.1), así como de las indicadas condiciones límites, las funciones vectoriales $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$ deben obtenerse directamente de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{D}$, sustituyendo ε por μ. Por ejemplo, en virtud de los resultados del § 20, podemos directamente escribir las soluciones de los problemas de la introducción en un campo magnetostático homogéneo $\boldsymbol{H}_1$ un cilindro o esfera de material magnético. De acuerdo con la (20.19) para un cilindro se tiene

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}_e &= H_1 \left[\boldsymbol{r}_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \cos\alpha - \right. \\ &\left. - \boldsymbol{\alpha}_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \operatorname{sen}\alpha \right], \\ \boldsymbol{H}_i &= \frac{2\mu_e \boldsymbol{H}_1}{\mu_i + \mu_e}, \end{aligned}\right\} \tag{21.8}$$

siendo μ_i y μ_e, respectivamente, la permeabilidad magnética del cilindro y el espacio exterior. De forma análoga, de la (20.28) obtenemos la fórmula siguiente para una esfera:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}_e &= H_1 \left[\boldsymbol{r}_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \right) \cos\vartheta - \right. \\ &\left. - \boldsymbol{\vartheta}_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \right) \operatorname{sen}\vartheta \right], \\ \boldsymbol{H}_i &= \frac{3\mu_e \boldsymbol{H}_1}{\mu_i + 2\mu_e}. \end{aligned}\right\} \tag{21.9}$$

3. **Dipolos magnéticos e imanación** (polarización magnética). Continuemos nuestras comparaciones. Como establecimos en el § 18,

la polarizabilidad $\boldsymbol{P}$ es el momento eléctrico del medio reducido a la unidad de volumen: un dieléctrico se comporta como un sistema de dipolos. Del mismo modo, podemos considerar un material magnético como un sistema de *dipolos magnéticos*. Es decir, que aunque no existen cargas magnéticas *libres*, el concepto de cargas magnéticas *ligadas* tiene fundamento real (véase más adelante § 23). Convencionalmente, podemos referirnos a un sistema de dos cargas magnéticas indivisibles, iguales por su valor absoluto y con signos contrarios, que posee un *momento magnético* $\boldsymbol{m}$ y que actúa como un dipolo magnético. La imanación $\boldsymbol{M}$ que se determina por la fórmula (5.2),

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B} - \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{21.10}$$

es, por consiguiente, el momento magnético del medio reducido a la unidad de volumen (compárese con el § 18, punto 2).

En el problema magnetostático sobre la esfera, cuya solución se expresa por las fórmulas (21.9), esta última se comporta como un dipolo magnético. Suponiendo que una esfera con permeabilidad magnética μ se encuentra en el vacío ($\mu_i = \mu$, $\mu_e = \mu_0$), podemos escribir la expresión de su momento magnético en virtud de la (20.29):

$$\boldsymbol{m} = 4\pi R^3 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mu_0 \boldsymbol{H}_1. \tag{21.11}$$

La imanación de la esfera será

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{m}}{V} = 3 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mu_0 \boldsymbol{H}_1 \tag{21.12a}$$

(compárese con (20.30a)), pero al mismo tiempo, de acuerdo con la (21.10) y partiendo de la (21.9):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}_i - \mu_0 \boldsymbol{H}_i = (\mu - \mu_0)\, \boldsymbol{H}_i = 3 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mu_0 \boldsymbol{H}_1 \tag{21.12b}$$

(compárese con la (20.30b).

Luego, calculemos la diferencia entre el campo inicial $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{z}_0 H_1$ en el que se encuentra la esfera y su campo interior $\boldsymbol{H}_i$. Esta magnitud

$$\boldsymbol{H}_{\text{desim}} = \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_i = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \boldsymbol{H}_1 \tag{21.13}$$

es el "campo de desimanación" de las cargas ligadas. Según esto, la relación

$$\frac{B_{\text{desim}}}{M} = \frac{\mu_0 H_{\text{desim}}}{M} = \frac{1}{3}, \tag{21.14}$$

que fácilmente se obtiene de las (21.12) y (21.13), se denomina *factor de desimanación* de la esfera.

La noción de factor de desimanación se emplea no sólo para la esfera. Dicha noción conserva sentido estricto para todos los cuerpos que en un campo homogéneo se imanan paralelamente a él y

homogéneamente [1]. Tal propiedad es propia de un elipsoide (compárese con el § 18, punto 2 y el § 20, punto 3) que se imana a lo largo de uno de los ejes de simetría, así como también (salvo la esfera) de una capa plana infinita y de un cilindro, los que pueden ser considerados como formas degeneradas del elipsoide. Proponemos que el lector, calculando directamente el factor de desimanación

$$N = \frac{\mu_0 H_{\text{desim}}}{M} \qquad (21.15)$$

compruebe la siguiente tabla.

Tabla 21.1

Factor de desimanación

Forma del cuerpo	Orientación del campo	Factor de desimanación N
Esfera		1/3
Cilindro (infinito)	transversal	1/2
Idem	longitudinal	0
Capa (infinita)	transversal	1
Idem	longitudinal	0

Conviene tomar en cuenta que en la técnica, la noción de factor de desimanación se utiliza en aquellos casos, cuando el campo interior no es homogéneo, pero puede considerarse suficientemente próximo a un campo de tal tipo.

Un cuerpo de material magnético con alta permeabilidad, en el que hay una cavidad, puede ser empleado para el *blindaje magnético*, es decir, para proteger cierto objeto (situado en la indicada cavidad) contra la acción de los campos magnéticos exteriores. Tomemos, por ejemplo, una esfera hueca (fig. 21.1, *a*). Situándola en el campo magnético homogéneo $\boldsymbol{H}_1$, advertimos que en su interior el campo es mucho más débil, a saber

$$\boldsymbol{H} = \left[1 + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right)\left(\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\mu}{\mu_0} - 2\right)\right]^{-1} \boldsymbol{H}_1. \qquad (21.16)$$

Este resultado puede ser obtenido resolviendo el problema límite de forma semejante a lo que hicimos en el § 20. La estructura del campo se muestra en la fig. 21.1, *b*. En la (21.16) podemos ver que, al crecer infinitamente la permeabilidad magnética μ, el campo interior $\boldsymbol{H}$ desaparece, y en el caso de la permeabilidad prefijada, el grado de blindaje depende del grosor de la cubierta.

[1] Si el campo interior es homogéneo, pero no paralelo al campo inicial, en tal caso puede ser introducido un factor de desimanación tensorial (véase el § 5, punto 4) (así, por ejemplo, se hace cuando la orientación de un elipsoide isótropo es arbitraria).

4. Imanación espontánea. Observaciones conclusivas. En el § 5, punto 1, en muy breve forma, nos referimos a los procesos espontáneos que transcurren en la materia, a los que corresponde un campo a observar macroscópicamente. En ciertos casos, el medio resulta estar polarizado eléctrica o magnéticamente sin la influencia del campo exterior. Por ejemplo, situando un dieléctrico

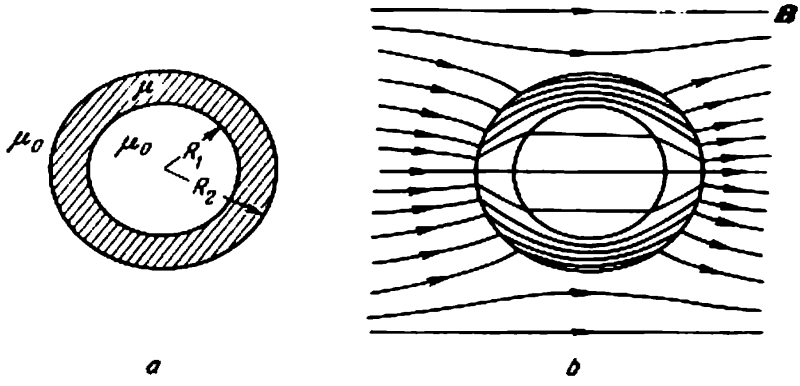


Fig. 21.1.

del tipo de resina fundida en un campo eléctrico, podemos polarizarlo y conservar la polarización (es decir, cierta orientación preponderante de los dipolos moleculares) después de su solidificación, sin campo exterior. Tales medios, a veces llamados *electretos*, no pueden conservar prolongadamente la polarización espontánea en virtud de su conductividad natural. Ciertas sustancias, los *materiales ferroeléctricos*, pueden tener la propiedad de polarización eléctrica espontánea debido a la asimetría de su estructura cristalina. Mucho más divulgado y estable resulta ser el fenómeno de la polarización magnética espontánea. Los materiales ferromagnéticos imanados, es decir, los *imanes permanentes*, conservan su imanación por no haber cargas magnéticas libres y, por consiguiente, las respectivas corrientes. En apariencia, los medios con polarización eléctrica e imanación espontáneas, se analizan idénticamente. Estudiemos este último caso.

Como punto de partida, tomaremos las ecuaciones fundamentales de magnetostática (21.1), pero en la última de ellas, (21.1c), se necesita realizar ciertas modificaciones. A la (21.1c), o sea, a la (5.7), llegamos sustituyendo en la (5.2) $\boldsymbol{M}$ por $\chi^m \mu_0 \boldsymbol{H}$, de acuerdo con la (5.5). En lugar de la (5.5) escribimos:

$$\boldsymbol{M} = \chi^m \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}^0, \tag{21.17}$$

siendo $\boldsymbol{M}^0$ la imanación espontánea (que no depende de $\boldsymbol{H}$). Entonces

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}^0, \tag{21.18}$$

teniendo en cuenta que, como anteriormente, μ se determina partiendo de la correlación (5.8).

Ya que la ecuación (21.1b) no se toca absolutamente, la condición límite (7.4a) queda en vigor, pero según la (21.18) se desprende una nueva condición que contiene M^0 para las componentes normales del vector H:

$$\mu_1 H_{\nu 1} + M^0_{\nu 1} = \mu_2 H_{\nu 2} + M^0_{\nu 2}. \tag{21.19}$$

A continuación, ya que no se toca la ecuación (21.1a), conserva su sentido la (21.3) y la condición límite (7.8a). En lo que se refiere a la ecuación (21.4), en su lugar obtenemos

$$\operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \varphi^m = \operatorname{div} M^0, \tag{21.20}$$

y, respectivamente, en lugar de la ecuación de Laplace (21.5)

$$\nabla^2 \varphi^m = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} M^0. \tag{21.21}$$

Para el caso, cuando el medio no es limitado y tiene una permeabilidad μ constante, podemos, inmediatamente, escribir la solución general de esta ecuación de Poisson que se desprende de las (S5.6) y (S5.7):

$$\varphi^m(r) = \frac{-1}{4\pi\mu} \int_V \frac{\operatorname{div} M^0(r')}{|r - r'|}\, dv \tag{21.22}$$

(se supone que en una región limitada $M^0 \neq 0$). Por su forma, esta expresión nos repite la (18.17) y evidentemente $-\operatorname{div} M^0$ es la densidad que las cargas magnéticas ligadas (véase (18.21)).

Sin resolver la (21.22), examinemos una esfera magnetizada homogéneamente cuya permeabilidad es μ_i y que está situada en un medio no magnetizado de otras propiedades ($\mu = \mu_e$). Así, en el interior de la esfera

$$M^0 = z_0 M^0 = M^0 (r_0 \cos\vartheta - \vartheta_0 \operatorname{sen}\vartheta),\ r < R, \tag{21.23}$$

(se aplican las mismas coordenadas que en el § 20, punto 3). Además, el campo magnético interior es también homogéneo:

$$H_i = z_0 A = A (r_0 \cos\vartheta - \vartheta_0 \operatorname{sen}\vartheta),\ r < R, \tag{21.24}$$

mientras que el exterior tiene el carácter del campo de un dipolo:

$$H_e = \frac{B}{r^3} (r_0 2\cos\vartheta + \vartheta_0 \operatorname{sen}\vartheta),\ r > R \tag{21.25}$$

(compárese con el § 20, punto 3). El problema consiste en determinar los coeficientes A y B.

Sobreponiendo para $r = R$ las condiciones límites (7.8a) y (21.19), escribimos

$$\left.\begin{aligned} -A &= \frac{B}{R^3}, \\ \mu_i A + M^0 &= 2\mu_e \frac{B}{R^3}, \end{aligned}\right\} \tag{21.26}$$

de donde obtenemos dichos coeficientes. Es decir, el campo está hallado:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}_i &= -\frac{M^0}{\mu_i+2\mu_e}(r_0\cos\vartheta - \boldsymbol{\vartheta}_0\operatorname{sen}\vartheta) = \frac{-\boldsymbol{M}^0}{\mu_i+2\mu_e}, \\ \boldsymbol{H}_e &= \frac{M^0}{\mu_i+2\mu_e}\frac{R^3}{r^3}(r_0\,2\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0\operatorname{sen}\vartheta). \end{aligned}\right\} \quad (21.27)$$

El imán esférico a estudiar, actúa como un dipolo magnético con momento

$$\boldsymbol{m} = 4\pi R^3\frac{\mu_e}{\mu_i+2\mu_e}\boldsymbol{M}^0. \quad (21.28)$$

Si el medio por entero es homogéneo ($\mu_i = \mu_e$), entonces

$$\boldsymbol{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\boldsymbol{M}^0 = \boldsymbol{M}^0 V, \quad (21.28a)$$

siendo V el volumen del imán. En la fig. 21.2 se muestra el aspecto de las líneas del vector $\boldsymbol{B}$, correspondiente al campo (21.27).

En conclusión, hagamos ciertas observaciones. En comparación con los fenómenos de electrostática, el conjunto de fenómenos de magnetostática es más pobre ya que no hay cargas magnéticas libres, como tampoco medios análogos a los conductores. Sin embargo, el estudio de algunos importantes medios magnetostáticos y, en particular, los materiales ferromagnéticos, forman una extensa y complicada rama de la física que, por ahora, no vamos a tocar (véase el § 86, punto 2).

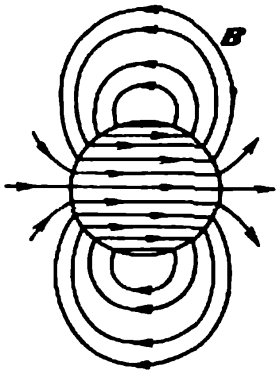


Fig. 21.2.

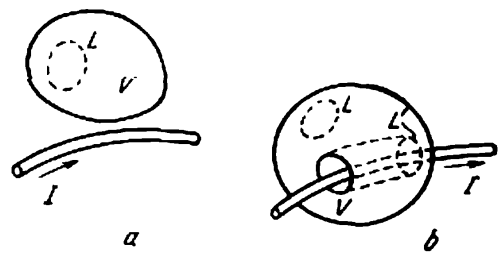


Fig. 21.3.

Ya que el campo magnético está relacionado con la corriente (§ 2, punto 3), las ecuaciones (21.1) y (21.2) tienen limitada rama de aplicación: pueden ser empleadas sólo en aquellos puntos del espacio donde no hay corriente. Al mismo tiempo, el potencial magnetostático φ^m es totalmente análogo al potencial electrostático φ. No obstante, hace falta precisar lo que podemos considerar como región del espacio sin corriente. Comparemos las figs. 21.3, *a* y 21.3, *b*. En la primera de ellas, la región V es tal que cualquier contorno acotado que ella contenga no abarca la

corriente I y la ecuación (21.2a) continúa siendo válida. Como podemos advertir, la región V en la fig. 21.3, *b* no tiene tal propiedad: en este caso hay contornos que abarcan la corriente I y para cada uno de ellos, en lugar de la (21.2a), se debe escribir una correlación cuyo segundo miembro contiene I. De aquí podemos llegar a la conclusión de que, aunque en todos los puntos de la región que examinamos $j=0$, ésta no puede considerarse desde el punto de vista de magnetostática.

El estudio del problema planteado se continuará en el siguiente párrafo.

11. Campo electromagnético estacionario

El campo electromagnético estacionario puede existir al haber corriente de conducción invariable respecto al tiempo ($j\neq 0$, $\partial/\partial t=0$) y se describe por medio del sistema de ecuaciones (13.6), al que, además, se reducen las ecuaciones de Maxwell. Más adelante (§ 26) se establecerá que, en condiciones reales, un campo de tal tipo debe mantenerse por fuerzas exteriores que consumen energía de procedencia no electromagnética, lo que se refleja en la última de las ecuaciones (13.6) mediante la forma (6.11).

Indiquemos que en el sistema de ecuaciones (13.6) pueden ser separados grupos de ecuaciones relativamente independientes (columnas izquierda y derecha). Uno de estos grupos (la columna izquierda) coincide con el sistema de ecuaciones de electrostática (14.1), evidenciando la primera de las ecuaciones, igual que en electrostática, el carácter potencial del campo eléctrico. Pero la divergencia entre los campos de corriente continua y electrostático es fácil de advertir. Ahora, en el interior de los cuerpos conductores $E\neq 0$, lo que es consecuencia directa de la corriente ($j\neq 0$). Y ya que las corrientes también pasan a lo largo de las fronteras entre los conductores y el medio dieléctrico, por lo tanto estas superficies ya *no son equipotenciales*.

El segundo grupo de las ecuaciones (13.6), (la columna derecha), contiene magnitudes magnéticas y se difiere de las ecuaciones de magnetostática (21.1) por la presencia de la densidad de la corriente de conducción. La independencia de estas ecuaciones se manifiesta en que ellas determinan por completo el campo magnético de la corriente continua *prefijada*. Frecuentemente, el conjunto de los fenómenos que dichas ecuaciones caracterizan, también lo llaman "magnetostática".

En un campo electrostático ideal (véase § 14 y más arriba) no hay movimiento de energía: como $H=0$, en cada punto del espacio el vector de Poynting se reduce a cero. Por causas análogas, tampoco hay movimiento de energía en un campo magnetostático ideal (§ 21), en el que $E=0$. Para remarcar el rasgo característico del campo electromagnético estacionario, señalemos que en él hay movimiento de energía, aunque es de carácter limi-

tado. A saber, si se confecciona una superficie acotada que abarque todas las corrientes y fuerzas exteriores, resultará (§ 26) que el flujo total de energía que pasa por ella es nulo.

§ 22. Ecuaciones del campo magnético estacionario. Potencial vectorial

1. Ecuaciones y propiedades principales del potencial magnetostático. En virtud de lo anteriormente dicho, el campo magnético de corriente continua prefijado se describe mediante el sistema de ecuaciones (§ 13, punto 2)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \tag{22.1a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{22.1b}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{22.1c}$$

y las correlaciones integrales correspondientes

$$\oint_L \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = I, \tag{22.2a}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{s} = 0. \tag{22.2b}$$

Según la (22.1a) el campo magnético ya no es potencial, como en magnetostática pura (§ 21), puesto que $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \neq 0$. Por lo demás, examinando sólo una región sin corriente ($\boldsymbol{j} = 0$), se puede, como anteriormente, introducir el potencial φ^m (21.3). Debido a esto, retornamos a la cuestión tratada al fina del punto 4 del § 21.

Supongamos que en todos los puntos, en los que se determina la intensidad del campo magnético $\boldsymbol{H}$, no hay corriente y, en tal caso, podemos expresar $\boldsymbol{H}$ por $\operatorname{grad} \varphi^m$. Entonces, se pueden realizar cálculos que formalmente no se diferencian de los que nos llevaron a la expresión (14.6) y obtener una igualdad análoga

$$\varphi_1^m - \varphi_2^m = \int_{M_1}^{M_2} \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l}, \tag{22.3}$$

pero cuyo sentido resulta ser mucho más complicado. Examinemos el empleo de esta fórmula en el caso mostrado en la fig. 22.1, *a*. Aplicando el camino de integración de AmB, escribimos:

$$\Delta\varphi^m_{AmB} = \int_{(AmB)} \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l}. \tag{22.3a}$$

Ahora, tengamos en cuenta que, según la (22.2a),

$$\oint_{(AmBnA)} \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = I,$$

y al mismo tiempo

$$\oint_{(AmBnA)} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \int_{(AmB)} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} + \int_{(BnA)} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \int_{(AmB)} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} - \int_{(AnB)} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}.$$

Por esta razón, integrando a lo largo de la trayectoria AnB, obtenemos

$$\Delta\varphi^{m}_{AnB} = \int_{(AnB)} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \Delta\varphi^{m}_{AmB} - I. \qquad (22.3b)$$

Este resultado significa que la diferencia de potencial $\varphi_1^m - \varphi_2^m$ ha variado en una magnitud I al circular la corriente una sola vez.

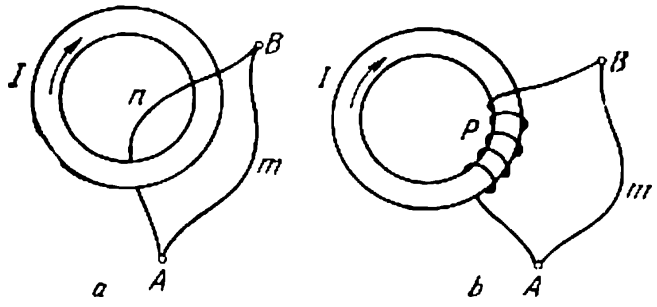


Fig. 22.1.

Igualmente podemos convencernos de que si la circulación de la corriente se verifica k veces (fig. 22.1, b)

$$\Delta\varphi^{m}_{ApB} - \Delta\varphi^{m}_{AmB} = kI, \qquad (22.3c)$$

siendo la magnitud k positiva si la circulación $AmBpA$ está relacionada con el sentido de la corriente de un sistema dextrógiro, y al ser inverso el sentido de circulación (sistema levógiro), k será negativa.

Así, en caso general, φ^m es una función no unívoca. Es unívoca y semejante al potencial electrostático sólo en regiones uniconexas (uniacopladas), sin corriente.

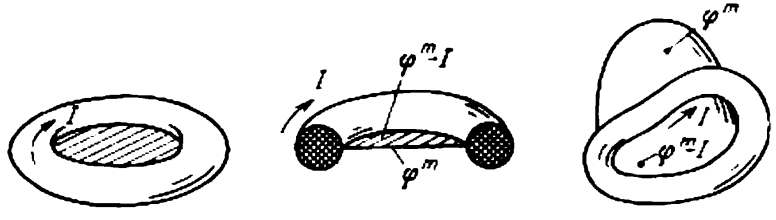


Fig. 22.2.

Con objeto de convertir φ^m en función unívoca, se puede impedir la circulación de la corriente para lo que todos los circuitos de corriente deben cubrirse con una película imaginaria, por la que no pueden pasar los caminos de integración (fig. 22.2). La

forma de cada una de las superficies que se apoyan en el circuito es indiferente; en virtud de lo dicho anteriormente, ésta será la superficie de discontinuidad del potencial φ^m en la magnitud I.

2. Ecuación de la intensidad del campo magnético. La distribución prefijada de la corriente continua determina por completo el campo magnético. Aplicando la operación rot a la ecuación (22.1a), obtenemos la siguiente ecuación vectorial de segundo orden:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{j}. \tag{22.4}$$

La operación rot puede aplicarse no a toda función de distribución de la corriente $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$, sino sólo a aquella que sea suficientemente lisa. Por lo menos, debe haber una componente tangencial continua de la función $\boldsymbol{j}$, lo que significa que en la frontera de la región de la corriente, dicha función debe reducirse a cero. Este requisito no impone limitaciones físicas: siempre podemos considerar que el decrecimiento de j_τ hasta cero transcurre en una capa muy fina.

El primer miembro de la (22.4) se puede transformar mediante la identidad (S1.34). Si el medio es homogéneo ($\mu = \text{const}$), según la (22.1b) $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$; entonces (22.4) toma el aspecto siguiente:

$$\nabla^2\boldsymbol{H} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{j}. \tag{22.5}$$

Esta es la ya conocida ecuación vectorial de Poisson (S5.6), y podemos inmediatamente escribir su solución para una región infinita para una distribución limitada de la corriente en el espacio a base de la (S5.7):

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\operatorname{rot}'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv'. \tag{22.6}$$

La aplicación directa de la fórmula (22.6) puede ser dificultosa, ya que es necesario diferenciar la función de distribución de la corriente $\boldsymbol{j}$, pero la (22.6) puede transformarse fácilmente en un tipo cómodo para la integración. Si advertimos que la expresión subintegral tiene el aspecto $\psi \operatorname{rot}\boldsymbol{F}$, podemos hacer uso de la identidad (S1.35), partiendo de la cual

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\left\{\int_V \operatorname{rot}'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv' - \int_V \left[\operatorname{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\right]dv'\right\}. \tag{22.6a}$$

En virtud del (S1.28), la primera integral se reduce a la superficial:

$$\int_V \operatorname{rot}'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv' = -\oint_S \frac{|\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'), d\boldsymbol{s}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},$$

después de esto vemos evidentemente que es igual a cero: anteriormente ya remarcamos que en S $j_\tau = 0$. En lo que se refiere a la segunda integral en la (22.6a), aquí la expresión subintegral

se transforma mediante las fórmulas (S1.11) y (S1.36). Como resultado, obtenemos

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'), \boldsymbol{r}_{0q}]}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2} dv, \tag{22.7}$$

siendo, como anteriormente (por ejemplo, en el § 15, punto 1), $\boldsymbol{r}_{0q} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$.

3. *Potencial vectorial.* *Partiendo de una tradición extensamente* divulgada, al determinar el campo magnético por la corriente prefijada, se introduce una función vectorial intermedia $\boldsymbol{A}$, llamada *potencial vectorial*. Según la definición

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{22.8}$$

De aquí se desprende que al elegir $\boldsymbol{A}$ se permite cierta arbitrariedad, es decir, en lugar de $\boldsymbol{A}$ siempre podemos tomar otra función

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} \operatorname{grad} \psi, \tag{22.8a}$$

siendo ψ cualquier función escalar (suficientemente lisa). Efectivamente, ya que

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}' = \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

entonces, de acuerdo con la (22.8), los dos potenciales vectoriales corresponden a una misma función $\boldsymbol{B}$. De tal modo, el potencial vectorial se ha determinado con una exactitud de hasta el sumando potencial.

Las propiedades del potencial vectorial se desprenden de la necesidad de satisfacer las ecuaciones iniciales (22.1). La segunda de ellas no da ninguna información sobre el carácter de $\boldsymbol{A}$, ya que se satisface idénticamente (para cualquier $\boldsymbol{A}$):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \equiv 0.$$

Sustituyendo en la (22.8) $\boldsymbol{B}$ por $\boldsymbol{H}$ y aplicando la ecuación (22.1a), obtenemos

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{j}. \tag{22.9}$$

Esta es la ecuación a la que se somete el potencial vectorial a una corriente prefijada.

Para un medio homogéneo ($\mu = \text{const}$), la ecuación hallada toma el aspecto

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{j}. \tag{22.10}$$

A causa de la indeterminación de $\boldsymbol{A}$ indicada anteriormente, tenemos la posibilidad de sobreponer una condición complementaria

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{22.11}$$

(que tiene el corolario de que ψ en la (22.8a) no es una función arbitraria, sino armónica, pág. 644). Aplicando a la (22.10) la identidad vectorial (S1.34) y teniendo en cuenta (22.11), obtenemos

la siguiente ecuación vectorial de Poisson:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{j}. \tag{22.12}$$

Su solución para una región infinita para la corriente limitada en el espacio y en virtud de la (S5.7), es

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, dv'. \tag{22.13}$$

Esta fórmula nos permite, según la distribución prefijada de la corriente en un medio homogéneo, calcular el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ y seguidamente, haciendo uso de la correlación (22.8), determinar el campo magnético.

Como conclusión obtenemos una importante expresión integral que contiene el potencial vectorial. Anteriormente (§ 2, punto 2) determinamos la magnitud Φ, llamada *flujo magnético*. Sustituyendo en (2.5) $\boldsymbol{B}$ por rot $\boldsymbol{A}$ y haciendo uso del teorema de Stokes, escribimos

$$\Phi = \oint_L \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}. \tag{22.14}$$

El flujo magnético que transcurre por cierta superficie S está aquí representado en forma de la circulación del potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ por el circuito L, en el que dicha superficie se apoya.

§ 23. Corrientes lineales. Dipolo magnético

1. Corrientes lineales. Ley de Biot — Savart. Imaginémonos una corriente I que pasa a lo largo de cierta línea L (y que no ocupa volumen). Esta será una corriente lineal ideal; convencionalmente, podemos describirla como corriente en cierto volumen (Suplemento 2), introduciendo la densidad

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \tau_0 I \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \tag{23.1}$$

siendo τ_0 el vector unitario de la tangente a L que indica la dirección de la corriente y la δ-función bidimensional.

Prácticamente, podemos considerar lineal la corriente de un conductor de sección transversal constante si la longitud de dicho conductor y la distancia hasta el punto de observación superan estimablemente sus dimensiones transversales (el diámetro de la sección transversal).

Cuando la corriente es lineal, la fórmula (22.7) de modo evidente se simplifica (compárese con la deducción (15.4)). Previamente en la (22.7), al designar la variable de integración sustituimos una raya por dos, para evitar la coincidencia de los símbolos de diversas magnitudes: en la (23.1) $\boldsymbol{r}'$ es el radio vector de un punto en L. Introduciendo según la (23.1) en la (22.7)

$j(r'') = \tau_0 I \delta(r'' - r')$, escribimos:

$$H(r) = \frac{I}{4\pi} \int_V \frac{|\tau_0, r_{0q}|\,\delta(r''-r')}{|r-r''|^2}\,dv'' =$$

$$= \frac{I}{4\pi} \int_S \int_l \frac{|\tau_0, r_{0q}|\,\delta(r''-r')}{|r-r'|^2}\,ds''dl' = \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{|\tau_0, r_{0q}|}{|r-r'|^2}\,dl',$$

siendo L el camino de la corriente y S, la superficie que él interseca (*por ejemplo, un plano perpendicular a* τ_0, *como en la* fig. S2.2, *c*). Naturalmente podríamos no hacer uso del aparato de la δ-función: es suficiente tomar la región de la corriente V en forma de un conductor en cuya sección transversal dicha corriente se distribuye uniformemente y sólo considerar aquellas distancias, en comparación con las que el diámetro de *conductor es despreciablemente pequeño*.

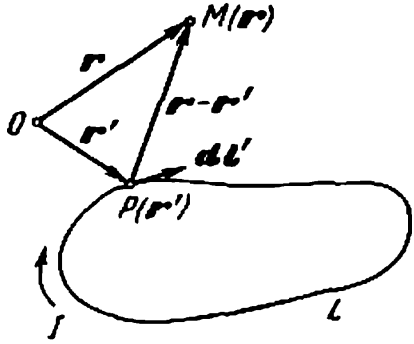


Fig. 23.1.

Fijemos el resultado obtenido en la forma siguiente:

$$H(r) = \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{|dl', r_{0q}|}{|r-r'|^2} \qquad (23.2)$$

($dl' = \tau_0 dl'$); en la fig. 23.1 se ha realizado una construcción que aclara al sentido designado en la (23.2).

Así hemos obtenido la enunciación integral de la ley de Biot — Savart; de su enunciación diferencial se desprende la afirmación de que cada elemento de corriente crea un campo de una intensidad

$$dH(r) = \frac{I}{4\pi} \frac{|dl', r_{0q}|}{|r-r'|^2}. \qquad (23.2a)$$

La ley de Biot—Savart nos permite hallar directamente el campo magnético de la corriente lineal según la distribución prefijada de dicha corriente. Ejemplos de la aplicación de la ley de Biot—Savart se darán en el § 24.

2. Potencial vectorial de la corriente lineal y nueva deducción de la ley de Biot—Savart. De forma semejante a como obtuvimos de la (22.7) la fórmula (23.2), hallamos la expresión del vector potencial de la corriente lineal partiendo de la (22.13). Introduciendo en la (22.13) la densidad de la corriente lineal en la forma (23.1) y utilizando las designaciones anteriores, obtenemos

$$A(r) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_V \frac{\tau_0 \delta(r''-r')}{|r-r''|}\,dv'' =$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi} \int_S \int_l \frac{\tau_0 \delta(r''-r')}{|r-r''|}\,ds''dl' = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{\tau_0 dl'}{|r-r'|}.$$

Escribamos esto en la forma siguiente:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{d\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \qquad (23.3)$$

La fórmula (23.3) se emplea con frecuencia en los cálculos; a veces, es más sencillo determinar, primeramente, el potencial vectorial de la corriente lineal y seguidamente, la intensidad del campo por la fórmula (22.8), tomando en cuenta la (22.1c).

Ahora, mostremos el método tradicional de obtención de la enunciación de la ley de Biot—Savart, basado en la expresión del potencial (23.3). Deseando hallar la expresión general de la intensidad del campo magnético, debemos calcular $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$; en este caso se verifica la diferenciación respecto a las coordenadas del punto de observación $M(\boldsymbol{r})$ que, al integrar (23.3), queda invariable. Por esta razón

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \mu^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{4\pi} \operatorname{rot} \int_L \frac{d\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{I}{4\pi} \int_L \operatorname{rot} \frac{d\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \qquad (23.4)$$

además, esta integral puede ser transformada de tal modo que sea liquidada la diferenciación. Tomemos con este objeto la identidad vectorial (S1.35), en virtud de la cual

$$\operatorname{rot} \frac{d\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \operatorname{rot} d\boldsymbol{l}' + \left[\operatorname{grad} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, d\boldsymbol{l}'\right].$$

Pero $\operatorname{rot} d\boldsymbol{l}' \equiv 0$ ya que el elemento vectorial de la línea de la corriente $d\boldsymbol{l}'$ no depende de las coordenadas del punto de observación $M(\boldsymbol{r})$ y, por lo tanto, el primer sumando es igual a cero. Calculando el gradiente en el segundo sumando mediante la fórmula (S1.10), (S1.36), reducimos la integral (23.4) al aspecto

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[d\boldsymbol{l}', \boldsymbol{r}_{0Q}]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}, \qquad (23.5)$$

lo que coincide con la (23.2), es decir, da la enunciación de la ley de Biot—Savart.

3. Contorno circular de corriente como dipolo magnético. Como ejemplo más sencillo de corriente lineal cerrada, examinemos su contorno circular. Ubicando el origen del sistema esférico de coordenadas en el centro del círculo (fig. 23.2, *a*), podemos calcular la distancia $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ desde el punto $P(\boldsymbol{r}')$ en el contorno hasta el punto de observación $M(\boldsymbol{r})$ mediante el triángulo rectángulo PMQ:

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2 = MQ^2 + PQ^2.$$

Como puede apreciarse en la fig. 23.2, *a*, $MQ^2 = r^2 \cos^2 \vartheta$, y PQ^2 se determina del triángulo OPQ, situado en el plano del contorno

de corriente: $PQ^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta + (r')^2 - 2rr' \operatorname{sen} \vartheta \cos \beta$. De esta manera,

$$|r - r'|^2 = r^2 + a^2 + 2ra \operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha',$$

siendo $a = r'$ el radio del contorno y $\alpha' = \pi - \beta$.

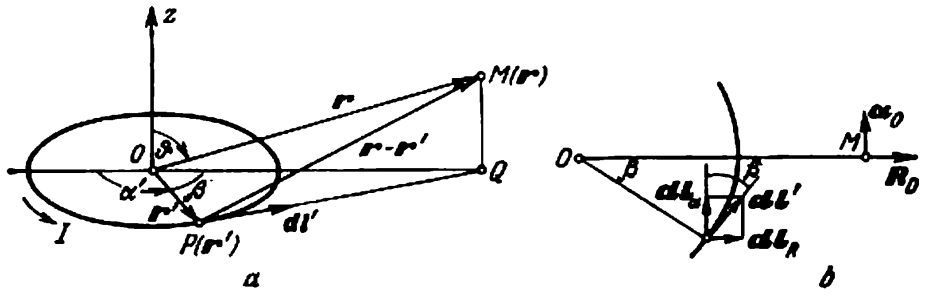


Fig. 23.2.

A continuación (fig. 23.2, b), el elemento vectorial de la longitud dl' se descompone en dos componentes:

$$dl' = \alpha_0 dl'_\alpha + R_0 dl'_R = (-\alpha_0 \cos \alpha' + R_0 \operatorname{sen} \alpha')\, a d\alpha',$$

donde α_0 indica el sentido azimutal *en el punto M* y R_0, la dirección radial *para este mismo punto* en el plano del contorno (es evidente que $R_0 = r_0 \operatorname{sen} \vartheta + \vartheta_0 \cos \vartheta$).

La correlación tridimensional obtenida se emplea con la mayor sencillez para calcular el potencial vectorial según la fórmula (23.3). En este caso tenemos

$$A(r) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(-\alpha_0 \cos \alpha' + R_0 \operatorname{sen} \alpha')\, a d\alpha'}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha'}},$$

y como

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \alpha'\, d\alpha'}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha'}} = -\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \alpha'\, d\alpha'}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha'}},$$

de lo que podemos convencernos con facilidad comparando el $\operatorname{sen} \alpha'$ y el $\cos \alpha'$ en cada uno de los cuadrantes, entonces, definitivamente

$$A(r) = \alpha_0 \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \cos \alpha'\, d\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha'}}. \qquad (23.6)$$

El potencial vectorial del campo magnético de un contorno de corriente está dirigido, lo mismo que la corriente, azimutalmente: sus líneas crean círculos concéntricos en los planos donde $z = \text{const}$. Podríamos llegar a tal conclusión teniendo simplemente en cuenta la simetría.

La integral (23.6) debe considerarse como resultado definitivo al determinar el potencial vectorial, ya que no se expresa me-

diante funciones elementales [1]. Sin embargo, a nosotros nos interesa en mayor grado el caso, cuando el punto de observación está muy alejado ($r \gg a$), cuando la integral (23.6) se simplifica con facilidad.

Tomemos un contorno cuyo radio relativo tiende a cero ($a/r \to 0$), pero de tal modo, que el producto de su corriente por el cuadrado del radio quede constante ($Ia^2 = \text{const}$). Desarrollando el denominador de la expresión subintegral según la fórmula del binomio de Newton, tenemos

$$(r^2+a^2+2ra\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha')^{-1/2}=\frac{1}{r}\left[1-\frac{a}{r}\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha'-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\ldots\right]$$

y pasando al límite, se halla

$$\boldsymbol{A}(r)=\lim_{\substack{a/r\to 0\\ Ia^2=\text{const}}}\alpha_0\frac{\mu I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-a}{r}\left[1-\frac{a}{r}\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha'-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\ldots\right]\cos\alpha'\,d\alpha',$$

o sea,

$$\boldsymbol{A}(r)=\alpha_0\frac{\mu Ia^2}{4r^2}\operatorname{sen}\vartheta. \qquad (23.7)$$

De inmediato, según la (22.8) y empleando la expresión de la rotación del vector en coordenadas esféricas, determinamos la intensidad del campo magnético:

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\frac{Ia^2}{4}\left[\frac{\boldsymbol{r}_0}{r^2\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{r}\right)-\frac{\boldsymbol{\vartheta}_0}{r\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{r}\right)\right],$$

de donde hallamos que

$$\boldsymbol{H}(r)=\frac{Ia^2}{4r^3}(\boldsymbol{r}_0\,2\cos\vartheta+\boldsymbol{\vartheta}_0\operatorname{sen}\vartheta). \qquad (23.8)$$

El resultado obtenido merece que se le preste la mayor atención. Al compararlo directamente con la fórmula (15.13), podemos ver que define el campo de un dipolo. El contorno considerado se comporta como si en el punto O, en vez de dicho contorno, se encontrara un *dipolo magnético ideal* con momento $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{z}_0 m$; este último se determina apenas la fórmula (23.8) sea escrita de forma análoga a la (15.13):

$$\boldsymbol{H}(r)=\frac{m}{4\pi\mu r^3}(\boldsymbol{r}_0\,2\cos\vartheta+\boldsymbol{\vartheta}_0\operatorname{sen}\vartheta). \qquad (23.8a)$$

Comparando las (23.8) y (23.8a), obtenemos:

$$m=\mu I\pi a^2 z_0. \qquad (23.9)$$

---

[1] Puede ser expresada por las llamadas *integrales elípticas completas* K y E (tabuladas en los manuales de matemáticas, por ejemplo, en [K.1]). En tal caso

$$A(r)=\alpha_0\frac{\mu I}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r}}\frac{(2-\xi^2)K(\xi)-2E(\xi)}{\xi\sqrt{\operatorname{sen}\vartheta}},\quad \xi^2=\frac{4ar\operatorname{sen}\vartheta}{r^2+a^2+2ar\operatorname{sen}\vartheta}.$$

Así, un contorno decrecientemente pequeño con corriente que conserva la constancia del producto de la corriente por el área, es, en realidad, un dipolo magnético ideal con momento constante $\boldsymbol{m}$ y, respectivamente, un contorno de dimensiones finitas puede ser considerado, a distancias bastante grandes, como dipolo magnético.

4. Generalizaciones ulteriores. La fórmula (23.9) que hemos obtenido para un contorno circular, puede considerarse como una forma particular de la expresión del momento de un contorno plano con el área S

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{z}_0 \mu I S \tag{23.10}$$

(en la (23.9) $\pi a^2 = S$). A su vez, la (23.10) es la forma particular de la expresión del momento

$$\boldsymbol{m} \frac{\mu I}{2} \oint_L [\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{l}] \tag{23.11}$$

de una corriente arbitraria (no plana) lineal cerrada, mientras que la (23.11) se obtiene de la expresión general del momento de la corriente cerrada distribuida en cierto volumen

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mu}{2} \int_V [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})]\, dv, \tag{23.12}$$

al introducir la densidad $\boldsymbol{j}$ expresada como en el (23.1).

A una distancia suficientemente grande, toda corriente cerrada se manifiesta como un dipolo magnético con momento $\boldsymbol{m}$.

Con objeto de llegar a la comprención de este hecho, emplearemos el concepto de *capa magnética doble*. Sea que tengamos un sistema de cargas magnéticas ligadas de un tipo que sea análogo a un condensador plano (fig. 23.3, *a*): dos planos paralelos o bien

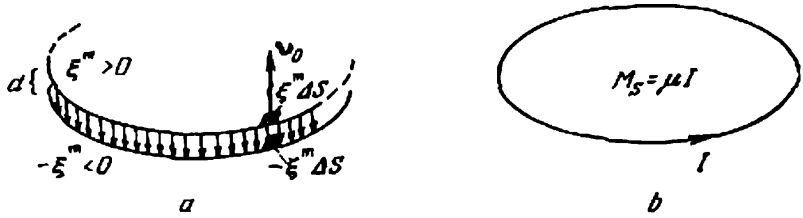


Fig. 23.3.

superficies equidistantes próximas portan cargas magnéticas de signo contrario; atribuyámoles unas densidades ξ^m y $-\xi^m$. En analogía con la (17.18)

$$\Delta\varphi^m = \frac{\xi^m d}{\mu}.$$

Si aproximamos infinitamente las superficies ($d \to 0$) dejando constante $\xi^m d$, en el límite obtendremos una superficie, cuya intersección se acompaña por un salto del potencial magnetostático a

una magnitud $\Delta\varphi^m$. Esto es lo que llamamos capa magnética doble. Su potencia M_s se llama la magnitud constante $\xi^m d$.

La realización de la capa magnética doble puede ser cualquier superficie que se apoya en un contorno de corriente lineal (fig. 23,3, *b*), ya que, como se mostró en el § 22, punto 1, precisamente en tal superficie se produce el salto del potencial magnetostático a la magnitud $\Delta\varphi^m = I$. Por consiguiente, su potencia es

$$M_s = \mu I. \tag{23.13}$$

Cada elemento Δs de la capa doble se comporta como un dipolo magnético (fig. 23.3, *a*) con un momento

$$\Delta \boldsymbol{m} = \nu_0 q^m \boldsymbol{d} = \nu_0 d\xi^m \cdot \Delta \boldsymbol{s} = \nu_0 M_s \Delta \boldsymbol{s}. \tag{23.14}$$

De ese modo, para una capa doble del correspondiente contorno de corriente, partiendo de la (23.13), tenemos

$$\Delta \boldsymbol{m} = \nu_0 \mu I \Delta \boldsymbol{s}. \tag{23.15}$$

De aquí, sumando todos los momentos elementales (o más exactamente, integrando $d\boldsymbol{m}$ respecto de la superficie de la capa), obtenemos el momento de la corriente a examinar. En el caso del contorno plano de la (23.15) de inmediato se deduce la fórmula (23.10).

En conclusión, recordemos que el concepto de dipolos magnéticos fue introducido en el § 21, punto 3 al estudiar la imanación del medio. En dicho párrafo se mostró, en particular, que una esfera homogéneamente magnetizada se comporta como un dipolo magnético. Ahora, basándonos sobre el análisis de las corrientes cerradas, puede ser expresada la hipótesis anteriormente aceptada sobre el origen de las cargas magnéticas ligadas. Quedándonos en los límites de los conceptos clásicos, es posible afirmar que el papel de dipolos magnéticos de la materia que proporcionan o determinan su imanación $\boldsymbol{M}$, lo juegan corrientes microscópicas, creadas por el movimiento cíclico de las partículas cargadas de la sustancia.

§ 24. Ejemplos de campos magnéticos

1. Campos axialmente simétricos. Sistemas laminares. Al estudiar ciertos campos magnéticos más sencillos de corriente continua, podemos valernos de las consideraciones de simetría. De forma semejante a como en electrostática se empleaba el teorema de Gauss (§ 16, puntos 1—3), aquí se parte de la correlación integral (21.2a).

De esta forma, ya en el § 2, punto 5 fue definido el campo de una corriente rectilínea infinita. Claro está que la fórmula obtenida entonces

$$\boldsymbol{H}(r) = \alpha_0 \frac{I}{2\pi r} \tag{24.1}$$

expresa la intensidad del campo magnético de cualquier distribución de la corriente eléctrica para *idéntica simetría*, es decir, cuando las líneas del vector $\boldsymbol{H}$ son circunferencias, cuyos centros se disponen en cierta línea recta; además, r es (por su origen) el radio de la circunferencia del contorno de integración en la (21.2a) que abarca la corriente I y que coincide con una de las líneas de fuerza. Examinemos varios ejemplos típicos de aplicación de la fórmula (24.1).

En el caso de un conductor cilíndrico infinito de radio R con corriente I, la corriente total es abarcada sólo por las líneas de fuerza exteriores (contornos de integración), las líneas interiores abarcan sólo parte de la corriente total

$$I' = I\left(\frac{r}{R}\right)^2, \quad r \leqslant R,$$

de forma que al determinar el campo en el interior del conductor en la fórmula (24.1) hay que sustituir I por I'. Por esta razón, resulta que

$$\boldsymbol{H} = \begin{cases} \alpha_0 \dfrac{Ir}{2\pi R^2}, & 0 \leqslant r \leqslant R \\ \alpha_0 \dfrac{I}{2\pi r}, & r \geqslant R \end{cases} \tag{24.2}$$

o sea, en el interior del conductor el campo aumenta al aumentar la distancia hasta el eje, mientras que fuera de él, no se diferencia del campo de un hilo de corriente (fig. 24.1, *a*). Es interesante que por la distribución de la intensidad (valor absoluto de la intensidad como función de coordenadas) ésta repite el campo eléctrico de un cilindro cargado (16.5).

De forma análoga se halla el campo de un tubo con corriente I, pero con la diferencia de que aquí hay que distinguir tres diferentes regiones, en la primera de las cuales los contornos de integración no abarcan la corriente en absoluto. La aplicación de la fórmula (24.1) nos da (fig. 24.1, *b*)

$$\boldsymbol{H} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant r \leqslant R_1, \\ \alpha_0 \dfrac{I(r^2 - R_1^2)}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)r}, & R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \\ \alpha_0 \dfrac{I}{2\pi r}, & r \geqslant R_2. \end{cases} \tag{24.3}$$

Al determinar el campo de un cable coaxial, por cuyos dos conductores pasan corrientes de igual valor pero de sentidos inversos (I y $-I$), se examinan cuatro diferentes regiones; cuando el contorno de integración se encuentra en la mayor de ellas ($r > R_3$ en la fig. 24.1, *c*), la corriente total abarcada es igual a cero ($I - I = 0$). La intensidad del campo se expresa por las fór-

mulas siguientes (fig. 24.1, *c*):

$$H=\begin{cases}\alpha_0\dfrac{Ir}{2\pi R_1^2}, & 0\leqslant r\leqslant R_1,\\ \alpha_0\dfrac{I}{2\pi r}, & R_1\leqslant r\leqslant R_2,\\ \alpha_0\dfrac{I(R_3^2-r^2)}{2\pi(R_3^2-R_2^2)r}, & R_2\leqslant r\leqslant R_3,\\ 0, & r\geqslant R_3.\end{cases} \tag{24.4}$$

Un ejemplo de una aplicación algo diferente del anterior principio, tenemos al investigar un toroide con arrollamiento uniforme

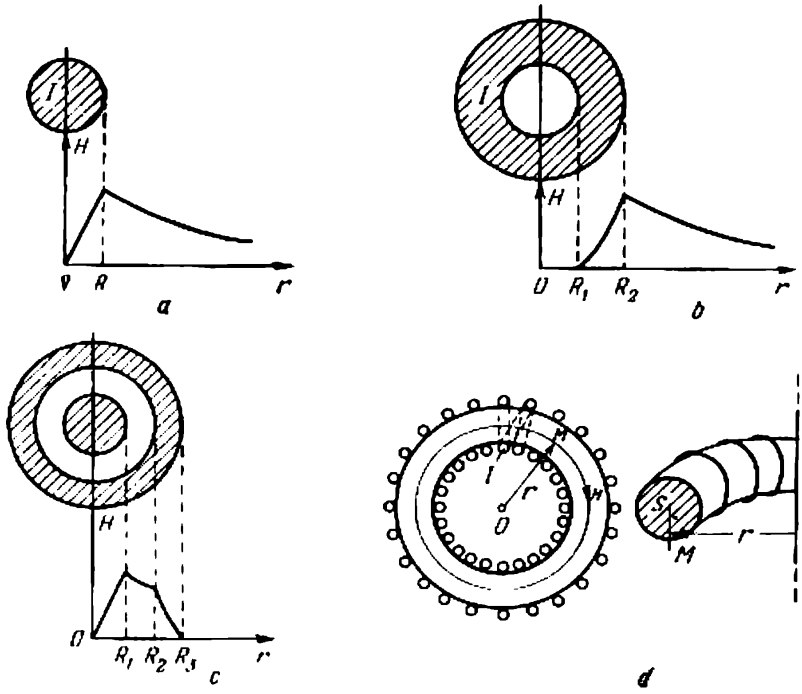


Fig. 24.1.

(fig. 24.1, *d*) por el que pasa una corriente I. Es evidente, que a cuenta de la simetría, las líneas magnéticas pueden considerarse circunferencias y para determinar el campo, emplear la fórmula (24.1). Además, si el contorno circular de integración se encuentra fuera del toroide con el arrollamiento ($M(r)$ está fuera de S en la fig. 24.1, *d*), en la (24.1) el numerador es igual a cero, ya que el contorno no abarca la corriente, o bien, abarca corrientes que se liquidan mutuamente. Cuando, por el contrario, el contorno pasa por el interior del toroide ($M(r)$ está en S en la fig. 24.1, *d*) en el numerador de la (24.1) hay que tomar nI, siendo n el número de espiras del arrollamiento, ya que evidentemente, ésta es la

corriente abarcada. De aquí

$$H = \begin{cases} 0, & M(r) \text{ fuera de } S, \\ \alpha_0 \dfrac{nI}{2\pi r}, & M(r) \text{ en } S \end{cases} \tag{24.5}$$

(r es la distancia desde el eje del toroide hasta M). Naturalmente, nuestra deducción será más exacta si en lugar del arrollamiento tomamos una cubierta enteriza conductora por la que pasa la corriente; en tal caso es también fácil resolver el problema sobre el campo en el interior del conductor. Esto lo dejamos para que el lector lo realice en calidad de ejercicio.

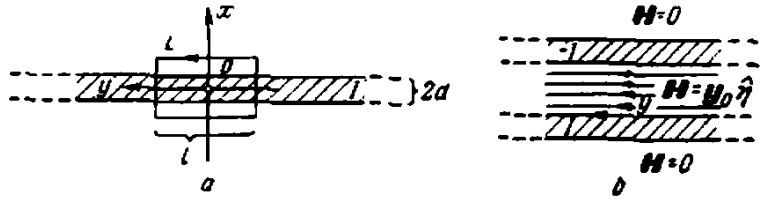


Fig. 24.2.

Aplicando la fórmula (24.1), no es tampoco difícil determinar el campo de ciertos sistemas laminares, como por ejemplo, para la capa plana con corriente uniformemente distribuida y dirigida por el eje z que se muestra en la fig. 24.2. Proponemos que el lector demuestre que entonces

$$H = \begin{cases} \pm y_0 \dfrac{\hat{\eta}}{2} = \pm y_0 dj & \begin{cases} x \geqslant d, \\ x \leqslant -d, \end{cases} \\ y_0 \dfrac{\hat{\eta} x}{2d} = y_0 x j & \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant d, \\ 0 \geqslant x \leqslant -d, \end{cases} \end{cases} \tag{24.6}$$

siendo $\hat{\eta} = I/l$ la corriente que pasa por la unidad de longitud de la capa (compárense las fórmulas (24.6) y (16.7)). El campo de dos capas paralelas iguales con corrientes antiparalelas, obtenido superponiendo los campos de las dos capas, resulta ser doble entre las capas ($H = y_0 \hat{\eta}$) y no existe fuera del sistema ($H = 0$), fig. 24.2, b.

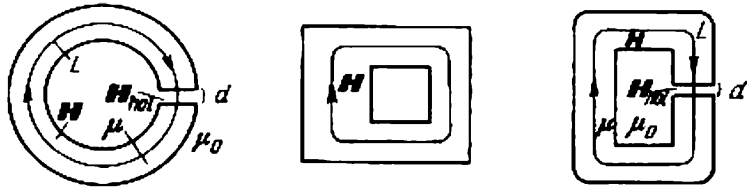
2. Circuitos magnéticos. Retornemos al anteúltimo ejemplo. Suponiendo que el campo magnético del toroide (fig. 24.1, d) es homogéneo por su sección radial ("transversal"), expresemos el flujo magnético que por él pasa $\Phi \approx BS = \mu HS$. En virtud de la (24.5)

$$\Phi \approx \frac{nI}{\dfrac{L}{\mu S}}, \quad L = 2\pi R_{\text{med}}. \tag{24.7}$$

El flujo magnético Φ es análogo a la corriente, la magnitud nI, a la f.e.m. y $L/\mu S$, a la resistencia del circuito eléctrico de un

conductor homogéneo de una longitud L y una sección transversal S; ademas, la permeabilidad magnética es análoga a la conductibilidad específica (conductividad). En este sentido, se dice sobre un "circuito magnético" y nI se denomina "fuerza magnetomotriz" (f.m.m.).

El concepto de circuito magnético es válido en aquellos casos, cuando podemos suponer que el flujo magnético está situado en el



a *b*

Fig. 24.3.

núcleo cerrado de un electroimán, independientemente de su forma y disposición del arrollamiento, es decir, los sistemas mostrados en la fig. 24.3 pueden, con cierta aproximación, considerarse circuitos magnéticos.

Tomemos un núcleo que prácticamente tenga sección transversal constante con holgura (fig. 24.3, *a*, *c*). Verificando la integración en la (24.1) respecto a cierta linea "media" magnética de fuerza, tenemos

$$\oint_L \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l} \approx H(l-d) + H_{hol}d.$$

Esta integral es igual a la f.m.m. nI, mientras que la intensidad en el toroide (núcleo) y en su holgura, no es difícil expresarla por medio del flujo magnético que se supone idéntico en todo lugar:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi}{\mu S}, \quad H_{hol} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_0 S}.$$

De aquí

$$\Phi = \frac{nI}{\frac{L-d}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S}}. \tag{24.8}$$

Tanto el proplo núcleo del material magnético como su holgura, se presentan como "resistencias magnéticas" conectadas en serie.

3. Ejemplos de aplicación de la ley de Biot—Savart. Podemos mostrar la aplicación de la ley de Biot—Savart mediante los siguientes ejemplos. Mostremos primeramente que de esta forma se puede obtener la expresión de la intensidad del campo magnético de un hilo de corriente en forma de la fórmula (24.1).

Empleando un sistema cilíndrico de coordenadas (fig. 24.4), escribamos para el caso dado la fórmula (23.2) en la forma

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_L \frac{[dz,\ r_{0q}]}{r^2+z^2} = \alpha_0 \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\vartheta\, dz}{r^2+z^2} = \alpha_0 \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\, dz}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

pero como

$$\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right),$$

entonces

$$H = \alpha_0 \frac{I}{4\pi r}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}, \qquad (24.9)$$

lo que coincide con la (24.1).

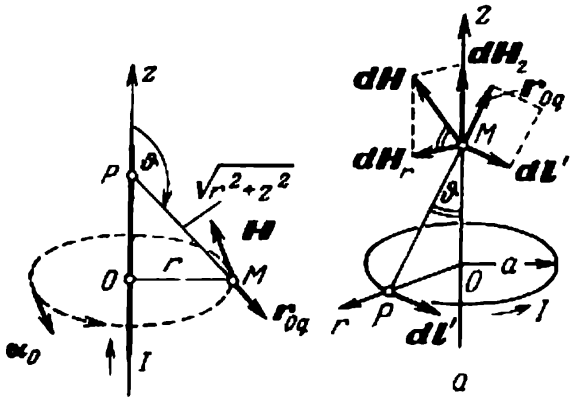


Fig. 24.4.

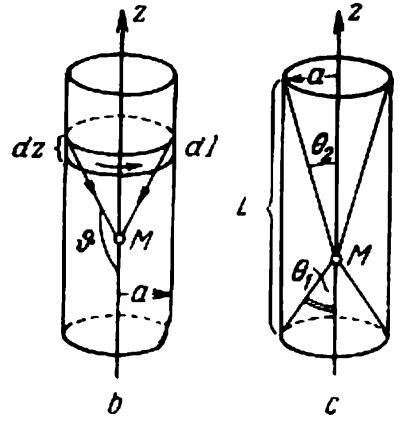


Fig. 24.5.

A continuación, determinemos el campo en el eje de una espira circular con corriente I (fig. 24.5, *a*). Como podemos apreciar en la figura, la expresión subintegral en la (23.2) tiene componentes radial y transversal

$$dH = \frac{I}{4\pi(a^2+z^2)}[dl',\ r_{0q}] = dH_r + dH_z,$$

además, al integrar, la componente radial debe desaparecer. De este modo, en el eje z

$$H = \int_L dH_z = z_0 \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\operatorname{sen}\vartheta\, d\alpha}{a^2+z^2} = z_0 \frac{I}{4\pi}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\alpha,$$

es decir,

$$H = z_0 \frac{I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (24.10)$$

Apliquemos este resultado para determinar el campo en el eje de un solenoide. Podemos suponer que en este caso la corriente se

distribuye ininterrumpidamente por la superficie cilíndrica y en una zona elemental de anchura dz (fig. 24.5, *b*) es igual a $dI = nI\,dz$, donde n es el número de espiras del arrollamiento reducido a la unidad de longitud del solenoide e I, la corriente de una espira. El campo en el eje del solenoide en el punto M (fig. 24,5, *b*), creado por la zona elemental, se halla aplicando la (24.10). Si $z = 0$ en M, tenemos

$$d\boldsymbol{H} \quad \boldsymbol{z}_0 \frac{nI}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,dz = \boldsymbol{z}_0 \frac{nI}{2}\,d\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = -\boldsymbol{z}_0 \frac{nI}{2}\,d(\cos\vartheta).$$

Integrando esta expresión desde θ_1 hasta $\pi - \theta_2$ (fig. 24.5, *c*), obtenemos la expresión de la intensidad del campo del solenoide en el punto M

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{z}_0 \frac{nI}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2). \qquad (24.11)$$

De aquí no es difícil, en particular, hallar la intensidad del campo en el punto medio del solenoide ($\theta_2 = \theta_1 = \theta$):

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{z}_0 nI\cos\theta = \boldsymbol{z}_0 \frac{nIL}{\sqrt{4a^2+L^2}} \qquad (24.11a)$$

y la intensidad del campo de un solenoide infinito

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{z}_0 nI. \qquad (24.11b)$$

4. Campo de una línea bifilar. Como último ejemplo, tomemos una línea bifilar y determinemos al principio el potencial vecto-

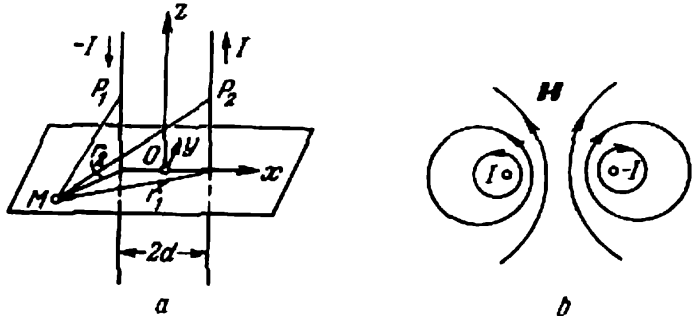


Fig. 24.6.

rial de su campo magnético por medio del sistema mostrado en la fig. 24.6, *a*. Si la corriente del primer conductor está dirigida por el eje z (I) y la del segundo, en sentido inverso ($-I$), en virtud de la (23.3), escribimos:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu I}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r_1^2+z^2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r_2^2+z^2}}\right].$$

De aquí

$$A = z_0 \frac{\mu I}{4\pi} \ln \frac{z + \sqrt{r_1^2 + z^2}}{z + \sqrt{r_2^2 + z^2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty}$$

y, por consiguiente,

$$A = z_0 \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{24.12}$$

Como vemos, las superficies del potencial vectorial constante se definen por la misma condición

$$r_2/r_1 = \text{const}, \tag{24.13}$$

que las superficies equipotenciales del campo electrostático de dos hilos inversamente cargados (§ 16, punto 5).

Señalemos el hecho de que las líneas magnéticas de fuerza se encuentran en planos transversales $z = \text{const}$ y por esta razón, en virtud de la (S1.38), se describen por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_y}{H_x}.$$

Como el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ está dirigido por el eje z, de acuerdo con la (22.8)

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{y} \quad H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Poniendo estas expresiones en la ecuación diferencial dada anteriormente y después de sencillas transformaciones, hallamos

$$\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy \equiv dA = 0,$$

o sea, las líneas magnéticas de fuerza satisfacen a la condición

$$A = \text{const}.$$

En otras palabras, las líneas del vector $\boldsymbol{H}$ coinciden con las circunferencias en los planos transversales en los que el potencial vectorial es constante y forman un cuadro absolutamente igual al creado por las superficies equipotenciales de hilos cargados, fig. 24.6, *b* (compárese con la fig. 16.8).

Finalmente, después de calcular las derivadas $\partial A/\partial x$ y $\partial A/\partial y$, obtenemos la expresión de la intensidad del campo fuera de las regiones con corriente

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi} \left[\boldsymbol{x}_0 y \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - \boldsymbol{y}_0 \left(\frac{x+d}{r_2^2} - \frac{x-d}{r_1^2} \right) \right]. \tag{24.14}$$

§ 25. Energía del campo magnético estacionario. Inductancia

1. Energía y corriente. Al haber en el espacio un campo magnético, en él está distribuida la energía enlazada con dicho campo, cuya densidad (§ 11, punto 1) es

$$w^m = \frac{HB}{2} = \frac{\mu H^2}{2}. \tag{25.1}$$

Calculando la energía de un campo magnético estacionario ubicado en cierta región V, y aplicando al mismo tiempo el concepto de potencial vectorial (22.8), tenemos

$$W^m = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{HB}\,dv = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\,dv. \tag{25.2}$$

Transformemos la expresión subintegral empleando la fórmula (S1.31) y, en virtud de la (22.1a), sustituyamos por $\boldsymbol{j}$ la función rot $\boldsymbol{H}$ que en este caso aparece, y también apliquemos el teorema de Ostrogradski—Gauss (S1.24). Como resultado, obtenemos

$$W^m = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{jA}\,dv + \frac{1}{2}\oint_S [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s}. \tag{25.3}$$

Para definir la energía total del campo magnético estacionario hay que extender la integración por todo el espacio, es decir, hacer trasladar la frontera S de la región V al infinito. En tal caso, la integral de superficie en la (25.3) desaparece. Efectivamente, tomemos el volumen V en forma de una esfera con radio infinitamente creciente que contiene todas las corrientes. Puesto que toda distribución de la corriente estacionaria se comporta a una distancia suficientemente grande como un dipolo, entonces, eligiendo de modo necesario el origen del sistema esférico de coordenadas, expresemos $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{A}$ por medio de las fórmulas (23.8) y (23.7), empleando, al escribirlas, la relación (23.9). Haciendo el cálculo del valor límite de la integral de superficie en la (25.3), escribimos

$$\lim_{r\to\infty} \oint_{S=4\pi r^2} [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{m^2}{16\pi^2\mu r^3} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [\alpha_0 \operatorname{sen}\vartheta,\ \boldsymbol{r}_0 2\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0 \operatorname{sen}\vartheta]_r \operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta\,d\alpha$$

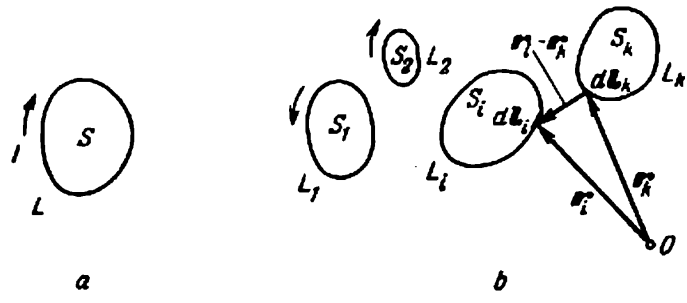
y luego,

$$\lim_{r\to\infty} \oint_{S=4\pi r^2} [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}]\,d\boldsymbol{s} = \lim_{r\to\infty} \frac{-m^2}{8\pi\mu r^3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\vartheta\,d\vartheta = 0.$$

De ese modo, la energía total del campo magnético estacionario resulta ser igual a

$$W^m = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{jA}\, dv, \tag{25.4}$$

donde V, aunque significa un espacio infinito, en realidad es una región de corriente, ya que la expresión subintegral se reduce a cero junto con la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$.



a *b*

Fig. 25.1.

Asi, la energía de un campo magnético estacionario puede ser calculada no sólo tomando directamente en cuenta su distribución por todo el espacio, como hacemos al integrar w^m (25.1), sino que también a través de los manantiales que crean el campo. El hecho de que el campo magnético existe sólo al haber corriente, se desprende directamente de la (25.4): si *por todo* el espacio no hay corriente, la función de las coordenadas $\boldsymbol{j}$ es nula y, por consiguiente, se reduce a cero la energia magnética (25.4); pero en este caso, de acuerdo con la (25.2), también $\boldsymbol{H} = 0$. En este sentido, recordemos que la acción de las corrientes microscópicas explica la magnetización de la materia.

Tomemos una corriente lineal I que pasa por el contorno cerrado L (fig. 25.1, *a*). Como al mismo tiempo la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ es una función del tipo (23.1), entonces de la (25.4), se obtiene

$$W^m = \frac{1}{2} I \oint_L \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l} \tag{25.5}$$

o bien, teniendo en cuenta (22.14),

$$W^m = \frac{1}{2} I\Phi = \frac{1}{2} I \int_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s}. \tag{25.6}$$

Aquí conviene señalar una dificultad de principio, relacionada con el concepto de corriente lineal ideal. Ya que en la línea de corriente, como vemos en las (23.2) y (23.3), las funciones vectoriales $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{H}$ se reducen a la infinidad, pierden su sentido las integrales

(25.5) y (25.6). De forma semejante a esto (§ 19, punto 3), no tiene contenido físico la propia energía de la carga puntual. En realidad, no hay corrientes lineales ideales y las fórmulas escritas pueden considerarse como relaciones aproximadas para corrientes reales, cercanas a las lineales (corrientes en conductores de pequeño grosor, etc.). Además, en calidad de contorno L es admisible tomar, por ejemplo, una línea en la superficie del conductor.

2. **Inductancia.** Si el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ se expresa por la densidad de corriente según la (23.13), de la fórmula (25.4) se desprende la siguiente:

$$W^{\text{m}} = \frac{\mu}{8\pi} \int_V \int_V \frac{\boldsymbol{j}(r)\boldsymbol{j}(r')}{|r-r'|}\, dv\, dv', \tag{25.7}$$

en la que la integración respecto a V se efectúa dos veces. Cuando tal distribución de corriente tiene la forma del único circuito con corriente total I, frecuentemente se escribe:

$$W^{\text{m}} = \frac{1}{2} \mathscr{L} I^2, \tag{25.8}$$

donde

$$\mathscr{L} = \frac{\mu}{4\pi I^2} \int_V \int_V \frac{\boldsymbol{j}(r)\boldsymbol{j}(r')}{|r-r'|}\, dv\, dv' \tag{25.9}$$

es un coeficiente independiente del valor de la corriente y que se denomina *inductancia*. Esta magnitud se mide en *henrios* [H].

Para la corriente lineal, a la expresión (25.8) se llega lo más fácilmente de la (25.6), definiendo la inductancia $\mathscr{L}$ como coeficiente de proporcionalidad entre el flujo magnético y la corriente

$$\mathscr{L} = \frac{\Phi}{I} \tag{25.10}$$

(es evidente que la proporcionalidad tiene lugar si el medio es lineal).

Seguidamente, consideremos un sistema N de contornos L_i con corrientes I_i (fig. 25.1, *b*). Al mismo tiempo, de modo semejante a la (23.1),

$$\boldsymbol{j}(r) = \tau_{0i} I_i \quad (r - r_i') \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

en regiones adyacentes a los contornos L_i, y en lugar de la (25.5), de la fórmula (25.4), obtenemos

$$W^{\text{m}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \oint_{L_i} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}. \tag{25.11}$$

De aquí

$$W^{\text{m}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \int_{S_i} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i, \tag{25.12}$$

siendo Φ_i el flujo magnético que interseca la superficie S_i, acotada por el contorno L_i.

Como cada flujo Φ_i está relacionado linealmente con las corrientes de todos los contornos, podemos escribir que

$$\Phi_i = \mathscr{M}_{i1} I_1 + \mathscr{M}_{i2} I_2 + \ldots + \mathscr{M}_{ii} I_i + \ldots + \mathscr{M}_{iN} I_N, \quad (25.13)$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

Los coeficientes $\mathscr{M}_{ii}$ y $\mathscr{M}_{ik}$ se denominan, respectivamente, inductancias *propias* y *mutuas*; en lugar de $\mathscr{M}_{ii}$ este coeficiente también se designa por $\mathscr{L}_i$. Introduciendo la (25.13) en la (25.12), llegamos a la siguiente expresión de la energía de un campo magnético estacionario para un sistema de contornos:

$$W^m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \mathscr{M}_{ik} I_i I_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \mathscr{L}_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{N} \sum_{k=1}^{N} \mathscr{M}_{ik} I_i I_k, \quad (25.14)$$

a continuación demostraremos que

$$\mathscr{M}_{ik} = \mathscr{M}_{ki}. \quad (25.15)$$

El primer miembro de la (25.14) expresa la energía *propia* del sistema de contornos, el segundo, la energía *mutua*. Podemos cerciorarnos con facilidad de que esta última conserva también su sentido para las corrientes lineales ideales (compárese con el § 19, punto 3).

En el caso particular, cuando los contornos son dos ($N = 2$)

$$W^m = \frac{1}{2} (\mathscr{L}_1 I_1^2 + \mathscr{L}_2 I_2^2) + \mathscr{M}_{12} I_1 I_2. \quad (25.16)$$

Retornando a un sistema de N contornos, fijemos nuestra atención en dos cualesquiera de ellos, por ejemplo, L_i y L_k (fig. 25.1, *b*). Sea Φ_{ik} el flujo magnético proporcionado por la corriente I_k del contorno L_k y que pasa por el contorno L_i (con mayor exactitud, por la superficie S_i que se apoya en este contorno), de forma que

$$\Phi_{ik} = \mathscr{M}_{ik} I_k. \quad (25.17)$$

Con eso, en virtud de la (22.14),

$$\Phi_{ik} = \oint_{L_i} \boldsymbol{A}_k \, d\boldsymbol{l}_i,$$

y a base de la (23.3)

$$\boldsymbol{A}_k = \frac{\mu I_k}{4\pi} \oint_{L_k} \frac{d\boldsymbol{l}_k}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_k|}.$$

Teniendo esto en cuenta, de la (25.17), obtenemos la siguiente expresión para la inductancia mutua:

$$\mathscr{M}_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{d\boldsymbol{l}_i \, d\boldsymbol{l}_k}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_k|}. \quad (25.18)$$

Como esta fórmula es simétrica respecto a los índices i y k, ella será también válida para la inductancia mutua $\mathcal{M}_{ki}$ que se define por la igualdad

$$\Phi_{ki} = \mathcal{M}_{ki} I_i,$$

siendo Φ_{ki} el flujo magnético condicionado por la corriente I_i del contorno L_i y que pasa por la superficie S_k limitada por el contorno L_k (es fácil convencerse de esto repitiendo la deducción). De ese modo, la igualdad (25.15) es realmente justa.

La fórmula (25.18) nos permite calcular la inductancia mutua de dos contornos sólo por su configuración (forma y orientación recíproca). Dicha fórmula es una forma particular de la expresión general de la inductancia mutua de dos distribuciones de corriente

$$\mathcal{M}_{ik} = \frac{\mu}{4\pi I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{j(r_i)\, j(r_k)}{|r_i - r_k|}\, dv_i\, dv_k \qquad (25.19)$$

(compárese con la (25.9)) y que se obtiene al poner en la (25.19) las funciones $j(r_i)$ y $j(r_k)$ del tipo (23.1).

3. Ejemplos de cálculo de la inductancia. En la fig. 25.2, *a* se muestra un sistema de dos espiras concéntricas situadas en un mismo plano. El flujo Φ_{12}, creado por el contorno mayor L_2 a través de la superficie S_1 del contorno menor L_1, puede ser expuesto aproximadamente del modo siguiente, si $a_1 \ll a_2$

$$\Phi_{12} \approx S_1 B_2 = \pi a_1^2 \mu H_2,$$

donde H_2 es el valor absoluto de la intensidad del campo magnético en el centro de la espira mayor. Puesto que de la (24.10)

$$H_2 = \frac{I_2}{2a_2},$$

entonces

$$\Phi_{12} = \mu I_2 \frac{\pi a_1^2}{2a_2}$$

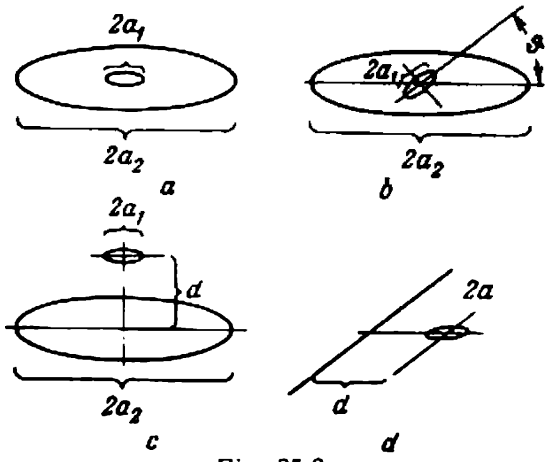


Fig. 25.2.

y la inductancia mutua de los contornos $\mathcal{M}_{12} = \Phi_{12}/I_2$, es

$$\mathcal{M}_{12} \approx \mu \frac{\pi a_1^2}{2a_2}. \qquad (25.20)$$

Análogamente se hallan las inductancias mutuas de los sistemas mostrados en la fig. 25.2, *b*, *c*, *d*. Si como antes $a_1 \ll a_2$, para las espiras con centro común ubicadas en diferentes planos (fig. 25.2, *b*), tenemos

$$\mathcal{M}_{12} \approx \mu \frac{\pi a_1^2}{2a_2} \cos\vartheta, \qquad (25.21)$$

mientras que para las espiras dispuestas coaxialmente en planos paralelos a una distancia d (fig. 25.2, c)

$$\mathcal{M}_{12} \approx \mu \frac{\pi a_1^2 a_2^2}{2(a_2^2+d^2)^{3/2}}. \qquad (25.22)$$

Para un conductor rectilíneo y una espira situada en el plano de dicho conductor a una distancia suficientemente grande ($d \gg a$),

$$\mathcal{M}_{12} \approx \mu \frac{a^2}{2d} \qquad (25.23)$$

(fig. 25.2, d). La deducción de las fórmulas (25.21)—(25.23) se la dejamos al lector.

A continuación, examinaremos un conductor de sección circular. Utilizando un sistema cilíndrico de coordenadas, en virtud de las (24.2) y (25.1), escribamos la expresión de la energía contenida en un volumen elemental $dv = r\,dr\,d\alpha\,dz$:

$$dW^m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\mu I^2 r^2}{8\pi^2 R^4} dr\,d\alpha\,dz.$$

Integrando dW^m respecto al volumen por la unidad de longitud del conductor, hallamos

$$(W_l^m)' = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^4} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3\,dr\,d\alpha = \frac{\mu I^2}{16\pi}. \qquad (25.24)$$

Esto es la energía interior del conductor reducida a la unidad de longitud; como vemos, con la corriente dada ella tiene un mismo valor para conductores de cualquier diámetro. Se denomina inductancia interior de la unidad de longitud de un conductor la magnitud

$$\mathcal{L}_l' = \frac{\mu}{8\pi}, \qquad (25.25)$$

que se determina de la relación $(W_l^m)' = \mathcal{L}_l' I^2/2$ del tipo (25.8).

De idéntica forma se halla la inductancia de un cable coaxial reducida a la unidad de longitud (véase la fig. 24.1, c); al mismo tiempo se emplean las fórmulas (24.4). Recomendamos que el lector compruebe el resultado obtenido en este caso:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\mu_1}{(R_3^2-R_2^2)^2}\left[R_3^4 \ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2}{2}(R_3^2-R_2^2)\right] + \mu_2 \ln\frac{R_2}{R_1}\right\} \qquad (25.26)$$

(μ_1 y μ_2 son, respectivamente, las permeabilidades del metal y el medio interior).

Luego, definamos la inductancia de una línea bifilar reducida a la unidad de longitud, suponiendo que la distancia entre los conductores es mucho mayor que su diámetro $2R$ (fig. 24,6, a). El flujo magnético Φ' reducido a la unidad de longitud, se calcula

aproximadamente como

$$\Phi' \approx -\mu \int_{-d+R}^{d-R} H_y\, dx,$$

donde la integración se produce por una región limitada por la superficie de los conductores. Como, en virtud de la (24.14), para $y = 0$

$$H_y = \frac{I}{\pi} \frac{d}{x^2 - d^2},$$

entonces

$$\Phi' \approx -\frac{\mu I d}{\pi} \int_{-d+R}^{d-R} \frac{dx}{x^2 - d^2} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{d+x}{d-x} \Bigg|_{-d+R}^{d-R} \approx \frac{\mu I}{\pi} \ln \frac{2d}{R} \quad (d \gg R),$$

y la inductancia de la línea reducida a la unidad de longitud $\mathscr{L}' = \Phi'/I$, resulta ser igual a

$$\mathscr{L}' \approx \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{2d}{R}. \tag{25.27}$$

Consideremos, finalmente, un sistema con flujos magnéticos cerrados. Supongamos que en un toroide con sección radial rectangular (fig. 25.3) se han enrollado uniformemente n espiras. Con esto, por *cada una* de las espiras pasa un flujo magnético igual a

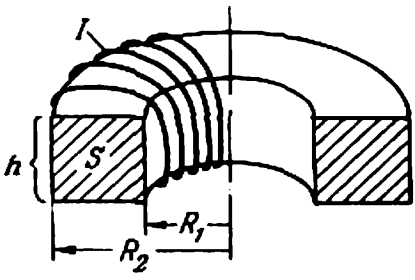


Fig. 25.3.

$$\hat{\Phi} = \mu h \int_{R_1}^{R_2} H\, dr = \frac{\mu n I h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu n I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

(aquí hemos empleado la expresión de la intensidad del campo (24.5)). El flujo que pasa por la "superficie de todas las espiras", es n veces mayor:

$$\Phi = n\hat{\Phi}$$

y la inductancia del sistema $\mathscr{L} = \Phi/I$, es igual a

$$\mathscr{L} = \frac{\mu n^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{25.28}$$

Recordemos que en el § 12, punto 2 una fórmula análoga fue hallada partiendo de otras consideraciones.

Suponiendo que en la sección radial del toroide, el campo es homogéneo y H se determina por la distancia media desde el eje, hallamos

$$\mathscr{L} \approx \frac{\mu n^2 S}{L} = \frac{\mu n^2 h}{\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}. \tag{25.29}$$

Recomendamos al lector comprobar que al haber en el toroide dos arrollamientos uniformemente distribuidos, con números m y n de espiras, su inductancia mutua será

$$\mathscr{M}_{12} = \frac{\mu mnh}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{25.30}$$

Señalemos, como conclusión, que de igual forma se calcula la inductancia de los "circuitos magnéticos" (§ 24, punto 2). Para un núcleo cerrado (en cuyo interior, debido a una gran permeabilidad magnética, está, prácticamente, concentrado todo el flujo magnético) de una longitud media del contorno L, holgura d y sección transversal S para un arrollamiento de n espiras con corriente I, el flujo magnético $\hat{\Phi}$ que pasa por cada una de las espiras se halla mediante la fórmula (24.8). Por esta razón, la inductancia $\mathscr{L} = \Phi/I = n\hat{\Phi}/I$, resulta ser la siguiente:

$$\mathscr{L} = \frac{n^2}{\frac{L-d}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S}}. \tag{25.31}$$

Sin holgura ($d = 0$), esta fórmula nos lleva a la expresión (25.29).

§ 26. Campo eléctrico estacionario y propiedades generales del campo electromagnético estacionario

1. Ecuaciones fundamentales del campo eléctrico estacionario. La columna izquierda del sistema de ecuaciones (13.6), nos proporciona las ecuaciones del campo eléctrico estacionario

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{26.1a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho, \tag{26.1b}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}. \tag{26.1c}$$

Estas ecuaciones y las correlaciones integrales correspondientes

$$\oint_L \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l} = 0, \tag{26.2a}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = q \tag{26.2b}$$

coinciden con las correlaciones análogas de electrostática (§ 14). Por esta razón, en caso particular, podemos, como lo hicimos en electrostática, en virtud de la (26.1a), escribir

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{26.3}$$

además, el potencial φ también satisface a las ecuaciones obtenidas en el § 14.

Sin embargo, como se señaló en la pág. 129, todo lo dicho no significa que los campos eléctricos estacionarios [1] no se distinguen de los campos estáticos. Al haber corriente continua, el campo eléctrico existe en el interior de los conductores, y sus superficies ya no son equipotenciales (compárese con el § 17, punto 1). Efectivamente, según la ecuación

$$j = \sigma E \tag{26.4a}$$

(en las (13.1) ésta está escrita en el renglón inferior) para $j \neq 0$ y $\sigma \neq 0$, obligatoriamente $E \neq 0$ (el caso de un conductor ideal, cuando $\sigma \to 0$, lo excluimos ahora). Y si la corriente pasa a lo largo de la superficie S de un cuerpo conductor, habrá una componente eléctrica tangencial $E_\tau = -\partial\varphi/\partial\tau$; en S el potencial φ varía. Más adelante se demostrará que la presencia de un campo electromagnético estacionario está relacionada con la acción de fuerzas exteriores; escribamos la expresión de la densidad de corriente en la región donde estas fuerzas se manifiestan, sumamente importante para la posterior exposición:

$$j = \sigma (E + E^{ex}). \tag{26.4b}$$

2. Ejemplo de un campo eléctrico estacionario. Consideremos, por ejemplo, el campo entre dos capas infinitas paralelas conductoras (fig. 26.1, *a*, *b*). Supongamos, primeramente, que no hay corriente y que los potenciales de las capas son, respectivamente,

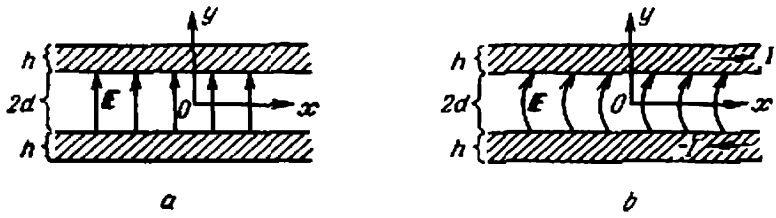


Fig. 26.1.

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{U}{2} \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \varphi_0 + \frac{U}{2}.$$

Como sabemos, con esto (fig. 26.1, *a*)

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 - \dfrac{U}{2d} y, \quad E = y_0 \dfrac{U}{2d} \text{ para } d > y > -d, \\ \varphi = \text{const}, \quad E = 0 \text{ en los conductores} \begin{cases} d \leqslant y \leqslant d + h, \\ -d - h \leqslant y \leqslant -d. \end{cases} \end{cases}$$

[1] Empleamos este término en el sentido reducido, teniendo en cuenta campos al haber corriente continua. En el sentido amplio "campo estacionario" es un campo si no existe una dependencia temporal. Por esto, podemos decir que el campo electrostático es un caso particular del eléctrico estacionario.

Cuando, como se muestra en la fig. 26.1, *b*, por los conductores pasan corrientes en sentidos inversos (I y $-I$), en el interior de ellos se crea un campo longitudinal:

$$E = \pm \boldsymbol{x}_0 \frac{j}{\sigma} \begin{cases} d \leqslant y \leqslant d+h, \\ -d-h \leqslant y \leqslant -d. \end{cases} \tag{26.5}$$

Pero como en la superficie de separación de los medios la componente tangencial del vector E sigue siendo continua, esto significa que la componente longitudinal del campo también existe en el espacio entre las capas ($d > y > -d$) donde, por consiguiente, las líneas eléctricas de fuerza se curvan (fig. 26.1, *b*).

Para hallar el campo entre las capas, es cómodo determinar previamente su potencial como solución de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{26.6a}$$

(la dependencia de la coordenada z no existe) supeditada a las condiciones límites necesarias. A distinción de la electrostática, ahora, los potenciales de las capas no son constantes y suponemos que su diferencia es igual a U sólo en el plano $x=0$ y si tenemos en cuenta la (26.5):

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 - \frac{U}{2} \text{ para } x=0,\ y=d, \\ \varphi_0 + \frac{U}{2} \text{ para } x=0,\ y=-d, \end{cases} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{j}{\sigma} \text{ si } y=d, \\ \frac{j}{\sigma} \text{ si } y=-d. \end{cases} \tag{26.6b}$$

La solución del problema de contorno (26.6a) y (26.6b) tiene el aspecto

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{U}{2d} y \left(1 + \frac{2j}{\sigma U} x\right) \tag{26.7}$$

(esta fórmula puede ser hallada con facilidad por el método de separación de las variables o, bien, puede confirmarse por comprobación). Por esta razón, entre las capas

$$E = \boldsymbol{x}_0 \frac{j}{\sigma} \frac{y}{d} + \boldsymbol{y}_0 \frac{U}{2d} \left(1 + \frac{2j}{\sigma U} x\right). \tag{26.8}$$

Señalemos que, prácticamente, un campo eléctrico de corriente continua en el dieléctrico adyacente al conductor poco se diferencia de un campo electrostático. Así, en el ejemplo que consideramos, siendo $d = 0{,}5$ cm, $U = 10$ V, $j = 2$ A/mm^2 y $\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ S/m (cobre) para $x=0$ e $y=d$

$$\frac{E_\tau}{E_\nu} = \frac{E_x}{-E_y} = -\frac{2jd}{\sigma U} \approx -3{,}4 \cdot 10^{-6},$$

es decir, la curvatura de las líneas eléctricas de fuerza debe ser insignificante: el vector E es, prácticamente, normal a la superficie del conductor como sucedía en electrostática. Proponemos al lector analizar la variación de la magnitud $\varphi(x, -d) - \varphi(x, d) =$

$= U\left(1 + \frac{2l}{\sigma t l} x\right)$, al considerar un sistema de dos capas como línea de transmisión de corriente continua.

3. Analogía entre conductancia y capacidad. Examinemos el sistema de ecuaciones

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{26.9a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0, \tag{26.9b}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{26.9c}$$

siendo el segundo renglón una forma particular de la igualdad (2.11) para un proceso estacionario ($\partial/\partial t = 0$). Tomemos también en cuenta la condición límite (7.6)

$$j_{n1} = j_{n2}. \tag{26.10}$$

Las correlaciones escritas caracterizan un campo eléctrico estacionario y la corriente en el *interior del conductor*.

Al mismo tiempo, las ecuaciones (26.9) repiten, por su forma, las de electrostática (14.1) para un medio que no contiene cargas ($\rho = 0$). Es suficiente para $\rho = 0$ sustituir en la (14.1)

$$\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{j}, \qquad \varepsilon \to \sigma, \tag{26.11}$$

para que aparezca el sistema de ecuaciones (26.9). Además, el vector de densidad de la corriente $\boldsymbol{j}$ que en la (25.9) juega el mismo papel que el vector de inducción eléctrica $\boldsymbol{D}$ en la (14.1) para $\rho = 0$, según la (26.10), tiene en las superficies de separación de los medios una componente normal continua, lo mismo que el vector $\boldsymbol{D}$ al no haber carga superficial.

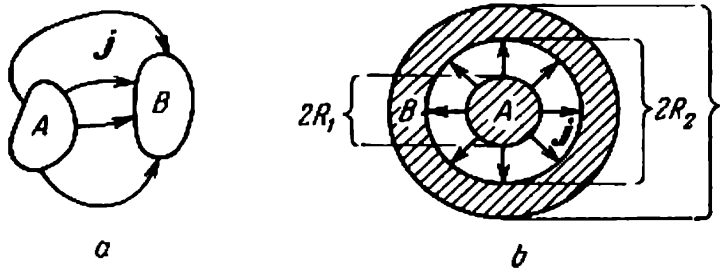
La señalada analogía formal entre las ecuaciones que definen el campo eléctrico estacionario en un medio conductor y las ecuaciones de electrostática en un dieléctrico sin cargas, suele ser útil en la práctica. Si, por ejemplo, en el problema a considerar sobre el campo eléctrico estacionario todas las superficies de separación tienen la misma configuración que en cierto problema electrostático y en ellas el vector $\boldsymbol{j}$ se comporta en el primer caso como el vector $\boldsymbol{D}$ en el segundo, entonces podemos emplear una solución acabada del problema electrostático, realizando en ella la sustitución (26.11).

La correspondencia necesaria de condiciones límites tendrá lugar, al considerar un medio débilmente conductor limitado por una superficie altamente conductora y, para comparar, se toma un problema electrostático, en el que por una misma superficie está limitado un dieléctrico ideal. Efectivamente, a causa de la continuidad de la componente tangencial del vector $\boldsymbol{E}$, en la superficie de separación de los medios conductores

$$\frac{j_{\tau 1}}{\sigma_1} = \frac{j_{\tau 2}}{\sigma_2}, \tag{26.12}$$

de donde se desprende que en el medio débilmente conductor *1*, la componente tangencial de la densidad de corriente resulta ser σ_2/σ_1

veces menor que en el buen conductor 2 que con él limita. Por esta razón, cuando la diferencia entre las conductibilidades específicas σ_1 y σ_2 es suficientemente grande, la componente tangencial j_{τ_1} puede ser despreciada y es posible considerar que en un medio débilmente conductor el vector j es normal a la superficie de separación exterior, lo que es propio para el vector D en el problema electrostático a comparar.



a *b*

Fig. 26.2.

Supongamos que en un medio débilmente conductor se encuentran dos cuerpos A y B (fig. 26.2, *a*) de alta conductancia, cuyos potenciales son φ_1 y φ_2. En este sistema, *conductibilidad* del medio se denomina la magnitud

$$G = \frac{I}{\varphi_1 - \varphi_2}, \tag{26.13}$$

donde el numerador y denominador se escogen de tal forma que la fracción sea positiva; I es la corriente que sale de uno de los cuerpos o entra en el otro (las dos magnitudes deben ser iguales). Evidentemente

$$G = \oint_S j\,ds \Big/ \int_{(A)}^{(B)} E\,dl, \tag{26.13a}$$

siendo S la superficie de uno de los conductores.

Después de la sustitución (26.11), nos convencemos de que en el problema electrostático que comparamos, la conductibilidad se convierte en capacidad:

$$G \to \oint_S D\,ds \Big/ \int_{(A)}^{(B)} E\,dl = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = C. \tag{26.14}$$

Sea, por ejemplo, necesario determinar la "conductancia de fugas" reducidas a la unidad de longitud de un cable coaxial de corriente continua. Del § 17, punto 6 ya conocimos la capacidad de un condensador coaxial reducida a la unidad de longitud. Sustituyendo en la fórmula respectiva (17.17), según la (26.11), ε por σ, obtenemos (fig. 26.2, *b*)

$$G' = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \tag{26.15}$$

En el principio de la analogía señalada anteriormente, también se basa la *simulación* de los campos electrostáticos en un baño electrolítico. Para la investigación experimental del campo electrostático de un sistema de cuerpos conductores, estos últimos se sumergen en un baño y creando los potenciales necesarios se mide la densidad de corriente en diferentes sectores del electrólito. El campo de la corriente en el electrólito, hallado de tal manera, es el modelo del campo electrostático del sistema que investigamos. Esto se garantiza por la considerable diferencia entre la conductibilidad del electrólito y los elementos del sistema (que por lo general son metálicos) que permite suponer que el vector de densidad de corriente es normal a la superficie del sistema.

4. Propiedades generales del campo electromagnético estacionario. En conclusión, examinemos ciertas propiedades generales del campo electromagnético estacionario. Sea que la corriente continua está concentrada en una zona limitada del espacio. Escogiendo cierta superficie S que separa la región V, fuera de la cual no hay corriente, en virtud de la (10.4), se obtiene

$$\oint_S [\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}]\, d\boldsymbol{s} = -\int_V \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\, dv. \tag{26.16}$$

Aumentemos ilimitadamente el volumen V, llevando la superficie S a la infinidad. A distancias suficientemente grandes, el campo eléctrico es semejante al campo de una carga puntual, mientras que el magnético se asemeja al campo de un dipolo magnético; así que la integral de superficie debe, al pasar al límite, desaparecer (comparar con el § 19, punto 1 y el § 25, punto 1) y obtenemos

$$\int_V \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\, dv = 0. \tag{26.17}$$

Antes de hacer cualquier deducción de la igualdad (26.17), señalemos que la magnitud de la integral no puede depender de V, si solamente en el interior de V está localizada *toda la corriente* (lo que precisamente se supuso con anterioridad). Por esta razón, el segundo miembro de la (26.16) es siempre cero, y de aquí

$$\oint_S [\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}]\, d\boldsymbol{s} = 0 \tag{26.18}$$

a condición de que la superficie S abarca toda la corriente. La igualdad obtenida expresa una importante propiedad de los campos electromagnéticos estacionarios: el flujo de energía que pasa por la superficie que contiene en su interior toda la corriente, es obligatoriamente igual a cero. Podemos decir que la corriente continua *no emite* energía.

Haciendo uso de la igualdad (26.17), sustituimos en ella la densidad de corriente por la intensidad del campo eléctrico con ayuda de la correlación (26.4a), es decir, suponiendo que en todo el volumen no hay fuerzas exteriores. De esta forma obtenemos

$$\int_V \frac{j^2}{\sigma}\, dv = 0,$$

de donde se desprende que $j = 0$. Pero sin corriente no hay campo electromagnético estacionario.

Si en lugar de la (26.4a) tomamos la correlación (26.4b), se crea la igualdad

$$\int_V \frac{j^2}{\sigma}\, dv = \int_V j E^{ex}\, dv, \tag{26.19}$$

que nos muestra que la corriente continua (junto con su campo) sólo existe al haber fuerzas exteriores, o sea, un manantial de energía de procedencia no electromagnética.

Para ilustrar este hecho, consideremos un circuito de corriente continua I en forma de un conductor cerrado y tomándolo como el contorno L, calculemos la circulación del vector $\boldsymbol{E}$ que, en virtud de la (26.2a), debe ser igual a cero. Sustituyendo $\boldsymbol{E}$ por $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{E}^{ex}$, por medio de la (26.4b), hallamos que

$$\int_L E^{ex} dl = \int_L \frac{j}{\sigma}\, dl.$$

Aquí

$$\int_L \frac{j}{\sigma}\, dl = \frac{I}{\sigma S} \oint_L dl = \frac{IL}{\sigma S} = I\mathcal{R}$$

(S es la sección transversal del conductor; $\mathcal{R}$, su resistencia).

De este modo,

$$\int_L E^{ex} dl = I\mathcal{R} \tag{26.20}$$

y, como vemos, la corriente I es igual a cero si en el circuito no actúan fuerzas exteriores ($E^{ex} = 0$).

La integral en la (26.20) que designamos por

$$U^{ex} = \oint_L E^{ex} dl, \tag{26.21}$$

se denomina *fuerza electromotriz* (f.e.m.), mientras que la correlación (26.20) expresa la ley de Ohm para el circuito de corriente continua.

III. Conclusión

Los campos estáticos y estacionarios, estudiados más arriba en este capítulo, son relativamente sencillos. Desde un punto de vista histórico, fueron estudiados mucho antes que aquellos cam-

pos que varían respecto al tiempo. Los últimos adquirieron interés práctico simultáneamente a la aparición de la electrotecnia de las corrientes alternas y, luego, de la radiotecnia. Como es natural, al estudiar fenómenos electromagnéticos variables en el tiempo, procuraron emplear la experiencia ya adquirida y los conceptos formados. Así apareció la teoría de los fenómenos *cuasiestacionarios*, es decir, "al parecer invariables"; a ésta pertenece, en esencia, la teoría de circuitos de corriente alterna. En nuestra Introducción señalamos que el concepto de circuitos de corriente alterna conserva su sentido mientras sea posible despreciar el retardo de un proceso electromagnético que se propaga por el espacio. Al examinar la radiación de energía electromagnética (capítulo 4) retornaremos a este punto de vista. Por ahora, tomamos en consideración la siguiente circunstancia.

Supongamos que se ha estudiado cierto campo electromagnético estacionario, es decir, que para la corriente continua y condiciones prefijadas, se han hallado las funciones de las coordenadas $\boldsymbol{E}(r)$ y $\boldsymbol{H}(r)$. Es evidente que podemos representarnos una variación tan lenta de la corriente que prácticamente el campo electromagnético variará junto con ella sólo *por su valor*, conservando su *distribución en el espacio*, o sea, $\boldsymbol{E}(r, t) \approx f(t)\boldsymbol{E}(r)$ y $\boldsymbol{H}(r, t) \approx f(t)\boldsymbol{H}(r)$, siendo $\boldsymbol{E}(r)$ y $\boldsymbol{H}(r)$ las funciones vectoriales anteriores, mientras que $f(t)$ expresa la ley de variación de la corriente. En esta sencilla consideración se basa la teoría de los fenómenos cuasiestacionarios, que, por consiguiente, conserva su validez para procesos suficientemente lentos.

§ 27. Campo electromagnético cuasiestacionario y circuito de corriente alterna

1. ***Inductancia y capacidad en los procesos cuasiestacionarios.*** Así, supongamos que un proceso electromagnético variable en el tiempo, se produce con suficiente lentitud (en particular, si se trata de oscilaciones armónicas, su frecuencia debe ser baja) y se puede considerar que la distribución del campo en cada momento es tal, como si éste fuera estacionario, independiente del tiempo. Vamos a demostrar que la aplicación del "principio cuasiestacionario" a las ecuaciones principales del campo y las correlaciones energéticas, proporciona ciertas nociones que se emplean extensamente en la práctica de ingeniería.

En el § 2, punto 2 fue señalado que la segunda ecuación de Maxwell puede examinarse como la ley generalizada de la inducción electromagnética de Faraday. Si L es un contorno con corriente $I(t)$, podemos escribir entonces esta ecuación en la forma (2.7)

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (27.1)$$

donde

$$U = \int_L \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}, \tag{27.2}$$

expresa la ley de la inducción electromagnética que, por lo general, se aplica a los sistemas cuasiestacionarios. En este caso U es, ni más ni menos, que la fuerza electromotriz (compárese con el § 26, punto 4) inducida en el contorno por un flujo magnético variable en el tiempo. Examinemos un contorno aislado no deformable. El flujo magnético Φ se crea aquí por la propia corriente del contorno I y, como el campo es *cuasiestacionario*, está relacionado con la corriente del contorno I mediante la misma relación que en el caso de corriente continua:

$$\Phi = \mathscr{L} I. \tag{27.3}$$

Por lo tanto, la ley de inducción electromagnética (27.1) toma el aspecto

$$U = -\mathscr{L}\frac{dI}{dt}. \tag{27.4}$$

Esta correlación sólo tiene sentido para un proceso cuasiestacionario, ya que la propia noción de inductancia tiene su origen en la teoría del campo magnético estacionario (§ 25). De forma análoga, cuando tenemos dos contornos con corrientes I_1 e I_2

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= -\mathscr{L}_1\frac{dI_1}{dt} - \mathscr{M}\frac{dI_2}{dt}, \\ U_2 &= -\mathscr{M}\frac{dI_1}{dt} - \mathscr{L}_2\frac{dI_2}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{27.5}$$

siendo $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{12} = \mathscr{M}_{21}$.

Puesto que para el campo cuasiestacionario $\boldsymbol{E} \approx -\operatorname{grad}\varphi$, conservan su valor las nociones de potencial y capacidad; esta última se determina como en electrostática:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \tag{27.6}$$

2. Energía del campo cuasiestacionario y circuito de corriente alterna. Consideremos, seguidamente, cualquier sistema que pueda ser definido como circuito de corriente alterna compuesto por una resistencia $\mathscr{R}$, inductancia $\mathscr{L}$ y capacidad C, unidas en serie, así como por un manantial de la f.e.m. U^{ex} (fig. 27.1).

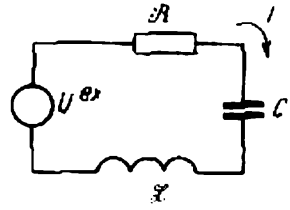


Fig. 27.1.

¿Qué significa que "pueda ser" definido? Primero, el sistema debe ser en realidad cuasiestacionario (las variaciones en el tiempo deben ser suficientemente lentas). Segundo, es preciso que pueda despreciarse el campo magnético de todos los elementos menos el de la inductancia y el campo eléctrico de

todos los elementos salvo el de la capacidad, mientras que la absorción de energía debe referirse sólo al elemento resistivo.

Entonces, la energía magnética y eléctrica del sistema puede expresarse mediante las fórmulas (25.8) y (19.5):

$$W^{m} = \frac{1}{2}\int_{V} \mu H^{2} dv = \frac{1}{2}\mathscr{L} I^{2} \tag{27.7}$$

y

$$W^{e} = \frac{1}{2}\int_{V} \varepsilon E^{2}\, dv = \frac{1}{2}\frac{q^{2}}{C} \tag{27.8}$$

(hablando en general, V es un espacio infinito), mientras que la potencia de las pérdidas tiene el aspecto

$$P_{p} = \int_{V} \frac{j^{2}}{\sigma} dv = I^{2}\mathscr{R}. \tag{27.9}$$

En lo que se refiere a la potencia del manantial, utilizaremos la *primera expresión* P^{ex} de la (9.10):

$$-P^{ex} = \int_{V} jE^{ex} dv = IU^{ex}. \tag{27.10}$$

Señalemos que la expresión de la f.e.m. que de aquí se desprende

$$U^{ex} = \frac{1}{I}\int_{V} jE^{ex} dv$$

tiene absolutamente el mismo sentido que en el § 26: para un contorno lineal L se transforma en la (26.21):

$$U^{ex} = \oint E^{ex} dl.$$

Para sacar provecho de todas las correlaciones halladas, tomemos la ecuación de balance de energía, por ejemplo, en la forma (10.9) y apliquémosla a una región infinita V que contiene el circuito a examinar y que puede considerarse aislada. Como hemos supuesto, la distribución del campo en el espacio no se diferencia de la de un campo estacionario, entonces el flujo del vector de Poynting por una superficie de separación trasladada al infinito, será igual a cero, en virtud del decrecimiento suficientemente rápido de los vectores E y H (§ 26, punto 4). Por lo tanto, introduciendo en la (10.9) $W = W^{e} + W^{m}$ y $P = P_{p} + P^{ex}$ y a base de las (27.7)—(27.10), tendremos la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathscr{L} I^{2}}{2} + \frac{q^{2}}{2C}\right) + I^{2}\mathscr{R} = IU^{ex}. \tag{27.11}$$

Teniendo en cuenta que $I = dq/dt$, después de diferenciar y dividir por I, obtenemos

$$\mathscr{L}\frac{dI}{dt} + I\mathscr{R} + \frac{q}{C} = U^{ex}, \tag{27.12}$$

a continuación, después de diferenciar por segunda vez,

$$\mathscr{L}\frac{d^2I}{dt^2}+\mathscr{R}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dU^{ex}}{dt}. \qquad (27.13)$$

Aquí hemos obtenido la notoria ecuación para el circuito de corriente alterna.

El grupo de fenómenos que describe la teoría de los circuitos debe ser bien conocido por aquel de nuestros lectores que ha estudiado electrotecnia y fundamentos de radiotecnia. Nuestra tarea no comprende la repetición de dicho material. Sólo queríamos explicar el carácter de las simplificaciones que se utilizan en la mencionada teoría.

Capítulo 3

Ondas electromagnéticas

1. Fundamentos generales de electrodinámica

Deseando estudiar los fundamentos de electrodinámica, debemos hacer uso del sistema de ecuaciones de Maxwell en su forma completa. Sin embargo, prestaremos particular atención a los procesos que transcurren según la ley de las oscilaciones armónicas y en este caso, el *empleo del método de las amplitudes complejas* conduce el sistema de ecuaciones de Maxwell a una forma extremadamente reducida. Es muy importante que, al mismo tiempo, este método crea en electrodinámica nuevas nociones substanciales, cuya transcendencia no se limita por su papel en el aparato formal.

El material de este párrafo forma la base del posterior contenido de esta obra. Al leerlo por vez primera, puede dejarse pasar sólo el § 31.

§ 28. Ecuaciones principales de electrodinámica

1. Sistema de ecuaciones de Maxwell. Manantiales (fuentes) del campo. Las ecuaciones de electrodinámica es el sistema completo de ecuaciones de Maxwell (§ 13, punto 1); al caracterizar un campo en cierto punto del espacio, tenemos

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \\ \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}^{\mathrm{ex}}; \end{aligned}\right\} \tag{28.1}$$

la última de las ecuaciones se ha tomado en la forma representada en la segunda fila de la (13.2); sin fuerzas exteriores $j^{ex} = 0$. Escribamos también las correspondientes correlaciones integrales:

$$\left.\begin{aligned} \oint_L \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l} &= \frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} + I, \quad \oint_S \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = q, \\ \oint_L \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{s}, \quad \oint_S \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28.2}$$

Indiquemos que las ecuaciones materiales que componen el sistema (28.1) no son totalmente universales (véase el § 5), pero, sin embargo, tal forma de éstas es de extensa divulgación, gracias a su sencillez y amplia aplicación.

Como es sabido, las ecuaciones (28.1) expresan las leyes generales del electromagnetismo; estas ecuaciones de electrodinámica describen las propiedades generales de los campos y no pueden tener soluciones determinadas en forma de las funciones vectoriales $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, etc., hasta que a ellas no se agreguen condiciones que caractericen cierto problema concreto.

Detengámonos en una cuestión general. Supongamos que en todo el espacio o bien en cierta región V aislada que consideramos, no actúan fuerzas exteriores. Si al mismo tiempo, fue hallada una solución desde un punto de vista físico comprensible del sistema de ecuaciones de electrodinámica (28.1), ésta expresa un campo electromagnético *libre*, o sea, un campo, cuya existencia no se origina por los procesos de transformación de energía no electromagnética en energía electromagnética, "sin causas fuera de sí mismo". En este capítulo, más adelante (§ 32 y a continuación), serán considerados los campos libres más sencillos, es decir, ondas planas homogéneas.

Al actuar fuerzas exteriores se produce la *excitación* de un campo electromagnético determinado. También se utiliza la expresión "fuerza excitatriz", pero con mayor frecuencia, *manantial* del campo. Denominaremos *forzado* un campo electromagnético provocado por la acción de fuerzas exteriores, o sea, por manantiales. La transmisión de energía por un campo excitado se caracteriza, por lo general, como la *radiación* del manantial.

Los manantiales pueden ser prefijados de diversas formas, por ejemplo, por medio de las condiciones límites, pero, quizás, con la mayor frecuencia en los problemas que tratan los campos excitados se da la función j^{ex} (o bien η^{ex}, comparar con el § 7, punto 4), que sólo en cierta región, llamada *región del manantial*, no es igual a cero. Marquemos que el proceso de transformación de la energía de cierto tipo en energía del campo electromagnético no debe transcurrir obligatoriamente en la región del manantial. Por ejemplo, tomemos una antena metálica emisora. Podemos hallar el campo de radiación conociendo la corriente distribuida por la antena y si resulta que ésta es conocida, debemos considerarla

exterior. En lo que se refiere a la energía no electromagnética que se consume y que, a fin de cuentas, sustenta dicha corriente, ésta puede ser la energía química de una batería o bien la energía térmica de una central eléctrica que alimenta el transmisor conectado a la antena. Claro está que los indicados factores primarios deben quedar fuera de los límites del problema electrodinámico.

2. **Ecuaciones de segundo orden.** De las ecuaciones de electrodinámica (28.1), podemos eliminar todas las magnitudes incógnitas, salvo la intensidad del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ o bien la intensidad del campo magnético $\boldsymbol{H}$ y obtener ecuaciones diferenciales de segundo orden con derivadas parciales respecto a dichas funciones. Con ayuda de las ecuaciones materiales, sustituyamos la inducción en las dos primeras ecuaciones de Maxwell por las intensidades y después de operaciones evidentes, que contienen la aplicación de la operación rot, obtenemos

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \boldsymbol{j},$$

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$$

(ε^{-1} y μ^{-1} no se han sacado fuera del signo rot, como suponemos que las permeabilidades dependen de las coordenadas). A continuación, haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell, eliminamos *rot* $\boldsymbol{E}$ y *rot* $\boldsymbol{H}$ *en los segundos miembros, debido a lo que obtenemos*

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \boldsymbol{j} \tag{28.3}$$

y

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}. \tag{28.4}$$

Al sustituir $\boldsymbol{j}$ por $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{j}^{ex}$ (la última función es prefijada), la segunda de estas igualdades se convierte en una ecuación respecto a $\boldsymbol{E}$:

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{j}^{ex}}{\partial t}. \tag{28.5}$$

Si el medio es homogéneo, ε^{-1} y μ^{-1} se sacan fuera del signo rot, mientras que las funciones rot rot $\boldsymbol{E}$ y rot rot $\boldsymbol{H}$ se transforman aplicando la identidad (S1.34); en este caso se tiene en cuenta que a causa de la homogeneidad del medio div $\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon$ y div $\boldsymbol{H} = 0$. Las igualdades (28.3) y (28.4) toman el aspecto

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{j} \tag{28.6}$$

y

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \varepsilon^{-1} \nabla\rho + \mu \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}. \tag{28.7}$$

Si los segundos miembros están prefijados (por ejemplo, para $\sigma = 0$ en la (28.6), a la derecha tenemos $-\operatorname{rot} \boldsymbol{j}^{ex}$), éstas serán las *ecua-*

cions ede D'Alembert. Al no haber ni corrientes ni cargas ($j=0$, $\rho=0$), se convierten en *ecuaciones* vectoriales homogéneas *de la onda*

$$\nabla^2 H - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \qquad (28.8)$$

y

$$\nabla^2 E - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \qquad (28.9)$$

Para aquellos campos que no varían respecto al tiempo, las anteriores ecuaciones se convierten en formas más sencillas y que ya vimos al estudiar los campos estáticos y estacionarios. Así, las (28.6) y (28.7) pasan a ser ecuaciones vectoriales de Poisson, respectivamente (22.5) y (14.4), mientras que las (28.8) y (28.9), a ecuaciones vectoriales de Laplace.

Esta circunstancia da lugar a subrayar el papel de la corriente de desplazamiento en los procesos electrodinámicos. Al no tenerla en cuenta, es decir, suponiendo que $\partial D/\partial t = 0$, como resultado de la deducción obtendríamos en lugar de las (28.6) y (28.7) las ecuaciones de Poisson.

3. Potenciales electrodinámicos. Observando tradiciones, introduzcamos en nuestras consideraciones funciones auxiliares, de modo semejante a como anteriormente se hizo en el capítulo 2. Empleando la noción de potencial vectorial (§ 22, punto 3), expresemos la intensidad del campo magnético en la siguiente forma

$$H = \mu^{-1} \operatorname{rot} A. \qquad (28.10)$$

Poniendo esta expresión en la segunda ecuación de Maxwell, obtenemos

$$\operatorname{rot}\left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0.$$

Si advertimos que la función entre paréntesis, a causa de la identidad (S1.33), es posible igualarla al gradiente de una magnitud escalar que designaremos por $-\varphi$, hallamos que

$$E = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \qquad (28.11)$$

(compárese con el § 14, punto 1). De esta forma, los vectores del campo E y H están representados por las funciones auxiliares A y φ; estos últimos llamaremos *potenciales electrodinámicos*.

Hallemos aquellas ecuaciones que satisfacen A y φ. Introduciendo las (28.10) y (28.11) en la primera ecuación de Maxwell, obtenemos

$$\operatorname{rot}\mu^{-1}\operatorname{rot} A = -\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\left(\operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial A}{\partial t}\right) + j.$$

Suponiendo que el medio es homogéneo y aplicando la identidad (S1.34), reducimos la anterior igualdad al aspecto

$$\nabla^2 A - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div} A\right) = -\mu j. \qquad (28.12)$$

Como la definición de los potenciales es en cierto grado arbitraria (lo mismo que en el § 14, la función φ se determina con una precisión que alcanza hasta la constante aditiva y $\boldsymbol{A}$, con una precisión de hasta el gradiente de cierta magnitud escalar, como en el § 22), la ecuación (28.12) puede simplificarse aplicando a $\boldsymbol{A}$ y φ una condición complementaria [1])

$$\varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{28.13}$$

Entonces la (28.12) se convierte en la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{j}; \tag{28.14}$$

mientras que de las (28.13) y (28.11) obtenemos con facilidad

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{28.15}$$

Para $\boldsymbol{j}$ y ρ prefijadas, ésta es la ecuación de D'Alembert respecto a $\boldsymbol{A}$ y φ.

Si dichos potenciales han sido hallados, los vectores del campo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ se determinan por las fórmulas (28.10) y (28.11). Pero φ puede ser eliminado de antemano: según la (28.11) y (28.13)

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}. \tag{28.16}$$

Señalemos que al no haber dependencia del tiempo, las igualdades (28.11), (28.13), (28.14) y (28.15) se transforman, respectivamente, en (14.3), (22.11), (22.12) y (14.9).

§ 29. Permitividad y permeabilidad magnética complejas y ecuaciones de electrodinámica en forma compleja

1. Paso a la forma compleja de las ecuaciones de electrodinámica. Permitividad compleja. Al comienzo del presente capítulo se indicó la importancia de los campos que oscilan armónicamente. En este caso, todas las funciones vectoriales que constituyen las ecuaciones (28.1), es decir, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{j}$ tienen la forma de la (S3.1) y la función escalar ρ también tiene la respectiva forma. Aplicando el método de amplitudes complejas, en las (28.1) sustituimos todas las funciones enumeradas por sus representaciones complejas:

$$\boldsymbol{E} \longrightarrow \dot{\boldsymbol{E}}_m e^{i\omega t}, \quad \boldsymbol{H} \longrightarrow \dot{\boldsymbol{H}}_m e^{i\omega t}, \text{ etc.}$$

[1]) En física esto se denomina con frecuencia "calibración de Lorentz", mientras que la condición que anteriormente utilizamos (22.11), "calibración de Coulomb".

Por ejemplo, de este modo, en la primera ecuación de Maxwell (28.1a), obtenemos

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m e^{i\omega t} = \frac{\partial}{\partial t} \dot{D}_m e^{i\omega t} + \dot{j}_m e^{i\omega t}.$$

Pero como respecto a la operación rot, el factor $e^{i\omega t}$, que no depende de las coordenadas, actúa como coeficiente constante y al diferenciar respecto al tiempo resulta ser constante la amplitud compleja, entonces

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m = i\omega \dot{D}_m + \dot{j}_m. \tag{29.1}$$

De esta manera, se halla la ecuación respecto a las amplitudes complejas que han perdido la dependencia de tiempo.

Aquí vemos que las ecuaciones de electrodinámica se reducen con facilidad a su forma compleja, efectuando las operaciones que se estudian en el Suplemento 3. En este caso que consideramos, es suficiente sustituir en las ecuaciones las funciones del campo por sus amplitudes complejas y la diferenciación respecto al tiempo, por la multiplicación por $i\omega$.

Sin embargo, antes de escribir todo el sistema de las ecuaciones de electrodinámica (28.1) en su forma compleja, retornemos a la ecuación (29.1), con objeto de efectuar en ella ciertas transformaciones. En virtud del (28.1), escribimos en lugar de $\dot{D}_m$ y $\dot{j}_m$, respectivamente, las funciones $\varepsilon \dot{E}_m$ y $\sigma \dot{E}_m + \dot{j}_m^{ex}$

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m = i\omega\varepsilon \dot{E}_m + \sigma \dot{E}_m + \dot{j}_m^{ex}$$

sacando de los dos primeros sumandos del segundo miembro el factor común $\dot{E}_m$, nos permite representarlos en la forma

$$i\omega\varepsilon \dot{E}_m + \sigma \dot{E}_m = i\omega \left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{E}_m = i\omega \dot{\varepsilon} \dot{E}_m,$$

donde el parámetro

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \tag{29.2}$$

se denomina *permitividad (constante dieléctrica) compleja*. Aplicando esta nueva noción, a la primera ecuación de Maxwell (29.1) se le puede dar la siguiente forma:

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m = i\omega \dot{\varepsilon} \dot{E}_m + \dot{j}_m^{ex}, \tag{29.3}$$

de modo que, en caso particular, sin fuerzas exteriores, dicha ecuación no contiene en forma manifiesta la corriente de conducción:

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m = i\omega\varepsilon \dot{E}_m. \tag{29.3a}$$

Si en un caso el medio tiene cierta conductibilidad ($\sigma \neq 0$), mientras que en el otro, no ($\sigma = 0$), la diferencia sólo se manifiesta en el carácter del parámetro $\dot{\varepsilon}$ (véase la (29.2)) que en el primer caso será magnitud compleja, y en el segundo, real.

2. Remanencia (persistencia) de los procesos de polarización e imanación. Permitividades complejas. La permitividad compleja $\dot{\varepsilon}$ introducida anteriormente, es un símbolo útil que mejora la forma de la primera ecuación de Maxwell. Pero podemos ir más adelante y generalizar la noción de la constante dieléctrica compleja hasta tal punto que nos permita tomar en consideración las particularidades de los procesos que transcurren en un dieléctrico a los que anteriormente no prestábamos atención.

Recordemos que las ecuaciones materiales en el (28.1) no reflejan la remanencia de los procesos de polarización: si para oscilaciones armónicas $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_m \cos \omega t$, según las (28.1), $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}_m \cos \omega t$. Pero en realidad, ya que los procesos de polarización en la materia no se producen inmediatamente después de variar el campo, la inducción eléctrica como función del tiempo "se retrasa" en cierto grado, es decir, las oscilaciones se producen con un retardo de fase igual a cierta magnitud α y es preciso escribir $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}_m \cos(\omega t - \alpha)$; el desfasaje α, prácticamente, puede ser advertido sólo con muy altas frecuencias ω. Tomando las amplitudes complejas de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{D}$ iguales, respectivamente, a $\dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{E}_m$ y $\dot{\boldsymbol{D}}_m = \varepsilon \boldsymbol{E}_m e^{-i\alpha}$, vemos que se diferencian por el factor complejo $\varepsilon e^{-i\alpha} = \varepsilon \cos \alpha - i\varepsilon \operatorname{sen} \alpha$. Esto significa que si queremos tener en cuenta la remanencia de la polarización, la forma compleja de la ecuación $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ debe escribirse en la forma

$$\dot{\boldsymbol{D}}_m = \varepsilon e^{-i\alpha} \dot{\boldsymbol{E}}_m. \tag{29.4}$$

Debido a esto, en los cálculos anteriores hay que sustituir ε por $\varepsilon e^{-i\alpha}$. Al verificar esta operación en la (29.2), obtenemos una expresión más completa de la constante dieléctrica compleja:

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon'',$$

al mismo tiempo

$$\varepsilon' = \varepsilon \cos \alpha, \quad \varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} + \varepsilon \operatorname{sen} \alpha. \tag{29.5}$$

Aquí debemos indicar que la constante dieléctrica compleja $\dot{\varepsilon}$ es el coeficiente de proporcionalidad entre las magnitudes $\dot{\boldsymbol{D}}_m = \dot{\varepsilon} \dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{E}}_m$. La primera de ellas, $\dot{\boldsymbol{D}}_m$, no es la amplitud compleja de la inducción eléctrica $\dot{\boldsymbol{D}}_m$, determinada por la fórmula (29.4). Escribamos:

$$\frac{\dot{\boldsymbol{D}}_m}{\dot{\boldsymbol{E}}} = \dot{\varepsilon} = |\dot{\varepsilon}| e^{-i\Delta}, \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}, \tag{29.6}$$

donde $\varepsilon' = |\dot{\varepsilon}| \cos \Delta$ y $\varepsilon'' = |\dot{\varepsilon}| \operatorname{sen} \Delta$ se determinan de la (29.5). El ángulo Δ que expresa el retardo de fase entre $\dot{\boldsymbol{D}}$ y $\boldsymbol{E}$, se denomina "ángulo de pérdidas eléctricas", mientras que la razón $\varepsilon''/\varepsilon'$, como vemos, resulta ser la tangente del ángulo de pérdida (factor de pérdidas). Al ser posible despreciar la remanencia de los procesos de polarización y poniendo en la (29.5) $\alpha = 0$, la tangente

del ángulo de pérdida es la siguiente magnitud:

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \quad (\alpha = 0), \tag{29.7}$$

ya estudiada en el § 6, punto 3 y que es igual a la relación entre las amplitudes de la densidad de corriente de conducción y la densidad de corriente de desplazamiento. Escribamos seguidamente, en virtud de la (6.10), el criterio de apreciación de las propiedades de los medios en la forma

$$\operatorname*{tg}_{(\alpha=0)}\Delta \begin{cases} \ll 1 \text{—dieléctrico,} \\ \gg 1 \text{—conductor.} \end{cases} \tag{29.8}$$

Por fin, refirámonos a los procesos de imanación. Teniendo en cuenta su remanencia, en lugar de la relación $\dot{\boldsymbol{B}}_m = \mu\dot{\boldsymbol{H}}_m$, escribamos

$$\dot{\boldsymbol{B}}_m = \mu e^{-i\beta}\dot{\boldsymbol{H}}_m, \tag{29.9}$$

siendo β el respectivo retardo de fase, o sea, el "ángulo de las pérdidas magnéticas". Por consiguiente, la permeabilidad magnética, del mismo modo que la permitividad, deberá generalmente considerarse en las ecuaciones para las amplitudes complejas como magnitud compleja:

$$\dot{\mu} = \mu' - i\mu'', \quad \begin{cases} \mu' = \mu\cos\beta, \\ \mu'' = \mu\operatorname{sen}\beta. \end{cases} \tag{29.10}$$

3. **Ecuaciones de Maxwell en forma compleja.** Basándonos en lo anteriormente expuesto, se puede escribir el sistema completo de las ecuaciones de electrodinámica en forma compleja. Podemos fácilmente convencernos de que dicha forma se expresa con las dos siguientes ecuaciones:

$$\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}}_m = i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m + \dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}, \tag{29.11a}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{E}}_m = -i\omega\dot{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_m, \tag{29.11b}$$

la primera de las cuales fue obtenida anteriormente en el punto 2 y la segunda se desprende de la (29.1) al introducir a ella la permeabilidad magnética compleja. Y, efectivamente, las ecuaciones materiales que relacionan la inducción y la densidad de corriente de conducción con la intensidad del campo, se han tenido en cuenta en las ecuaciones (29.11). En lo que se refiere a las ecuaciones de Maxwell con divergencias, éstas se desprenden directamente de las (29.11), lo que demostraremos a continuación.

Aplicando la operación div respecto a la (29.11b) y debido a la (S1.32), inmediatamente obtenemos

$$\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{B}}_m = 0, \tag{29.12}$$

que es la forma compleja de la ecuación $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$.

Semejantemente, de la (29.11a) hallamos en primer lugar

$$\operatorname{div}(i\omega\dot{\boldsymbol{D}}_m + \sigma\dot{\boldsymbol{E}}_m + \dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}) = 0,$$

donde hemos hecho uso de las correlaciones (29.4) y (29.5). Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (4.2) que en forma compleja tiene la forma

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{j}}_m = -\omega \dot{\rho}_m, \tag{29.13}$$

pero, como de acuerdo con las (28.1) $\dot{\boldsymbol{j}}_m = \sigma \dot{\boldsymbol{E}}_m + \dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}$, obtenemos

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{D}}_m = \dot{\rho}_m, \tag{29.14}$$

que es la forma compleja de la ecuación $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho$.

Es lógico que esta deducción es también válida, cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ si no se tiene en cuenta la remanencia de la polarización e imanación.

Así, el método de las amplitudes complejas nos lleva a una forma bastante breve de la representación del sistema de ecuaciones de electrodinámica (29.11) que, además, de modo más completo que el sistema de ecuaciones (28.1), toma en cuenta las singularidades de los procesos de polarización e imanación. En principio, tal enfoque aplicable directamente para oscilaciones armónicas, se generaliza con facilidad para cualesquiera dependencias del tiempo. Como se desprende del Suplemento 8, punto 1, al representar los vectores del campo en forma de series o integrales de Fourier, tendrán lugar las ecuaciones de la forma (23.11) respecto a los coeficientes de Fourier, o bien, respectivamente, a las funciones de la densidad espectral $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$.

Nos queda señalar una circunstancia, relacionada con la representación de las ecuaciones de electrodinámica en forma compleja. En ciertos casos, es más cómodo subrayar la densidad de corriente de conducción $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}^{ex}$ (por lo general en cierta región V parcial). Entonces, la ecuación (29.11a) tiene el aspecto

$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_m = \omega \dot{\varepsilon} \dot{\boldsymbol{E}}_m + \dot{\boldsymbol{j}}_m, \tag{29.15}$$

siendo $\dot{\varepsilon} = \varepsilon e^{-i\alpha}$ en la región de separación de la corriente.

4. Ecuaciones de segundo orden en forma compleja. Las ecuaciones de electrodinámica de segundo orden (28.3)—(28.9), así como las ecuaciones respecto de los potenciales (28.14), (28.15) se pueden reducir de inmediato a la forma compleja, sustituyendo los vectores por sus amplitudes complejas y la diferenciación doble respecto al tiempo $\partial^2/\partial t^2$, por la multiplicación por $(i\omega)^2 = -\omega^2$. Pero si en calidad de punto inicial se toman las ecuaciones de electrodinámica (29.11), obtenemos un resultado de contenido físico más amplio.

Operando con las ecuaciones (29.11) de forma semejante a como anteriormente se hizo en el § 28, punto 2, con las ecuaciones de (28.1), en lugar de las (28.3) y (28.4), hallamos las siguientes ecuaciones de segundo orden:

$$\operatorname{rot} \dot{\varepsilon}^{-1} \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_m - \omega^2 \dot{\mu} \dot{\boldsymbol{H}}_m = \operatorname{rot} \dot{\varepsilon}^{-1} \dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex} \tag{29.16}$$

y

$$\operatorname{rot} \dot{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \dot{E}_m - \omega^2 \dot{\varepsilon} \dot{\mu} \dot{E}_m = -i\omega \dot{j}_m^{ex}. \tag{29.17}$$

Pasando al caso cuando el medio es homogéneo ($\dot{\varepsilon} = \text{const}$, $\dot{\mu} = \text{const}$), tomamos en cuenta que según la (29.11a), $i\omega \varepsilon \operatorname{div} \dot{E}_m = -\operatorname{div} \dot{j}_m^{ex}$, mientras que de la (29.12) se desprende que $\operatorname{div} \dot{H}_m = 0$. Por esta razón, del mismo modo que en el § 28, punto 2, que ha conducido a las ecuaciones de D'Alembert (28.6) y (28.7), obtenemos las siguientes *ecuaciones no homogéneas de Helmholtz*:

$$\nabla^2 \dot{H}_m + \omega^2 \dot{\varepsilon} \dot{\mu} \dot{H}_m = -\operatorname{rot} \dot{j}_m^{ex}, \tag{29.18}$$

$$\nabla^2 \dot{E}_m + \omega^2 \dot{\varepsilon} \dot{\mu} \dot{E}_m = \frac{i\dot{\varepsilon}^{-1}}{\omega} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{j}_m^{ex} + i\omega \dot{\mu} \dot{j}_m^{ex}. \tag{29.19}$$

Sin corriente exterior ($\dot{j}^{ex} = 0$), estas ecuaciones se convierten en las *ecuaciones homogéneas de Helmholtz*

$$\nabla^2 \dot{H}_m + \omega^2 \dot{\varepsilon} \dot{\mu} \dot{H}_m = 0, \tag{29.20}$$

$$\nabla^2 \dot{E}_m + \omega^2 \dot{\varepsilon} \dot{\mu} \dot{E}_m = 0. \tag{29.21}$$

A continuación, consideremos la aplicación de los potenciales electrodinámicos. La amplitud compleja del potencial vectorial $\dot{A}$ se define mediante la igualdad

$$\dot{H}_m = \dot{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \dot{A}_m. \tag{29.22}$$

Entonces

$$\dot{E}_m = -\operatorname{grad} \dot{\varphi}_m - i\omega \dot{A}_m \tag{29.23}$$

(compárase con la obtención de la (28.11)). En lugar de las ecuaciones de D'Alembert (28.14) y (28.15) y a condición de

$$i\omega \dot{\varepsilon} \dot{\mu} \dot{\varphi}_m + \operatorname{div} \dot{A}_m = 0, \tag{29.24}$$

correspondiente a la (28.13), obtenemos las ecuaciones no homogéneas de Helmholtz

$$\nabla^2 \dot{A}_m + \omega^2 \dot{\varepsilon} \dot{\mu} \dot{A}_m = -\dot{\mu} \dot{j}_m^{ex}, \tag{29.25}$$

$$\nabla^2 \dot{\varphi}_m + \omega^2 \dot{\varepsilon} \dot{\mu} \dot{\varphi}_m = -\frac{i\dot{\varepsilon}^{-1}}{\omega} \operatorname{div} \dot{j}_m^{ex}, \tag{29.26}$$

y finalmente, en virtud de las (29.23) y (29.24), tenemos

$$\dot{E}_m = -\frac{i}{\omega \dot{\varepsilon} \dot{\mu}} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{A}_m + \omega^2 \dot{\varepsilon} \dot{\mu} \dot{A}_m). \tag{29.27}$$

§ 30. Balance de energía para oscilaciones armónicas

1. Características energéticas medias. Aunque las características energéticas del campo electromagnético ya fueron estudiadas en el capítulo 1 y, en particular, en el § 10 se confeccionó la ecuación del balance de energía, debemos retornar a este tema para aclarar ciertas propiedades de los campos que oscilan armónicamente. En este caso, son interesantes no sólo los valores instantáneos de la energía, potencia, vector de Poynting y de funciones análogas de los vectores del campo, sino sus valores *medios respecto al tiempo*; a estos últimos prestaremos la mayor atención. Aquí, haremos uso de las ventajas que nos presta la introducción de las permeabilidades complejas, así como también obtendremos su interpretación energética.

Comencemos por expresar el valor medio de aquellas magnitudes que ya conocemos. Suponiendo que los procesos que transcurren en la materia carecen de inercia, en el § 11, punto 1 hemos llegado a la expresión de la densidad de energía del campo w. Para hallar el valor medio $\overline{w}$ de la magnitud w para oscilaciones armónicas, debemos sustituir E^2 y H^2 por sus correspondientes valores medios $\overline{E}^2$ y $\overline{H}^2$. Por esta razón, de acuerdo con la (11.5) y la (S3.13)

$$\overline{w} = \frac{1}{4}(\varepsilon \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu \dot{H}_m \dot{H}_m^*), \tag{30.1}$$

y también

$$\overline{w}^e = \frac{1}{4}\varepsilon \dot{E}_m \dot{E}_m^* \quad \text{y} \quad \overline{w}^m = \frac{1}{4}\mu \dot{H}_m \dot{H}_m^*. \tag{30.1a}$$

La integral de $\overline{w}$ por cierta región V, nos da el valor medio de la energía $\overline{W}$ del campo que oscila armónicamente, siendo justas las suposiciones hechas en el § 11, punto 1 sobre las propiedades del medio. Designemos las integrales por V de $\overline{w}^e$ y $\overline{w}^m$, es decir, la energía media eléctrica y magnética, por $\overline{W}^e$ y $\overline{W}^m$.

A continuación, de acuerdo con la (S3.14), el valor medio para la densidad de potencia $p = jE$ (9.3), es

$$\overline{p} = \frac{1}{2}\operatorname{Re} \dot{j}_m^* \dot{E}_m = \frac{1}{2}\operatorname{Re} \dot{j}_m \dot{E}_m^*. \tag{30.2}$$

Comúnmente, la magnitud

$$\dot{p} = \frac{1}{2}\dot{j}_m^* \dot{E}_m \tag{30.3}$$

se denomina densidad de *potencia compleja*, al mismo tiempo

$$\overline{p} = \operatorname{Re} \dot{p}. \tag{30.4}$$

La *potencia compleja* $\dot{P}$ en V es la integral por V de $\dot{p}$, mientras que la potencia media, su parte real $\overline{P} = \operatorname{Re} \dot{P}$, llamada también *potencia activa*.

De manera semejante, el valor medio del vector de Poynting $\Pi = [E, H]$ (11.10) se determina en virtud del (S3.15):

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m^*, \dot{H}_m] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]. \tag{30.5}$$

Introduzcamos el llamado *vector complejo de Poynting*

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] \tag{30.6}$$

y escribamos

$$\overline{\Pi} = \operatorname{Re} \dot{\Pi}. \tag{30.7}$$

2. Balance medio de energía. Efectuemos, ahora, la deducción de nuevas correlaciones energéticas que se desprenden de las ecuaciones de electrodinámica (29.11). Verifiquemos en la segunda de ellas la multiplicación por $\dot{H}_m^*$, y tomemos la primera en forma compleja conjugada

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m^* = -i\omega \dot{\varepsilon}^* \dot{E}_m^* + (\dot{j}_m^{ex})^*$$

y la multiplicamos por $\dot{E}_m$. Restando los primeros miembros y por separado los segundos de las igualdades obtenidas, hallamos (comparar con el § 10, punto 1)

$$\dot{H}_m^* \operatorname{rot} \dot{E}_m - \dot{E}_m \operatorname{rot} \dot{H}_m^* = -i\omega \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_m^* + i\omega \dot{\varepsilon}^* \dot{E}_m^* \dot{E}_m - (\dot{j}_m^{ex})^* \dot{E}_m,$$

o bien, teniendo en cuenta (S1.31)

$$\operatorname{div} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] = i\omega (\dot{\varepsilon}^* \dot{E}_m^* \dot{E}_m - \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_m^*) - (\dot{j}_m^{ex})^* \dot{E}_m. \tag{30.8}$$

Este es el análogo complejo de la ecuación del balance local de la energía (10.3). Escribamos de nuevo la (30.8) utilizando los símbolos introducidos anteriormente (30.3) y (30.6):

$$\operatorname{div} \dot{\Pi} = i \frac{\omega}{2} (\dot{\varepsilon}^* \dot{E}_m^* \dot{E}_m - \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_m^*) - \dot{p}^{ex}. \tag{30.8a}$$

Aquí $\dot{p}^{ex}$ es la *densidad de potencia compleja del manantial*.

Efectuando la integración por cierto volumen V con frontera S y aplicando al primer miembro el teorema de Ostrogradski — Gauss, daremos a esta igualdad una forma análoga a la (10.4):

$$\oint_S \dot{\Pi} \, ds = i \frac{\omega}{2} \int_V (\dot{\varepsilon}^* \dot{E}_m^* \dot{E}_m - \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_m^*) \, dv - \dot{P}^{ex}, \tag{30.9}$$

donde se ha introducido la designación para la potencia compleja del manantial

$$\dot{P}^{ex} = \int_V \dot{p}^{ex} \, dv = \frac{1}{2} \int_V (\dot{j}_m^{ex})^* \dot{E}_m \, dv \tag{30.10}$$

(compárese con la (9.10)).

¿Cuál es el sentido de la ecuación (30.9)? Para poder dar respuesta a esta pregunta, dividamos en dicha ecuación el miembro real y el imaginario, teniendo, simultáneamente, en cuenta que $\dot{\varepsilon}^* = \varepsilon' + i\varepsilon''$ y $\dot{\mu} = \mu' - i\mu''$. Esta operación nos da

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\Pi}\, ds = -\frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*)\, dv - \operatorname{Re} \dot{P}^{ex}, \quad (30.11a)$$

$$\operatorname{Im} \oint_S \dot{\Pi}\, ds = \frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon' \dot{E}_m \dot{E}_m^* - \mu' \dot{H}_m \dot{H}_m^*)\, dv - \operatorname{Im} \dot{P}^{ex}. \quad (30.11b)$$

La interpretación de la primera de estas igualdades es sencilla. En virtud de la (30.7), el primer miembro de la (30.11a) es el *valor medio del flujo de energía* que pasa por la superficie cerrada S que acota el volumen V, mientras que el último término, de acuerdo con la (30.4), expresa la *potencia media del manantial*; de esta forma,

$$\oint_S \overline{\Pi} ds = -\frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*)\, dv - \overline{P}^{ex}. \quad (30.12)$$

Puesto que el manantial, consumiendo energía no electromagnética, crea la energía del campo electromagnético, entonces $\overline{P}^{ex} < 0$. En lo que se refiere al primer término del segundo miembro de la (30.12), tomado sin el signo menos, quiere decir que para

$$\varepsilon'' > 0 \quad \text{y} \quad \mu'' > 0 \quad (30.13)$$

será con seguridad positivo y, por consiguiente, caracteriza la absorción; por su sentido, éste expresa la potencia media de absorción en el medio. Efectivamente, si la región V está energéticamente aislada ($\overline{\Pi} = 0$ en S), entonces la integral

$$\overline{P}_p = \frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*)\, dv \quad (30.14)$$

será igual a la potencia $-\overline{P}^{ex}$ de salida del manantial (la absorción tiene lugar si una de las magnitudes no negativas ε'' y μ'' no es igual a cero). En particular, si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ en las (29.5) y (29.10), cuando

$$\mu'' = 0, \quad \varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}, \qquad \mu' = \mu, \quad \varepsilon' = \varepsilon, \quad (30.15)$$

tenemos

$$\overline{P}_p = \frac{\omega}{2} \int_V \varepsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^*\, dv = \frac{1}{2} \int_V \sigma \dot{E}_m \dot{E}_m^*\, dv. \quad (30.16)$$

Esta fórmula expresa la potencia media de las pérdidas térmicas en el medio.

Así pues, la igualdad (30.12) resulta ser la *ecuación del balance medio de energía* para oscilaciones armónicas y se le puede dar la forma

$$\oint_S \overline{\Pi} d\boldsymbol{s} + \overline{P} = 0 \quad (\overline{P} = \overline{P}_p + \overline{P}^{ex}) \tag{30.17}$$

para poderla comparar con la ya conocida ecuación del balance instantáneo de energía (10.9). No es casual que en la (30.17) está ausente la velocidad media de variación de la energía $\overline{dW/dt}$. Esta magnitud es nula ya que la propia derivada dW/dt oscila armónicamente (con una frecuencia de 2ω a causa de que W es cuadrática). Señalemos que en la (30.17) la potencia media total $\overline{P}$ se denomina en ciertas ocasiones "potencia activa": $\overline{P} = P_a$.

Por último se puede hacer la siguiente pregunta: ¿son siempre ε'' y μ'' no negativas, o no? Cuando $\varepsilon'' < 0$ o bien (y) $\mu'' < 0$, en lugar de absorción deberá producirse la *regeneración* (restablecimiento) o *generación* de la energía a causa de ciertos procesos en el medio relacionados con la transformación de la energía no electromagnética. Tales medios *regenerativos*, efectivamente, hace falta considerar, por ejemplo, en la teoría de los amplificadores o generadores paramétricos o cuánticos (§ 85). Claro está que en tal caso, en la (30.14) tendremos no la potencia de absorción, sino la potencia de regeneración (generación).

Pasemos a la ecuación (30.11b). En caso particular, correspondiente a la condición (30.15), en virtud de la (30.1a), la primera integral del segundo miembro se expresa por medio de la energía media eléctrica y magnética en V, de forma que obtenemos

$$\operatorname{Im} \oint_S \Pi d\boldsymbol{s} = 2\omega (\overline{W}^e - \overline{W}^m) - \operatorname{Im} P^{ex}. \tag{30.18}$$

Como suele decirse, en la (30.18) la integral del primer miembro caracteriza el *flujo "reactivo" de energía*, mientras que la magnitud $\operatorname{Im} P^{ex}$, la *potencia "reactiva"* ("desvatada") *del manantial:* $\operatorname{Im} P^{ex} = P_r$.

De aquí vemos, que para un sistema energéticamente aislado

$$P_r = 2\omega (\overline{W}^e - \overline{W}^m) \quad (\Pi = 0 \text{ en } S), \tag{30.19}$$

es decir, que la potencia reactiva es igual a la diferencia entre los valores medios de la energía eléctrica y magnética, multiplicada por 2ω. Dicha magnitud es nula, si estos valores son iguales.

Cuando la condición (30.15) no se cumple, la interpretación energética de la igualdad (30.11b) es dificultosa, ya que las expresiones (30.1), (30.1a) [1] pierden su sentido.

---

[1] El problema de expresar la energía del campo electromagnético con premisas más generales, está examinado, por ejemplo, en [C. 2, E. 2].

§ 31. Sobre la unicidad de soluciones de los problemas de electrodinámica

1. Problema interior de electrodinámica. Un campo electromagnético libre, es, por lo general, uno de los *posibles* campos (a unas u otras condiciones); con todo, las ecuaciones de electrodinámica pueden tener múltiples soluciones que describen diferentes campos. Pero el campo forzado se provoca *con necesidad* por la acción de los manantiales de género determinado. Como en este caso, es físicamente real un solo campo, las ecuaciones de electrodinámica deben tener una solución *única*. La cuestión consiste en la información preliminar sobre el proceso electromagnético que es necesario tener para poder hallar en el caso concreto el campo forzado, o bien, en otras palabras, cómo enunciar condiciones auxiliares a las ecuaciones de electrodinámica para que éstas tengan una solucion única.

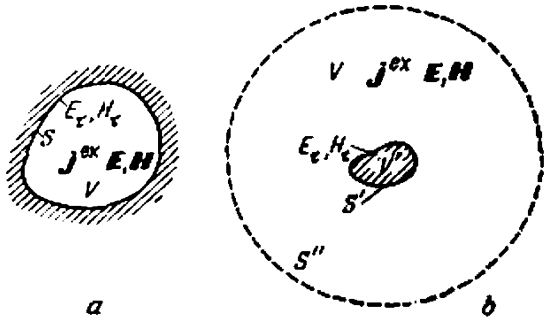


Fig. 31.1.

En el llamado *problema interior de electrodinámica* es necesario definir el campo electromagnético $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ ubicado en el interior de la región V, limitada por la superficie S (fig. 31.1, *a*). El campo forzado se engendra por un manantial situado en V ($\boldsymbol{j}^{ex} \neq 0$ en V), o bien (y puede ser posible simultáneamente) por un flujo de energía que llega del espacio exterior a través de la frontera S; entonces, en S $E_\tau \neq 0$ y $H_\tau \neq 0$. Aclaremos a qué condiciones el problema interior de electrodinámica tiene una solución única.

Supongamos (razonando a la inversa) que las ecuaciones de electrodinámica (29.11) tienen, al resolver el problema interior, dos soluciones: $\dot{\boldsymbol{E}}_{m1}$, $\dot{\boldsymbol{H}}_{m1}$ y $\dot{\boldsymbol{E}}_{m2}$, $\dot{\boldsymbol{H}}_{m2}$. Introduciéndolos a las (29.11), escribamos dos variaciones de estas ecuaciones y, seguidamente, después de efectuar sustracción, obtenemos nuevas ecuaciones respecto a las diferencias $\boldsymbol{e} = \dot{\boldsymbol{E}}_{m1} - \dot{\boldsymbol{E}}_{m2}$ y $\boldsymbol{h} = \dot{\boldsymbol{H}}_{m1} - \dot{\boldsymbol{H}}_{m2}$,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{h} &= i\omega\dot{\varepsilon}\boldsymbol{e}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{e} &= -i\omega\dot{\mu}\boldsymbol{h}. \end{aligned}\right\} \tag{31.1}$$

A continuación, operando como lo hicimos en el § 30 al deducir las correlaciones energéticas, tomemos estas ecuaciones como iniciales en lugar de la (29.11). Entonces, en vez de la (30.11a), obtenemos

$$\operatorname{Re} \oint_S [\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}^*] d\boldsymbol{s} = -\frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon'' \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^* + \mu'' \boldsymbol{h}\boldsymbol{h}^*)\, dv. \tag{31.2}$$

Puesto que, al fin y al cabo, necesitamos hallar tales condiciones con las cuales la solución respecto a $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h}$ desaparece y que, además, el segundo miembro de la (31.2) es nulo, es evidente que las condiciones buscadas deberán asegurar en el primer miembro la desaparición de la integral de superficie, para lo que es suficiente que se reduzca a cero la proyección del producto vectorial $[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}^*]$ en S. Esto sucederá si, al plantear el problema, se ha dado:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } E_\tau \text{ en } S, \\ \text{o bien b) } H_\tau \text{ en } S, \\ \text{o bien c) } E_\tau \text{ en } S_1 \text{ y } H_\tau \text{ en } S_2 \text{ si } S_1 + S_2 = S. \end{array}\right\} \quad (81.3)$$

Efectivamente, en los casos indicados la igualdad $[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}^*]_S = 0$ se cumple, ya que bien $\boldsymbol{e}_\tau$ o $\boldsymbol{h}_\tau$ se anula.

Considerando que se ha satisfecho uno de los requisitos de la (31.3), en virtud de la (31.2), obtenemos

$$\int_V (\varepsilon'' \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^* + \mu'' \boldsymbol{h}\boldsymbol{h}^*)\, dv = 0. \quad (31.4)$$

Exijamos, además, que en el interior de V el medio sea absorbente o regenerativo: sean $\varepsilon'' \neq 0$ o $\mu'' \neq 0$, o bien $\varepsilon'' > 0$ y $\mu'' > 0$ simultáneamente (o bien $\varepsilon'' < 0$ y $\mu'' < 0$). Si, por ejemplo, $\varepsilon'' \neq 0$ y $\mu'' = 0$ en virtud de las (31.4) y (31.2) se desprende de inmediato que $\boldsymbol{e} = 0$, mientras que del segundo renglón de (31.1), hallamos que $\boldsymbol{h} = 0$. A una análoga deducción llegamos al resolver las demás variaciones.

De ese modo, $\dot{\boldsymbol{E}}_{m1} = \dot{\boldsymbol{E}}_{m2}$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_{m1} = \dot{\boldsymbol{H}}_{m2}$, o sea, que la solución del problema considerado es la *única* al satisfacer las condiciones prefijadas.

Si efectuamos un análisis más detallado, resulta que la deducción verificada de las condiciones de unicidad de la solución sólo se refieren a los campos forzados. Si en V no hay manantiales ($\boldsymbol{j}^{ex} = 0$ en V) y no hay flujo de energía del exterior (por ejemplo, cuando $E_\tau = 0$ en S), las oscilaciones armónicas sólo pueden tener lugar sin absorción (regeneración), pero en tal caso, las condiciones de unicidad de la solución no se cumplen. En caso contrario, es decir, cuando hay absorción o regeneración, no habrá oscilaciones armónicas, ya que el campo debe atenuarse o crecer [1].

Como conclusión, vemos que el problema interior de electrodinámica tiene una solución única bien al tener un manantial en

---

[1] Más adelante (§ 69) veremos que un campo libre puede, en tal caso, considerarse como armónicamente oscilante con una frecuencia compleja $\dot{\omega} = \omega' + i\omega''$. Realizando los cálculos anteriores, en la (31.2) tendremos $\omega'\mu'' - \omega''\mu'$ y $\omega'\varepsilon'' - \omega''\varepsilon'$ en lugar de $\omega\mu''$ y $\omega\varepsilon''$; la deducción anterior resulta ser imposible a causa de la indeterminación de los signos de los sumandos de la expresión subintegral, pues los dos divergen del cero.

V ($j^{ex} \neq 0$), o bien (y también) si hay flujo de energía a través de la frontera de S (entonces, por lo menos en cierta parte de ella, $E_\tau \neq 0$ y $H_\tau \neq 0$ simultáneamente); al mismo tiempo, es también importante que el medio sea absorbente o regenerativo, aunque sea en grado arbitrariamente débil.

2. **Problema exterior de electrodinámica.** Seguidamente, consideremos el *problema exterior de electrodinámica*, cuando hay que hallar el campo electromagnético fuera de la región V' limitada por la superficie S', en un espacio infinito (fig. 31.1, *b*). Los manantiales se representan mediante la corriente prefijada fuera de V' ($j^{ex} \neq 0$) y (o bien) hay flujo de energía a través de S'.

Investigando el problema exterior, emplearemos la correlación energética (31.2) obtenida anteriormente. Aquí, la región V será un espacio infinito fuera de V' y su frontera S, el conjunto de la superficie S' y la superficie esférica S'' de radio infinitamente creciente, cuyo centro está ubicado en el interior de V' (que en la fig. 31.1, *b* se muestra por línea de trazos).

En la frontera más cercana S', plantearemos el cumplimiento de las condiciones anteriores, es decir, las de (31.3). En lo que se refiere a la frontera más lejana S'', acordaremos tomar en consideración sólo aquellos campos que, al haber absorción, decrecen con mayor rapidez que $1/r$. Entonces, tendrá lugar la siguiente igualdad

$$\oint_S [\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}^*]\, d\boldsymbol{s} = \int_{S'} [\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}^*]\, d\boldsymbol{s} + \int_{S''} [\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}^*]\, d\boldsymbol{s} = 0.$$

En efecto, la primera integral desaparece de la misma forma que al resolver el problema interior, y la segunda, puesto que $[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}^*]$ decrece con mayor rapidez que $1/r^2$, mientras que S'' crece sólo como r^2 al trasladar esta frontera al infinito.

Como vemos, a las condiciones planteadas tiene lugar de nuevo la igualdad (31.4). Lo mismo que en el punto 1, los siguientes razonamientos nos llevan a la deducción de que $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{h}$ son iguales a cero, es decir, sobre la unicidad de la solución del problema exterior de electrodinámica. Sin embargo, ésta es una unicidad "para campos de la clase que decrece con suficiente rapidez". Negar que hay soluciones complementarias fuera de dicha clase, no tenemos derecho. Con la restricción hecha, las condiciones de unicidad resultan, en esencia, ser las mismas que en el caso del problema interior, pero los medios regenerativos, en los que son imposibles los campos decrecientes con suficiente rapidez, se excluyen por sí mismos. Además, el problema sobre un medio infinitamente regenerativo no tendría contenido físico.

II. Ondas planas homogéneas

El lector tiene una representación sobre las ondas, adquirida en el curso de física general. Por dicha razón, sólo recordaremos brevemente ciertos hechos.

Según los criterios contemporáneos, el carácter ondulatorio del campo electromagnético es la manifestación de una ley muy general que consiste en que no hay una transmisión instantánea de interacciones. La variación del campo en el punto A según la ley $f(t)$, en el caso sencillo, se observará en el punto B, situado a una distancia z, en forma de $f\left(t-\frac{z}{v}\right)$, siendo v la velocidad de propagación; aquí vemos un retardo igual a un intervalo de tiempo $\tau = z/v$ que no tendría lugar para $v \to \infty$. Si la variación respecto al tiempo transcurre según la ley de las oscilaciones armónicas, o sea, $f(t) = A\cos\omega t$, el proceso se describirá plenamente por la función $f\left(t-\frac{z}{v}\right) = A\cos\omega\left(t-\frac{z}{v}\right) = A\cos(\omega t - kz)$, donde $k = \omega/v$ se denomina *número de onda* (constante de longitud). Suponiendo que se trata de una descripción justa para todo el espacio, este proceso llamaremos *onda plana homogénea armónica:* las superficies de fase constante, son los planos $z = \text{const}$ y en cada uno de dichos planos, llamados *frente* de onda, la amplitud es constante. En cierto momento de tiempo (cuando $t = \text{const}$) tendremos una distribución cosenoidal del campo a lo largo del eje z. Dicha cosinusoide es como la representación de una "foto instantánea" del proceso (véase más adelante la fig. 32.1); su período $\lambda = 2\pi/k$ se denomina *longitud de onda*. Con el transcurso del tiempo, la distribución cosenoidal se desplaza al sentido de z con una velocidad v llamada *velocidad de fase*, siendo $v = \omega/k$.

Debemos ahora marcar que el momento culminante de la presente parte del libro, es el estudio de la solución más sencilla de las ecuaciones de electrodinámica que tiene el carácter de una onda plana homogénea. Un campo libre de tal clase puede ser sólo imaginado en un espacio infinito homogéneo y por lo tanto, en cierto grado, es una idealización. Sin embargo, el concepto de onda plana homogénea electromagnética (hertziana), es uno de los de gran utilidad y de aplicación muy amplia.

§ 32. Proceso electromagnético unidimensional. Ondas en medios no absorbentes

1. Proceso electromagnético unidimensional. Vamos a considerar un campo libre que oscila armónicamente y que varía en el espacio sólo a lo largo de una dirección rectilínea; sea ésta el eje z del sistema cartesiano de coordenadas elegido. Podemos tomar las ecuaciones de Maxwell (29.11) o bien una de las ecuaciones vectoriales de Helmholtz (29.20)–(29.21), omitiendo las derivadas por las coordenadas x e y de acuerdo con la condición tomada anteriormente. A base de la ecuación (29.21), escribimos:

$$\frac{d^2\dot{E}_m}{dz^2} + \omega^2 \varepsilon\mu \dot{E}_m = 0. \qquad (32.1)$$

Supongamos que en el vector de la intensidad del campo eléctrico no varia su dirección en el espacio, es decir, que en la expresión de la amplitud compleja $\dot{E}_m = e_0 \dot{E}_m$, el vector unitario e_0, que indica dicha dirección, es constante. Entonces, la (32.1) no difiere, en esencia, de la ya conocida ecuación escalar y podemos, de inmediato, escribir su solución en la forma

$$\dot{E}_m = e_0 (\dot{A} e^{-i\omega \sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}} z} + \dot{B} e^{i\omega \sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}} z}), \qquad (32.2)$$

siendo $\dot{A} = Ae^{i\varphi}$ y $\dot{B} = Be^{i\psi}$ constantes complejas arbitrarias. Así, hemos hallado la expresión de la amplitud compleja $\dot{E}_m$ de la intensidad del campo eléctrico E para el proceso unidimensional a examinar.

2. Ondas planas homogéneas armónicas al no haber absorción. A continuación, por el momento, nos limitaremos a considerar el caso cuando el medio no es absorbente, es decir, supongamos que $\dot{\varepsilon} = \varepsilon$ y $\dot{\mu} = \mu$. Designando por

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu}, \qquad (32.3)$$

damos a la igualdad (32.2) el aspecto

$$\dot{E}_m = e_0 (\dot{A} e^{-ikz} + \dot{B} e^{ikz}). \qquad (32.4)$$

Tomando $Re\dot{E}_m e^{i\omega t}$, de aquí hallamos la expresión para la intensidad del campo eléctrico

$$E = e_0 [A \cos(\omega t - kz + \varphi) + B \cos(\omega t + kz + \psi)]. \qquad (32.5)$$

Esta fórmula describe ni más ni menos que la superposición de dos *ondas planas homogéneas armónicas* con amplitudes A y B que se desplazan en direcciones contrarias z y $-z$ y k es el *número de onda* relacionado con la *velocidad de fase* v y la *longitud de onda* λ por medio de las correlaciones

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (32.6)$$

Comparando las igualdades (32.3) y (32.6), se desprende la fórmula de velocidad de fase de una onda electromagnética:

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}. \qquad (32.7)$$

En particular, en el vacío (§ 1, punto 1)

$$v = v_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ [m/seg]}. \qquad (32.8)$$

En un medio con permeabilidades relativas $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ y $\mu_r = \mu/\mu_0$, la velocidad de fase resulta ser $\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ veces menor.

Señalemos que históricamente v_0 era conocida como la *velocidad de la luz* en un medio aéreo o en el espacio cósmico (por lo general, se designa por c) y la obtención, gracias a la teoría de Maxwell, de un valor numérico aproximado de v_0, ha sido un argumento en favor de la naturaleza electromagnética de la luz.

3. Estructura del campo de ondas. La solución (32.4) obtenida de la ecuación (32.1) de Helmholtz todavía no nos permite describir la estructura del campo electromagnético: aún no conocemos ni la orientación del vector $\boldsymbol{E}$, ni el carácter del campo magnético.

Apliquemos ahora las ecuaciones de Maxwell (29.11). Colocando en ellas $j_m^{ex} = 0$ (campo libre), proyectemos los vectores en los ejes de un sistema cartesiano de coordenadas y, en virtud de la condición inicial (punto 1), despreciamos las derivadas por x e y. Esto nos da

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = -i\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{mx}, \quad && \frac{d\dot{E}_{my}}{dz} = i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{mx}, \\ &\frac{d\dot{H}_{mx}}{dz} = i\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{my}, && \frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{my}, \\ &\dot{H}_{mz} = 0, && \dot{E}_{mz} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{32.9}$$

De este modo, vemos que para un proceso unidimensional el campo no tiene componentes longitudinales E_z y H_z. Y como en el espacio el sentido del vector $\boldsymbol{E}$ queda invariable, la orientación de los ejes transversales x e y puede ser escogida de tal manera que éste vaya dirigido por el eje x; para esto es suficiente poner en (32.2) $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{x}_0$. Entonces, $\dot{E}_{my} = 0$, $\dot{E}_{mx} = \dot{E}_m$. Por esta misma razón $d\dot{E}_{my}/dz = 0$ y, luego, de la (32.9) se desprende: $\dot{H}_{mx} = 0$, $\dot{H}_{my} = \dot{H}_m$, es decir, $\dot{\boldsymbol{H}}_m = \boldsymbol{y}_0\dot{H}_m$. De ese modo, los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ son mutuamente perpendiculares y perpendiculares al sentido de propagación de la onda: estos vectores se encuentran en el plano del frente de onda. Las ecuaciones (32.9) toman el aspecto

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = -i\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{mx}, \quad && \frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{my}, \\ &\dot{E}_{my} = \dot{E}_{mz} = \dot{H}_{mx} = \dot{H}_{mz} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{32.10}$$

Estudiemos con más detalle una onda que se propaga en la dirección z. En virtud de la (32.4), donde ahora debemos poner $B = 0$ y para la orientación elegida ($\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{x}_0$)

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{x}_0\dot{A}e^{-ikz}. \tag{32.11}$$

Introduciendo en la segunda de las ecuaciones (32.10), siendo $\dot{\varepsilon} = \varepsilon$ y $\dot{\mu} = \mu$, la magnitud $\dot{E}_{mx} = \dot{A}e^{-ikz}$, obtenemos

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{\dot{E}_{mx}}{\dot{H}_{my}} = \frac{k}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = W. \tag{32.12}$$

Esta magnitud se denomina *impedancia de onda* (impedancia característica). Dicha impedancia es real y, por lo tanto, los campos eléctrico y magnético oscilan por fase. Para el vacío

$$W = W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\ [\Omega]. \tag{32.13}$$

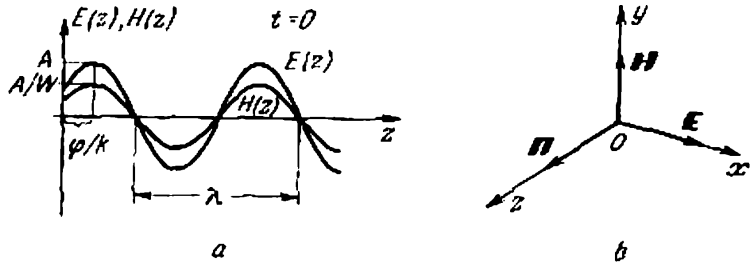
Ahora, ya tenemos todos los datos para escribir la solución de las ecuaciones (29.11) que expresa una onda plana homogénea en un medio no absorbente:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{x}_0 \dot{A} e^{-ikz}, \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m = \boldsymbol{y}_0 \frac{\dot{A}}{W} e^{-ikz}, \tag{32.14}$$

y determinar los vectores del campo:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 A \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{y}_0 \frac{A}{W} \cos(\omega t - kz + \varphi). \tag{32.15}$$

La amplitud A y la fase inicial φ quedan indeterminadas, ya que se trata de un campo libre (que no se excita mediante ciertos manantiales que acondicionarían su intensidad y exigirían sincronidad). En la fig. 32.1, *a* se expone la "foto instantánea" de la



a *b*

Fig. 32.1.

distribución $E(z)$ y $H(z)$; tal campo se desplaza a lo largo del eje z con una velocidad v (32.7). La orientación mutua de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, así como el sentido de propagación se muestran en la fig. 32.1, *b*. Evidentemente,

$$\boldsymbol{E} = W[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{z}_0], \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{W}[\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{E}] \tag{32.16}$$

y por el eje z está dirigido el vector de Poynting $\boldsymbol{\Pi} = [\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}]$.

4. Características energéticas locales. Determinemos la densidad instantánea y media de flujo de energía para una onda en un medio no absorbente:

$$\boldsymbol{\Pi} = [\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}] = \boldsymbol{z}_0 \frac{A^2}{W} \cos^2(\omega t - kz + \varphi) \tag{32.17}$$

y (§ 30, punto 1)

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m, \dot{\boldsymbol{H}}_m^*] = \boldsymbol{z}_0 \frac{A^2}{2W} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Pi}_{\text{máx}}. \tag{32.18}$$

Debido a que $\cos^2(\omega t - kz + \varphi) = \frac{1}{2}[1 + \cos 2(\omega t - kz + \varphi)]$, el valor instantáneo de $\boldsymbol{\Pi}$ oscila cerca del valor medio con frecuencia doble.

Calculemos, también, el valor instantáneo de la densidad de energía eléctrica y magnética de la onda que se propaga:

$$w^e = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\varepsilon A^2}{2}\cos^2(\omega t - kz + \varphi)$$

y

$$w^m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\mu A^2}{2W^2}\cos(\omega t - kz + \varphi) = \frac{\varepsilon A^2}{2}\cos^2(\omega t - kz + \varphi).$$

Estas magnitudes son, como se ve, iguales:

$$w^e = w^m = \frac{w}{2} = \frac{\varepsilon A^2}{2}\cos^2(\omega t - kz + \varphi), \qquad (32.19)$$

La densidad de la energía se somete a una misma ley de espacio y tiempo que la densidad de su flujo; es evidente que

$$\bar{w} = \frac{\varepsilon A^2}{2} = \frac{1}{2} w_{\text{máx}}. \qquad (32.20)$$

Según la fórmula (11.11) podemos hallar la velocidad de movimiento de la onda y ésta será igual a

$$v_{\text{en}} = \frac{\Pi}{\bar{w}} = z_0 \frac{1}{eW} = z_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (32.21)$$

La magnitud v_{en} es constante y coincide con la velocidad de fase v que definimos con anterioridad (32.7):

$$v_{\text{en}} = v. \qquad (32.22)$$

Puesto que según las representaciones habituales, la velocidad v_{en} es muy grande, es posible preguntar qué significa el desprecio del tiempo de propagación de la energía electromagnética. Suponiendo que en el proceso unidimensional examinado $v_{\text{en}} \to \infty$, en la (32.3) tenemos $k = 0$ y, correspondientemente a esto, la eliminación del segundo término en las ecuaciones de Helmholtz (29.20) y (29.21) que se transforman en las de Laplace. De este modo, el problema electrodinámico se simplifica convirtiéndose en estacionario.

§ 33. Ondas en medios absorbentes

1. **Número de onda complejo.** Ahora, con objeto de considerar un proceso unidimensional electromagnético en un medio absorbente, retornemos a la solución (32.2) de la ecuación (32.1).

Designando por

$$\dot{k} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}, \qquad (33.1)$$

llamemos este parámetro *número de onda complejo*. Se puede introducir en la (33.1) las expresiones de las permeabilidades complejas $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon''$ y $\dot{\mu} = \mu' - i\mu''$ y dividiendo las partes real e imagi-

naria, obtener la fórmula

$$\dot{k} = k' - ik'', \tag{33.2}$$

donde k' y k'' son funciones reales de ε', ε'', μ' y μ''.

Para los medios absorbentes ε'' y μ'' no son negativas ($\varepsilon'' \geqslant 0$, $\mu'' \geqslant 0$), siendo, por lo menos, una de ellas diferente a cero. Los términos reales de las permeabilidades complejas, salvo casos particulares, son positivas ($\varepsilon' > 0$, $\mu' > 0$). Como de las (29.6) y (29.10) se desprende, que, en tal caso, los ángulos de pérdidas Δ y β se encuentran en los límites de $0 \div 90°$ y que, simultáneamente,

$$k' - ik'' = \pm \omega \sqrt{|\dot{\varepsilon}||\dot{\mu}|}\, e^{-i\frac{\Delta+\beta}{2}} =$$

$$= \pm \omega \sqrt{|\dot{\varepsilon}||\dot{\mu}|}\left(\cos\frac{\Delta+\beta}{2} - i\ \operatorname{sen}\frac{\Delta+\beta}{2}\right),$$

debido a que las funciones trigonométricas son positivas, se cumple la condición

$$\left.\begin{array}{ll} k' > 0, & k'' > 0, \\ \text{o bien} & \\ k' < 0, & k'' < 0. \end{array}\right\} \tag{33.3}$$

Por medio de los símbolos introducidos (33.1), (33.2), a la solución (32.2) le damos la forma

$$\dot{E}_m = e_0 (\dot{A} e^{-k''z} e^{-ik'z} + \dot{B} e^{k''z} e^{ik'z}). \tag{33.4}$$

El carácter de $\dot{E}_m$ no varía en dependencia de cuál de los renglones de (33.3) empleamos: los sumandos sólo cambiarán su papel; a continuación, tomaremos los valores positivos de k' y k''.

2. Ondas planas homogéneas armónicas al haber absorción. Pasando de la amplitud compleja $\dot{E}_m$ a la intensidad del campo eléctrico $E = \operatorname{Re} \dot{E}_m e^{i\omega t}$, obtenemos

$$E = e_0 [A e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi) + B e^{k''z} \cos(\omega t + k'z + \psi)]. \tag{33.5}$$

El primer sumando (una solución particular para $B = 0$) debe interpretarse como una onda *amortiguada* que se propaga a lo largo del eje z. El segundo (para $A = 0$ una solución particular), define una onda amortiguada que se propaga en sentido inverso. Al desaparecer la absorción ($\varepsilon'' \to 0$, $\mu'' \to 0$), la solución (33.5) hallada se transforma en la (32.5), ya que en este caso $k' \to k$ y $k'' \to 0$. Señalemos que por todo el eje z, la solución (33.5) para $A \neq 0$ y $B \neq 0$ no se estudia a causa del crecimiento infinito de uno de los sumandos con $|z|$.

El resultado obtenido nos muestra qué sentido tienen las partes real e imaginaria del número de onda complejo $\dot{k}$ (33.1). En esencia, la magnitud k' juega el mismo papel que el número de onda real k, en el caso de la onda en un medio no absorbente. De forma

semejante a (32.6), escribimos:

$$k' = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{33.6}$$

siendo v y λ, respectivamente, la velocidad de fase y la longitud de onda. Naturalmente que la longitud de onda λ sigue siendo la distancia a la que (en un momento determinado de tiempo) se produce la variación de fase a 360°, pero no es el "periodo tridimensional" del campo. En diferencia de lo anteriormente expuesto, la velocidad de fase es igual a

$$v = 1/\mathrm{Re}\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}. \tag{33.7}$$

La magnitud k'' es el *coeficiente de atenuación*. La razón

$$E_m(z)/E_m(z+l) = e^{k''l} \tag{33.8}$$

nos muestra en cuántas veces la amplitud de la onda ha disminuido a una distancia l. Se entiende por *atenuación* L la magnitud que se define como el logaritmo natural o bien como veinte logaritmos decimales de dicha razón; en el primer caso se mide en *néper* [Np] y en el segundo, en *decibelios* [dB]:

$$L = k''l \text{ Np}, \quad L = 20 \lg e^{k''l} = k'' \ 20 \lg e \text{ dB}. \tag{33.9}$$

La cantidad $20 \lg e \approx 8{,}69$ determina la relación entre las dos unidades de medida.

Consideremos más detalladamente un campo electromagnético en forma de una onda plana homogénea amortiguada. Orientando el eje x de un sistema cartesiano de coordenadas así que a lo largo de él esté dirigido el vector $\boldsymbol{E}$, podemos directamente partir de la ecuación (32.10). Para una onda que se propaga a lo largo del eje z, de la (32.2) o bien la (32.4) y si $B = 0$, tenemos

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{x}_0 \dot{A} e^{-ikz} \tag{33.10}$$

y de las ecuaciones (32.10), obtenemos

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{x}_0 \dot{A} e^{-ikz}, \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m = \boldsymbol{y}_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}} e^{-ikz}, \tag{33.11}$$

siendo $\dot{W}$ la *impedancia de onda compleja*. Del mismo modo que en el § 32, la impedancia de onda compleja es la relación de las amplitudes complejas $\dot{E}_m = \dot{E}_{mx}$ y $\dot{H}_m = \dot{H}_{my}$ y será igual a

$$\dot{W} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}}{\dot{\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{|\dot{\mu}|}{|\dot{\varepsilon}|}} e^{i\varphi_W}, \tag{33.12}$$

con todo, $\varphi_W = (\beta - \Delta)/2$, lo que se halla aplicando las expresiones (29.6) y (29.10).

De la (33.11) hallamos las expresiones de los vectores del campo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{x}_0 A e^{-k'z}\cos(\omega t - k'z + \varphi), \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{y}_0 \frac{A}{|\dot{W}|} e^{-k'z}\cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_{\dot{W}}). \end{aligned}\right\} \qquad (33.13)$$

En diferencia de una onda no amortiguada, aquí los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, como vemos, están desfasados a un ángulo $\varphi_{\dot{W}}$. La "foto instantánea" de la distribución $E(z)$ y $H(z)$, se muestra en la fig. 33.1.

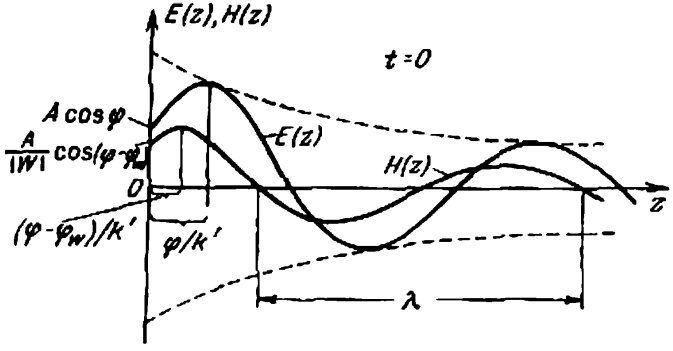


Fig. 33.1.

Finalmente, calculemos el vector medio de Poynting para la onda amortiguada a considerar:

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}[\dot{E}_m,\ \dot{H}_m^*] = \boldsymbol{z}_0 \frac{A^2}{2|\dot{W}|} e^{-2k'z}\cos\varphi_{\dot{W}}. \qquad (33.14)$$

En lo que se refiere a la energía del campo electromagnético, a base de lo anteriormente estudiado (§§ 11 y 30), no podíamos, en el caso general, hallar w y $\bar{w}$, ya que las expresiones correspondientes fueron obtenidas para un medio carente de inercia. Sin embargo, esto puede hacerse, cuando $\alpha = 0$, $\beta = 0$ (véase más adelante el § 35).

3. Ondas en dieléctricos y conductores. Estudiemos por separado el caso muy difundido, cuando el medio está libre de pérdidas magnéticas ($\beta = 0$, $\dot{\mu} = \mu$). Elevando al cuadrado el número de onda complejo $\dot{k}$ y después de dividir las partes real e imaginaria, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} (k')^2 - (k'')^2 &= \omega^2 \varepsilon'\mu, \\ 2k'k'' &= \omega^2 \varepsilon'\mu \operatorname{tg}\Delta. \end{aligned}\right\}$$

De aquí

$$\left.\begin{aligned} k' &= \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}\ \sqrt{\frac{1}{2}\left|1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\Delta}\right|}, \\ k'' &= \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}\ \sqrt{\frac{1}{2}\left|-1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\Delta}\right|}. \end{aligned}\right\} \qquad (33.15)$$

En particular, si $\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\Delta = \sigma/\omega\varepsilon$ y $\omega\sqrt{\varepsilon'\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = k$ (número de onda para un medio no absorbente). Seguidamente, vamos a considerar que esta condición se ha cumplido. Recordemos que se llama dieléctrico un medio que satisfaga la condición $\operatorname{tg}\Delta \ll 1$ y conductor, a la condición $\operatorname{tg}\Delta \gg 1$ (§ 29, punto 2). Aclaremos las particularidades de propagación de las ondas en estos dos casos.

Para $\operatorname{tg}\Delta \ll 1$, lo más cómodo es desarrollar el número de onda complejo $\dot{k}$ en una serie binomial:

$$\dot{k} = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu\,(1 - i\operatorname{tg}\Delta)} = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}\left(1 - i\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2\Delta}{8} + i\frac{\operatorname{tg}^3\Delta}{16} + \ldots\right), \tag{33.16}$$

es decir, con alto grado de precisión

$$k' \approx k \text{ y } k'' \approx k\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{33.16a}$$

Pero si $\operatorname{tg}\Delta \gg 1$, entonces

$$\dot{k} = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu\,(1 - i\operatorname{tg}\Delta)} \approx \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}\sqrt{-i\operatorname{tg}\Delta} = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2}}(1 - i), \tag{33.17}$$

o sea,

$$k' \approx k'' \approx k\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}. \tag{33.17a}$$

Escribamos también:

$$\dot{W} \approx W \text{ si } \operatorname{tg}\Delta \ll 1 \tag{33.18}$$

y

$$\dot{W} \approx \sqrt{\frac{\mu}{-i\sigma/\omega}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1 + i), \text{ siendo } \operatorname{tg}\Delta \gg 1. \tag{33.19}$$

Las fórmulas (33.16) y (33.16a) muestran que la parte real del número de onda complejo de una onda que se propaga en un dieléctrico no perfecto se diferencia insignificantemente del número de onda de la onda no amortiguada en un dieléctrico perfecto. Lo mismo puede decirse respecto a la velocidad de fase y longitud de onda que se determinan por medio de las correlaciones (33.6). Prácticamente, estas magnitudes no dependen de la frecuencia, tanto como el coeficiente de atenuación k'', proporcional a la tangente del ángulo de pérdidas; la atenuación es muy débil debido a la pequeñez de dicho coeficiente.

Como podemos ver de las fórmulas (33.17) y (33.17a), en los conductores y particularmente en los metales, la atenuación de las ondas es extremadamente grande debido a la elevada magnitud de la conductibilidad específica σ (en la tabla 6.1 vemos que para los metales σ es en varios órdenes mayor que para los dieléctricos típicos). Y como, al crecer el coeficiente k'', crece simultáneamente la parte real k' del número de onda $\dot{k}$, la longitud de onda λ,

determinada a base de la (33.6), se hace muy corta. Para un conductor, como vemos en la (33.17a), k' y k'' dependen linealmente de la frecuencia; en virtud de la (33.6), también depende considerablemente de la frecuencia la velocidad de fase de la onda.

Al pasar a un conductor ideal ($\sigma \longrightarrow \infty$), el coeficiente de atenuación crece infinitamente. Como en el caso límite la absorción total debe transcurrir en cualquier trayecto finito, llegamos a la conclusión de que el campo electromagnético no puede existir en un medio de tal tipo.

§ 34. Orientación, polarización y adición de ondas

1. Ondas arbitrariamente orientadas. Hasta el momento, habíamos considerado ondas planas homogéneas electromagnéticas empleando un sistema cartesiano de coordenadas especialmente elegido, uno de cuyos ejes (z) era paralelo a la dirección de propagación de la onda y los otros dos (x e y), paralelos a los vectores del campo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$. Como la descripción del campo resulta, en este caso, ser la más sencilla, llamaremos tal sistema "natural" para la onda.

Sin embargo, en una serie de casos el sistema de coordenadas (x, y, z) está prefijado de antemano y la dirección de propagación de la onda no coincide con ninguno de los ejes de coordenadas. En tal caso, se introduce previamente el sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) natural para dicha onda, en el que es justa la definición del campo mediante las fórmulas (33.11)

$$\dot{E}_m = \xi_0 \dot{A} e^{-ik\zeta}, \quad \dot{H}_m = \eta_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}} e^{-ik\zeta}. \tag{34.1}$$

Luego, conociendo la orientación de la onda en el sistema principal (x, y, z) y, por consiguiente, la orientación del sistema natural (ξ, η, ζ) respecto al principal, conviene aplicar la fórmula de transformación de los versores (S4.1a) y la transformación de las coordenadas (S4.2a). De esta manera, las ecuaciones (34.1) toman la forma

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = (\boldsymbol{x}_0 \cos\alpha_1 + \boldsymbol{y}_0 \cos\alpha_2 + \boldsymbol{z}_0 \cos\alpha_3)\, \dot{A} e^{-ik(x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3)},$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m = (\boldsymbol{x}_0 \cos\beta_1 + \boldsymbol{y}_0 \cos\beta_2 + \boldsymbol{z}_0 \cos\beta_3) \frac{\dot{A}}{\dot{W}} e^{-ik(x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3)}. \tag{34.2}$$

Es evidente que aquí (α_1, α_2, α_3) y (β_1, β_2, β_3) son, respectivamente, los ángulos que indican la dirección de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, mientras que (γ_1, γ_2, γ_3), son los ángulos de orientación de la dirección de propagación de la onda (fig. 34.1, *a*).

Examinemos con más detalle el factor

$$e^{-ik\zeta} = e^{-ik(x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3)},$$

cuyo exponente determina la fase del campo dependiente de las coordenadas. Suponiendo que es constante:

$$x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3 = \text{const}, \qquad (34.3)$$

obtenemos, ni más ni menos, que la ecuación del plano de frente de onda en el sistema principal de coordenadas. Introduzcamos el

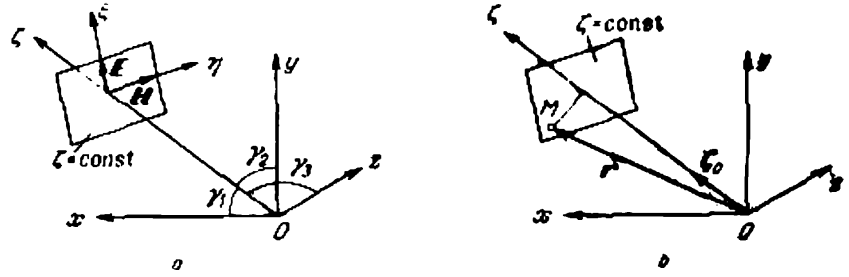


Fig. 34.1.

llamado *vector de onda*

$$\dot{\boldsymbol{k}} = \dot{k}\zeta_0 = \dot{k}\,(\boldsymbol{x}_0\cos\gamma_1 + \boldsymbol{y}_0\cos\gamma_2 + \boldsymbol{z}_0\cos\gamma_3). \qquad (34.4)$$

Ahora, el exponente en la (34.2) se puede escribir en forma reducida, empleando el producto escalar del vector de onda por el radio vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_0 x + \boldsymbol{y}_0 y + \boldsymbol{z}_0 z$ (fig. 34.1, *b*). Efectivamente,

$$\dot{k}\,(x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3) = \dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{r}$$

y, por consiguiente,

$$e^{-i\dot{k}\zeta} = e^{-i\dot{k}\,(x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3)} = e^{-i\dot{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{r}}. \qquad (34.5)$$

En la fig. (34.1, *b*) vemos que la proyección del radio vector $\boldsymbol{r}$ en la dirección de propagación de la onda ζ es igual a la distancia desde el origen de coordenadas 0 hasta el frente de onda en el que se encuentra el punto $M(\boldsymbol{r})$.

2. **Ondas de polarización lineal.** A continuación, pasaremos al problema de la orientación del campo de onda para la dirección dada de propagación, o bien, como suele decirse, sobre su *polarización*. En la onda que se describe por las ecuaciones (34.1), el vector $\dot{\boldsymbol{E}}$ está ubicado en el plano que pasa por el eje ξ y por la dirección de propagación ζ. Este hecho se expresa por las palabras "onda polarizada en el plano $\xi 0\zeta$". Tomemos dos ondas que se propagan en una misma dirección ζ, pero polarizadas en dos planos mutuamente perpendiculares $\xi 0\zeta$ y $\eta 0\zeta$; supongamos, también, que ellas divergen por sus amplitudes y fases iniciales. Las respectivas amplitudes complejas son iguales a

$$\dot{E}_{m1} = \xi_0\dot{A}e^{-i\dot{k}\zeta}, \quad \dot{E}_{m2} = \eta_0\dot{B}e^{-i\dot{k}\zeta},$$
$$\dot{H}_{m1} = \eta_0\frac{\dot{A}}{\dot{W}}e^{-i\dot{k}\zeta}, \quad \dot{H}_{m2} = -\xi_0\frac{\dot{B}}{\dot{W}}e^{-i\dot{k}\zeta} \qquad (34.6)$$

(véanse las figs. 34.2, *a*, *b*; los planos de polarización están rayados).

Al superponerlas (o sea, al existir simultáneamente), las dos ondas tendrán un campo con amplitudes complejas $\dot{E}_m = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2}$ y $\dot{H}_m = \dot{H}_{m1} + \dot{H}_{m2}$, de forma que

$$\dot{E}_m = (\xi_0 \dot{A} + \eta_0 \dot{B}) e^{-ik\zeta}. \tag{34.7}$$

En el caso particular, cuando coinciden las fases de ondas ($\dot{A} = Ae^{i\varphi}$, $\dot{B} = Be^{i\varphi}$), pasando de $\dot{E}_m$ a $\boldsymbol{E}$, tenemos

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= (\xi_0 A + \eta_0 B) e^{-k''\zeta} \cos(\omega t - k'\zeta + \varphi) = \\ &= \xi_0' C e^{-k''\zeta} \cos(\omega t - k'\zeta + \varphi), \\ C &= \sqrt{A^2 + B^2},\ \xi_0' = \xi_0 \cos\vartheta + \eta_0 \operatorname{sen}\vartheta,\ \operatorname{tg}\vartheta = \frac{B}{A}, \end{aligned}\right\} \tag{34.8}$$

es decir, la superposición de dos ondas polarizadas en planos mutuamente perpendiculares, nos da una onda polarizada en un plano

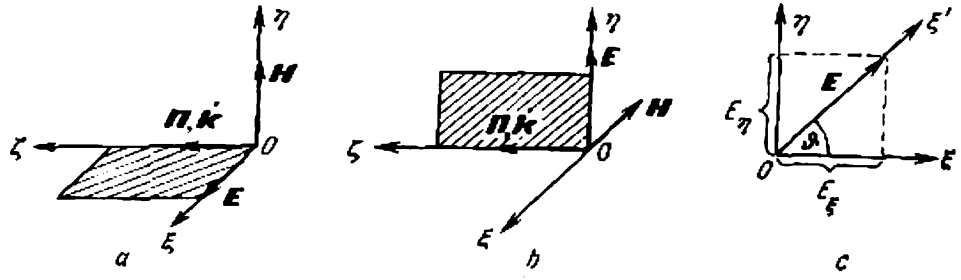


Fig. 34.2.

que con $\xi 0 \zeta$ forma un ángulo ϑ (fig. 34.2, *c*). Prefijando distintos A y B, podemos obtener ondas polarizadas en cualquier plano que pase por el eje ζ y que tengan todas amplitudes. Según la definición, éstas son ondas de polarización *plana* o *lineal*.

3. Ondas de polarización circular y elíptica. Pero la superposición de las dos ondas a considerar, puede llevarnos a un proceso ondulatorio que no pueda ser ya caracterizado como onda de polarización lineal. Dado, por ejemplo, $\dot{A} = Ae^{i\varphi}$ y $\dot{B} = Ae^{i(\varphi - 90°)}$, es decir, que las amplitudes de las ondas son iguales, y sus fases se diferencian en 90°. Al mismo tiempo, de la (34.7), en lugar de las (34.8), obtenemos:

$$\boldsymbol{E} = Ae^{-k''\zeta} [\xi_0 \cos(\omega t - k'\zeta + \varphi) + \eta_0 \operatorname{sen}(\omega t - k'\zeta + \varphi)]. \tag{34.9}$$

La correlación de las componentes E_ξ y E_η no restan, en este caso, constantes respecto al tiempo y el espacio. Efectivamente,

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{E_\eta}{E_\xi} = \operatorname{tg}(\omega t - k\zeta + \varphi),$$

es decir, el ángulo de inclinación del vector $\boldsymbol{E}$ respecto al eje ξ (fig. 34.2, *c*) es igual a

$$\vartheta = \omega t - k\zeta + \varphi. \tag{34.10}$$

Por esta razón, tomando cualquier plano $\zeta = \text{const}$, podremos advertir la rotación del vector $\boldsymbol{E}$ respecto al sentido de propagación ζ con una velocidad angular ω; si miramos en dirección a la onda (fig. 34.3, *a*) veremos una rotación en sentido inverso a las

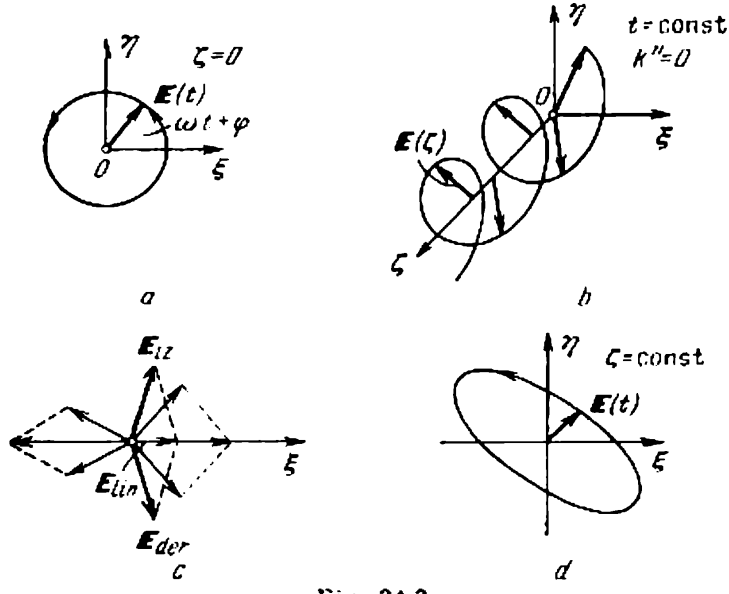


Fig. 34.3.

agujas de un reloj. Si se fija un momento de tiempo $t = \text{const}$, resulta que el vector $\boldsymbol{E}$ forma con el eje ξ un ángulo que varía monótonamente como $-k\zeta$; el ángulo está distribuido de tal modo que el extremo del vector $\boldsymbol{E}$, al parecer, se desliza por una línea helicoidal (fig. 34.3, *b*). Esta es una onda de polarización *circular* o, con mayor exactitud, de polarización *levógira*. La polarización *dextrógira* corresponde al caso, cuando $\dot{A} = Ae^{i\varphi}$ y $\dot{B} = Ae^{i(\varphi + \pi)}$, lo que significa que el vector $\boldsymbol{E}$ gira en dirección contraria.

Es fácil cerciorarse de que toda onda linealmente polarizada puede ser descompuesta en dos ondas de la polarización circular inversa. Por ejemplo, para la onda polarizada en el plano $\xi 0 \zeta$ tenemos la descomposición:

$$\dot{E}_m = \xi_0 \dot{A} e^{-ik\zeta} = \dot{A}(\xi_0 + i\eta_0) e^{-ik\zeta} + \dot{A}(\xi_0 - i\eta_0) e^{-ik\zeta} =$$
$$= \dot{A}\left(\xi_0 + e^{i\frac{\pi}{2}}\eta_0\right) e^{-ikz} + \dot{A}\left(\xi_0 + e^{-i\frac{\pi}{2}}\eta_0\right) e^{-ikz}. \tag{34.11}$$

Este fenómeno se aclara en la fig. 34.3, *c*: dos vectores que giran en sentidos inversos, crean un vector que oscila.

Y por fin, si en la (34.7) $\dot{A} = Ae^{i\varphi}$ y $\dot{B} = Be^{i\psi}$ son números complejos arbitrarios (es decir, las ondas superpuestas tienen cualesquiera amplitudes y fases), la polarización de la onda resultante será, hablando en general, *elíptica*. Esto quiere decir que para $z = \text{const}$, el vector $\dot{E}$, girando alrededor de la dirección de propagación de la onda, cambia su longitud al deslizarse su extremo por una elipse orientada de forma cualquiera en dicho plano (fig. 34.3, *d*).

4. Adición de ondas progresivas (móviles) al encuentro. En lugar de dos ondas polarizadas en dos planos y que se propagan en un mismo sentido, tomemos ahora dos ondas de idéntica polarización lineal, pero que se propagan en direcciones inversas. Dado, de ese modo, en lugar de la (34.6)

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{m1} &= \xi_0 \dot{A} e^{-ik\zeta}, \quad \dot{E}_{m2} = \xi_0 \dot{B} e^{ik\zeta}, \\ \dot{H}_{m1} &= \eta_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}} e^{-ik\zeta}, \quad \dot{H}_{m2} = -\eta_0 \frac{\dot{B}}{\dot{W}} e^{ik\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{34.12}$$

En las fórmulas escritas, a la variación de la dirección de propagación de la onda corresponde el cambio del signo ante k y η_0 (sería posible tomar con el signo cambiado no $\dot{H}_{m2}$ sino $\dot{E}_{m2}$, lo que es lo mismo a causa de la arbitrariedad de $\dot{B}$). Recordemos que los vectores E, H y Π de la onda que se propaga deben crear un sistema dextrógiro y el vector de Poynting está dirigido en el primer caso por ζ y en el segundo, por $-\zeta$; esto lo aclara la fig. 34.4, *a*, *b*.

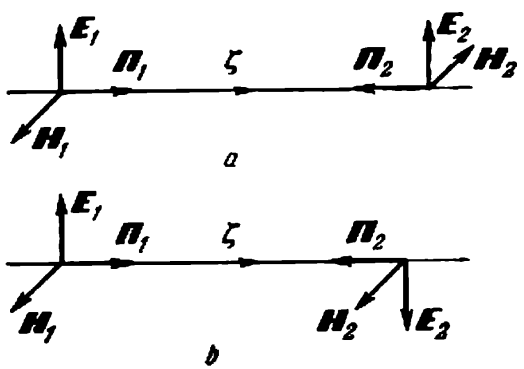


Fig. 34.4.

Si las ondas tienen iguales amplitudes, pero, posiblemente, diferentes fases, es decir, $\dot{A} = Ae^{i\varphi}$ y $\dot{B} = Ae^{i\psi}$, entonces, confeccionando las amplitudes complejas de los vectores E y H del campo resultante

$$\dot{E}_m = \xi_0 (\dot{A} e^{-ik\zeta} + \dot{B} e^{ik\zeta}) \quad \text{y} \quad \dot{H}_m = \eta_0 \frac{1}{\dot{W}} (\dot{A} e^{-ik\zeta} - \dot{B} e^{ik\zeta}),$$

hallamos

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= \xi_0 2A e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cos\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right), \\ \dot{H}_m &= \eta_0 \frac{-i2A}{\dot{W}} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \operatorname{sen}\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{34.13}$$

De aquí, para el caso cuando el medio no es absorbente ($k = k$, $\dot{W} = W$):

$$\left.\begin{aligned} E &= \xi_0 2A \cos\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi+\psi}{2}\right), \\ H &= \eta_0 \frac{2A}{W} \operatorname{sen}\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi+\psi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (34.14)$$

Investiguemos este campo. Aquí no vemos la dependencia espacial de fase, propia de las ondas móviles (compárese con la (32.15)). La fase de la intensidad E es igual a $\omega t + \frac{\varphi+\psi}{2}$ o bien, a $\omega t + \frac{\varphi+\psi}{2} - 180°$, lo que depende de si la magnitud $2A\cos\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right)$ es positiva o negativa y el valor absoluto de la cual $\left|2A\cos\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|$, es la amplitud de la función $E(t)$ que oscila armónicamente. Como vemos, la amplitud depende de ζ; la distribución de $E(\zeta)$ en cada momento fijado de tiempo es una cosinusoide, cuyos valores nulos (los "nodos" del campo) se disponen de modo equidistante. Esta distribución no se desplaza respecto a ζ, como sucede en el caso de onda móvil. En la curva $E(\zeta)$ sólo varía confásicamente la amplitud vertical (fig. 34.5). Tal campo se denomina *onda estacionaria*.

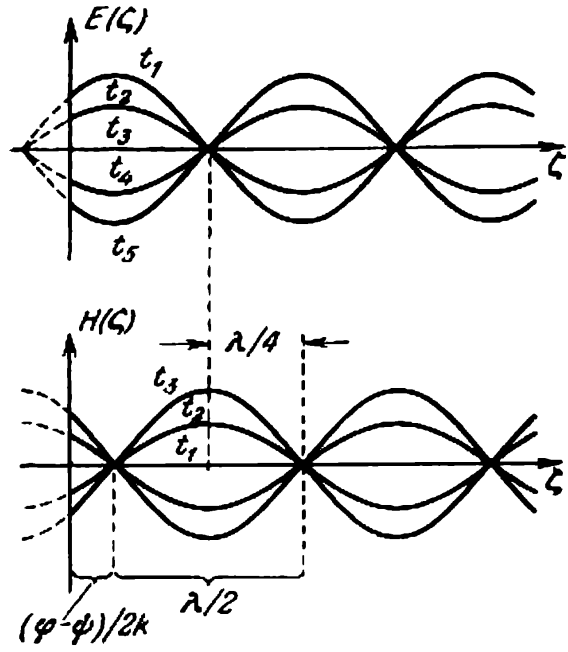


Fig. 34.5.

Como se desprende de la (34.14), las ondas estacionarias (fijas o inmóviles) de los campos eléctrico y magnético están desfasadas en $\lambda/4$ y respecto al tiempo, en $T/4$, es decir, en 90° por la fase (fig. 34.5). El campo electromagnético es puramente reactivo, o sea, que en término medio no transporta energía. Formalmente, llegamos a esta conclusión porque a causa del desfasaje en 90° entre $\dot{E}$ y $\dot{H}$, el vector complejo de Poynting $\dot{\Pi}$ (30.6) resulta ser una magnitud puramente imaginaria y, según la (30.7), $\overline{\Pi} = \operatorname{Re}\dot{\Pi} = 0$.

Considerando en un medio no absorbente la superposición de campos (34.12) con amplitudes y fases arbitrarias, podemos previamente descomponer las segundas de ellas en dos, representando el coeficiente $\dot{B}$ como la suma de $\dot{A}$ y $\dot{B} - \dot{A}$. Fácilmente nos conven-

ceremos de que, en fin de cuentas, se obtendrá una onda estacionaria con amplitud $2A$ y una onda móvil en dirección $-\zeta$, con amplitud $|\dot{B}-\dot{A}|$.

§ 35. Propagación de señales electromagnéticas

1. Dispersión. La onda plana homogénea electromagnética que hemos estudiado en el § 32, tiene en un medio no absorbente una velocidad de fase $v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ y, como hemos establecido, es la misma velocidad de la energía que ella transporta. De acuerdo con los conceptos físicos modernos, la magnitud $v_0=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\approx 2{,}998\cdot 10^8$ m/s, a la que es igual dicha velocidad en el vacío y que habitualmente se denomina velocidad de la luz en el vacío (c), es el límite superior de la velocidad de propagación de toda clase de interacciones físicas y, por consiguiente, de la transmisión de señales. A continuación, nos detendremos en ciertas particularidades de la propagación de señales electromagnéticas.

¿Podemos identificar una señal y una onda plana homogénea? A esta pregunta se puede responder con facilidad negativamente, ya que se trata de un proceso que no varía su carácter en el espacio y tiempo. Las fórmulas (32.15) describen un campo electromagnético que "siempre" tiene tal aspecto (cualquier t), mientras que la señal debe tener comienzo y final. Por lo demás, un proceso electromagnético real nunca se reduce, hablando rigurosamente, a las oscilaciones armónicas de una frecuencia, ya que el generador funciona un tiempo limitado. En realidad, siempre se trata de impulsos de una u otra forma y duración, caracterizados por el espectro de frecuencias. Las estaciones transmisoras de radio emiten, como ya sabemos, señales *moduladas*: la variación del campo respecto al tiempo sirve de medio para transmitir información.

Es decir, debemos fijar nuestra atención en los procesos electromagnéticos más complicados que las oscilaciones armónicas y ondas. Representando una dependencia arbitraria (no periódica) respecto al tiempo en forma de la integral de Fourier, podemos, en este sentido, hablar con pleno derecho sobre la superposición de un número infinito de oscilaciones armónicas que crean un espectro continuo. Por esto, para la forma prefijada (ley temporal) de la señal, el proceso electromagnético unidimensional (§ 32), puede ser expuesto como una superposición semejante de ondas planas homogéneas armónicas, "componentes de onda espectrales". Si ε y μ no son funciónes de la frecuencia, la velocidad de fase de cualquiera de las componentes espectrales definida según la fórmula (32.7), que es igual a la velocidad de movimiento de la energía, tiene un mismo valor; así, en el vacío, esta velocidad es igual a la velocidad de la luz. Puesto que todas las componentes de onda se propagan sin desviación relativa, al transmitir la señal, ésta

conserva su forma: la ley temporal para diferentes z sólo se distingue por el desplazamiento en el período de retardo.

La cuestión resulta ser mucho más complicada si es necesario tener en cuenta que la velocidad de fase de una onda armónica depende de su frecuencia. En estos casos se dice que hay *dispersión*, y el medio en el que ésta se manifiesta, se llama *dispersivo*. Cuando la señal se propaga en un medio de este tipo, sus componentes espectrales de onda que tienen diferentes velocidades de fase, parece que se "dispersan". La forma de la señal no se conserva ya que la suma de las componentes que reciben retardos de fase no iguales transcurre para diferentes z y correlaciones de fase variables, y nos da algo incomparable. Durante la transmisión, la señal se deforma. No obstante, para determinadas circunstancias (por ejemplo, cuando la dispersión es débil), dicha deformación puede ser insignificante.

2. Grupo (tren o paquete) de ondas y velocidad de grupo. Con objeto de efectuar ciertas apreciaciones cuantitativas, consideremos la propagación de una señal por un medio no absorbente dispersivo empleando la representación del campo en forma de la integral de Fourier. Expresemos la intensidad del campo eléctrico en el aspecto

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{Re} \int_0^\infty \dot{\boldsymbol{E}}(\omega)\, e^{i[\omega t - k(\omega) z]}\, d\omega, \tag{35.1}$$

donde la expresión subintegral describe la componente espectral de onda con una frecuencia ω. Esta fórmula puede ser obtenida del (S8.3) poniendo en ella la densidad espectral en forma de la amplitud compleja de la onda $\dot{\boldsymbol{u}}(\omega) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{E}}(\omega)\, e^{-ik(\omega) z}$:

$$\boldsymbol{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\boldsymbol{u}}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty \dot{\boldsymbol{u}}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \operatorname{Re} \int_0^\infty \dot{\boldsymbol{E}}(\omega)\, e^{i[\omega t - k(\omega) z]}\, d\omega,$$

ya que, en virtud de (S8.3), $\dot{\boldsymbol{u}}(-\omega) = \dot{\boldsymbol{u}}^*(\omega)$.

Si podemos suponer que el espectro se encuentra en una banda de frecuencias desde $\omega_0 - \Delta\omega$ hasta $\omega_0 + \Delta\omega$, entonces (35.1) toma el aspecto

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{Re} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{\boldsymbol{E}}(\omega)\, e^{i[\omega t - k(\omega) z]}\, d\omega. \tag{35.2}$$

Escribamos de nuevo esta integral de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{Re} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \dot{\boldsymbol{E}}(k)\, e^{i[\omega(k) t - kz]}\, dk, \tag{35.3}$$

donde la frecuencia ω se ha sustituido por una nueva variable k y el número de onda $k(\omega_0)$ se ha designado por k_0.

Seguidamente, tomaremos una banda de frecuencias estrecha: $\Delta\omega \ll \omega_0$ y también, $\Delta k \ll k_0$. Para esta condición, el proceso ondulatorio se denomina *grupo* o *tren de ondas*. Puesto que al integrar (35.3) $|k - k_0| \leqslant |\Delta k|$, tiene sentido desarrollar la frecuencia $\omega(k)$ en la serie de Taylor por las potencias de pequeña magnitud $k - k_0$

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}\Big|_0 (k - k_0) + \ldots \qquad (35.4)$$

y limitarse a la parte lineal escrita del desarrollo (35.4). En tal caso, la integral (35.3) toma el aspecto

$$E \approx \operatorname{Re} e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \dot{E}(k)\, e^{i\left[\frac{d\omega}{dk}\Big|_0 t - z\right](k - k_0)}\, dk. \qquad (35.5)$$

Como un sencillo ejemplo de grupo de ondas, puede servir una señal electromagnética con función espectral rectangular (fig. 35.1, *a*);

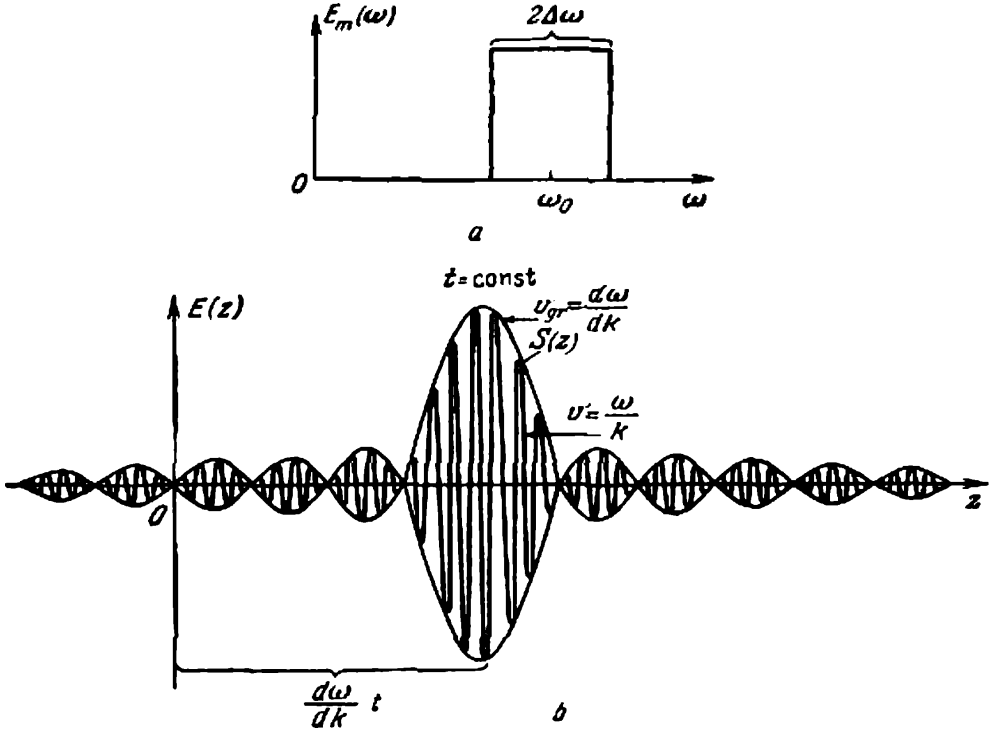


Fig. 35.1.

en este caso particular, la magnitud $\dot{E}(k) = \dot{E}(\omega)$ es la constante $\dot{E}(k_0) = E_m$. Después de sacarla del signo de la integral (35.5), tenemos

$$E \approx \operatorname{Re} \dot{E}(k_0)\, e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i\left[\frac{d\omega}{dk}\Big|_0 t - z\right](k - k_0)}\, d(k - k_0)$$

y como resultado de la integración, obtenemos

$$E \approx 2 \operatorname{Re} \dot{E}(k_0) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \frac{\operatorname{sen}\left[\left(\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 t - z\right)\Delta k\right]}{\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 t - z}.$$

Demos a esta expresión de la intensidad del campo eléctrico la siguiente forma definitiva:

$$E \approx 2E_m \frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{d\omega}{dk} t - z\right)\Delta k\right]}{\frac{d\omega}{dk} t - z} \cos(\omega t - kz) \quad (\omega = \omega_0). \quad (35.6)$$

Nos resta comentar el resultado obtenido. Como vemos, el campo del grupo de ondas tiene el carácter de una onda armónica *modulada* con *envolvente* que se define por medio de la función (fig. 35.1, *b*)

$$S(z, t) = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{d\omega}{dk} t - z\right)\Delta k\right]}{\frac{d\omega}{dk} t - z}. \quad (35.7)$$

La velocidad de fase $v = \omega/k$ que se determina por el número de onda k en el argumento del coseno en la fórmula (35.6), nos muestra con qué rapidez se desvía a lo largo del eje z la "cosinusoide portadora" en el interior de la envolvente. Es evidente que ésta no es la velocidad de propagación de la señal: esta última se caracteriza por la envolvente y hace falta investigar su movimiento.

El máximo de la envolvente (en virtud de la (35.7), $S_{máx} = \Delta k$) tendrá lugar cuando

$$\frac{d\omega}{dk} t - z = 0. \quad (35.8)$$

El se mueve realmente, ya que la condición (35.8) se satisface para diferentes coordenadas z y diversos momentos de tiempo t. La velocidad de movimiento de la envolvente se obtiene calculando mediante la (35.8) la derivada dz/dt. Esta es la llamada *velocidad de grupo* v_{gr} que, por consiguiente, es igual a

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (35.9)$$

En el caso dado, la velocidad de grupo es la velocidad de propagación de la señal.

3. Observaciones sobre la velocidad del grupo. En la mayoría de los casos, la noción de velocidad de grupo resulta ser útil hasta el momento, cuando la dispersión no proporciona una deformación considerable de la señal. Habitualmente, la velocidad de grupo tiene el sentido de la velocidad de movimiento de la energía.

¿Cuál es la correlación entre la velocidad de fase $v = \omega/k$ y la velocidad de grupo $v_{gr} = d\omega/dk$? Según la (35.9)

$$v_{gr} = \frac{d}{dk}(vk) = v + k\frac{dv}{dk}, \tag{35.10}$$

o bien

$$v_{gr} = v + k\frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}, \tag{35.10 a}$$

es decir, en dependencia del signo de la derivada dv/dk o bien $dv/d\lambda$, la velocidad de grupo puede ser tanto menor como mayor que la de fase. Las fórmulas (35.10) y (35.10 a) nos muestran, en particular, que sin dispersión, o sea, cuando la velocidad de fase v no depende de la frecuencia ω (y por consiguiente, de k y λ), ella es igual a la velocidad de grupo: $v = v_{gr}$ si $dv/d\omega = 0$. Para un medio absorbente, por analogía con la (35.9), determinamos la magnitud

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk'}. \tag{35.11}$$

En muchos casos la velocidad de grupo se identifica con la velocidad de movimiento de la energía. Los motivos de esta identificación serán examinados en la teoría de las guías de ondas en el § 63, punto 1. No obstante, como lo certifica un ejemplo dado a continuación, tal identificación debe ser admitida con ciertas precauciones.

Investiguemos el caso de un conductor ($\operatorname{tg}\Delta = \sigma/\omega\varepsilon \gg 1$), como medio de una considerable dispersión. A base de la (33.17 a)

$$v = \frac{\omega}{k'} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad \text{y} \quad v_{gr} = \frac{d\omega}{dk'} \approx 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}. \tag{35.12}$$

Como aquí podemos apreciar $v_{gr} = 2v$, pero

$$\sqrt{\frac{\omega}{\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\Delta}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

y, por esta razón, v_{gr} es de antemano menor que v_0.

Utilizando la fórmula (11.11), en la que introducimos los valores medios del vector de Poynting y de la densidad de la energía, escribimos la expresión de la velocidad de movimiento de la energía en la forma

$$v_{en} = \frac{\overline{\Pi}}{\overline{w}} \tag{35.13}$$

después de lo cual calculamos v_{en}, tomando las correlaciones (30.1) y (30.6) y las expresiones de las intensidades (33.11). De esta manera,

$$v_{en} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[x_0 \dot{A}\, e^{-ikz},\ y_0 \frac{\dot{A}^*}{\dot{W}^*} e^{ik^*z}\right]}{\frac{1}{4}\varepsilon A^2 e^{-2k''z} + \frac{1}{4}\mu\frac{1}{|\dot{W}|^2}A^2 e^{-2k''z}} = z_0 \frac{2\operatorname{Re}(\dot{W}^*)^{-1}}{\varepsilon + \frac{\mu}{|\dot{W}|^2}}.$$

Teniendo en cuenta la (33.19), de la anterior fórmula obtenemos

$$v_{en} \approx \frac{\sqrt{2\sigma/\omega\mu}}{\varepsilon + \frac{\sigma}{\omega}} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \approx v \qquad (35.14)$$

(el desprecio del primer término del denominador corresponde a la condición $\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$. Con esta misma aproximación se determinaron k', $\dot{W}$, v y v_{gr}).

III. Ondas para la superficie de separación plana de los medios

Ya señalamos que una onda plana homogénea electromagnética ubicada en un medio no limitado no es posible considerarla como objeto real; en esencia, esto sólo es un eslabón en el estudio de los fenómenos electromagnéticos ondulatorios. La abstracción de un espacio infinito con propiedades físicas invariables, tiene determinado valor, pero no nos permite aún descubrir múltiples rasgos de dichos fenómenos. En realidad, habitualmente encontramos superficies de separación de diferentes medios, cuya existencia hay que tomar en cuenta. Por ejemplo, al propagarse las ondas de radio en condiciones naturales, una importante superficie de separación de los medios forma la superficie terrestre.

Más adelante, el objetivo de nuestros estudios van a ser campos electromagnéticos libres en el espacio, separados por un plano en dos semiespacios con diferentes propiedades. Conviene esperar que un campo en forma de una onda plana homogénea no será la solución del problema, ya que esta última debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell en cada uno de los semiespacios y las condiciones límites en el plano de separación. Sin embargo, el concepto de onda plana homogénea electromagnética continúa siéndonos útil. La cuestión es que el proceso electromagnético típico en las condiciones a examinar, se reduce a la existencia de tres tales ondas. Seguidamente, en la fig. 37.1, se mostrará el esquema de propagación de estas ondas características, el que nos da una base para la siguiente interpretación. La onda "*O*" que se propaga en el medio *1* hacia la superficie de separación, o bien, como suele decirse, que *incide* sobre el plano de separación, pasa al medio *2* cambiando su dirección en forma de la onda *refractada* «-|-»; en el primer medio se engendra la onda «—» que se propaga de la superficie de separación y que se denomina onda *reflejada* (de eco).

Así llegamos a las nociones de *reflexión* y *refracción* de ondas electromagnéticas o bien, con mayor exactitud, normales de onda (líneas perpendiculares al frente) o *rayos*.

En el § 34 ya estudiamos ciertos casos de adición de ondas planas homogéneas. La superposición de las ondas incidente y

reflejada en diferentes condiciones conduce, en general, a procesos ondulatorios más complejos; su estudio es una de las principales tareas de esta parte de la obra.

§ 36. Incidencia normal

1. Planteamiento del problema. Adaptación de los medios. En el caso más sencillo, el plano de separación es paralelo al frente del proceso ondulatorio. Situemos de tal modo el sistema cartesiano de coordenadas que los medios con diferentes propiedades estén separados por el plano $x0y$ (fig. 36.1): el medio *1* (semiespacio izquierdo, $z<0$) se caracteriza por las permeabilidades $\dot{\varepsilon}_1$ y μ_1, y el medio *2* (semiespacio derecho, $z>0$), por las permeabilidades $\dot{\varepsilon}_2$ y μ_2.

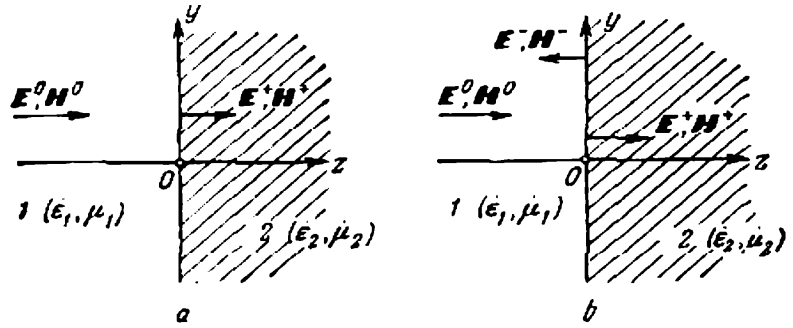


Fig. 36.1.

Supongamos que en el semiespacio izquierdo se propaga una onda plana homogénea electromagnética

$$\dot{E}_m^0 = x_0 \dot{A}\, e^{-i\dot{k}_1 z}, \quad \dot{H}_m^0 = y_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} e^{-i\dot{k}_1 z}, \tag{36.1}$$

$\left(z<0,\ \dot{k}_1=\omega\sqrt{\dot{\varepsilon}_1\mu_1},\ \dot{W}_1=\sqrt{\mu_1/\dot{\varepsilon}_1}\right)$. Digamos que esta onda *incide normalmente* sobre el plano de separación de los medios. Claro está que un campo con amplitudes complejas (36.1) no es la solución de las ecuaciones de Maxwell para el semiespacio derecho. En él, desde el plano de separación debería propagarse una onda para la que

$$\dot{E}_m^+ = x_0 \dot{B}\, e^{-i\dot{k}_2 z}, \quad \dot{H}_m^+ = y_0 \frac{\dot{B}}{\dot{W}_2} e^{-i\dot{k}_2 z}, \tag{36.2}$$

$$\left(z>0,\ \dot{k}_2=\omega\sqrt{\dot{\varepsilon}_2\mu_2},\quad \dot{W}_2=\sqrt{\mu_2/\dot{\varepsilon}_2}\right).$$

Primeramente, planteemos la siguiente pregunta: ¿pueden conjuntamente las expresiones (36.1) y (36.2) darnos la solución del problema electrodinámico planteado? Para responder a ella es pre-

ciso estudiar el supuesto campo en la superficie de separación de los medios, donde, como se desprende del § 7, deben ser satisfechas determinadas condiciones, es decir, en el caso dado, las condiciones de continuidad de las componentes tangenciales de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ que toman el aspecto

$$\dot{E}_m^0 = \dot{E}_m^+ \quad \text{y} \quad \dot{H}_m^0 = \dot{H}_m^+ \quad \text{si } z = 0, \tag{36.3}$$

ya que los vectores son paralelos a la superficie de separación. Introduciendo aquí las expresiones (36.1) y (36.2), tenemos que

$$\dot{A} = \dot{B} \quad \text{y} \quad \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} = \frac{\dot{B}}{\dot{W}_2}$$

y obtenemos la igualdad

$$\dot{W}_1 = \dot{W}_2, \tag{36.4}$$

que, de esa manera, es la condición para existir la supuesta solución del problema.

Así, si las impedancias de onda de los dos medios son iguales, la onda que incide normalmente desde el primer medio sobre el plano de separación del segundo, proporciona allí su onda que se propaga en la misma dirección, debido a lo que termina el proceso electromagnético (fig. 36.1, *a*). La igualdad (36.4) se denomina *condición de adaptación* de los medios; démosle la forma

$$\dot{\mu}_1/\dot{e}_1 = \dot{\mu}_2/\dot{e}_2. \tag{36.4a}$$

2. **Obtención de la solución general.** El caso de adaptación de los medios es suficientemente artificial; a nosotros nos interesa la solución del problema sin plantear limitaciones especiales a la permeabilidad de los medios. Supongamos que tal solución va a diferenciarse de la obtenida en el punto 1, por la existencia de una onda *reflejada* que se propaga por el medio *1* desde su frontera:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m^- = \boldsymbol{x}_0 \dot{C} e^{ik_1 z}, \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m^- = -\boldsymbol{y}_0 \frac{\dot{C}}{\dot{W}_1} e^{ik_1 z} \tag{36.5}$$

($z < 0$), es decir, la solución tiene la forma

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{E}}_m^0 + \dot{\boldsymbol{E}}_m^-, & z < 0, \\ \dot{\boldsymbol{E}}_m^+, & z > 0, \end{cases} \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{H}}_m^0 + \dot{\boldsymbol{H}}_m^-, & z < 0, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^+, & z > 0. \end{cases} \tag{36.6}$$

En tal caso, en el plano de separación en lugar de las (36.3) deberán cumplirse las condiciones

$$\dot{E}_m^0 + \dot{E}_m^- = \dot{E}_m^+ \quad \text{y} \quad \dot{H}_m^0 + \dot{H}_m^- = \dot{H}_m^+ \tag{36.7}$$

($z = 0$), que, al ponerlas en las (36.1), (36.2) y (36.5), nos dan

$$\dot{A} + \dot{C} = \dot{B} \quad \text{y} \quad \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} - \frac{\dot{C}}{\dot{W}_1} = \frac{\dot{B}}{\dot{W}_2}.$$

Hemos obtenido dos ecuaciones respecto a los coeficientes $\dot{A}$, $\dot{B}$ y $\dot{C}$. Como el sistema de ecuaciones siempre puede ser resuelto, las condiciones límites (36.7) serán satisfechas y la solución del problema electrodinámico a considerar tiene, realmente, la forma (36.6). Es lógico que la solución de este problema lineal se ha determinado con una precisión de hasta el coeficiente constante: la amplitud de la onda incidente queda arbitraria. Introduciendo nuevas magnitudes en forma de las amplitudes relativas

$$\dot{\rho}=\frac{\dot{C}}{\dot{A}} \quad \text{y} \quad \dot{\tau}=\frac{\dot{B}}{\dot{A}}, \tag{36.8}$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 1+\dot{\rho}&=\dot{\tau},\\ \dot{W}_2(1-\dot{\rho})&=\dot{W}_1\dot{\tau}, \end{aligned}\right\} \tag{36.9}$$

del cual hallamos

$$\dot{\rho}=\frac{\dot{W}_2-\dot{W}_1}{\dot{W}_2+\dot{W}_1} \quad \text{y} \quad \dot{\tau}=\frac{2\dot{W}_2}{\dot{W}_2+\dot{W}_1}. \tag{36.10}$$

De hecho, hemos hallado la solución. Introduciendo a la (36.6) las expresiones (36.1), (36.2) y (36.5) y teniendo en cuenta (36.8), obtenemos

$$\dot{E}_m=\begin{cases} x_0\dot{A}(e^{-i\dot{k}_1 z}+\dot{\rho}e^{i\dot{k}_1 z}), & z\leqslant 0,\\ x_0\dot{A}\dot{\tau}e^{-i\dot{k}_2 z}, & z\geqslant 0, \end{cases}$$

$$\dot{H}_m=\begin{cases} y_0\dfrac{\dot{A}}{\dot{W}_1}(e^{-i\dot{k}_1 z}-\dot{\rho}e^{i\dot{k}_1 z}), & z\leqslant 0,\\ y_0\dfrac{\dot{A}}{\dot{W}_2}\dot{\tau}e^{-i\dot{k}_2 z}, & z\geqslant 0. \end{cases} \tag{36.11}$$

Aquí los coeficientes $\dot{\rho}$ y $\dot{\tau}$ están determinados por medio de las fórmulas (36.10).

3. Investigación del campo siendo la incidencia normal. Nos queda explicar el resultado obtenido. Al principio, señalemos que, partiendo de lo anteriormente dicho, las magnitudes $\dot{\rho}$ y $\dot{\tau}$ pueden ser fácilmente representadas mediante las relaciones de las amplitudes complejas de las componentes de ondas en el plano de separación ($z=0$):

$$\dot{\rho}=\frac{\dot{E}_m^-(0)}{\dot{E}_m^0(0)}=-\frac{\dot{H}_m^-(0)}{\dot{H}_m^0(0)} \quad \text{y} \quad \dot{\tau}=\frac{\dot{E}_m^+(0)}{\dot{E}_m^0(0)}=\frac{\dot{W}_2\dot{H}_m^+(0)}{\dot{W}_1\dot{H}_m^0(0)}. \tag{36.12}$$

Por lo general, $\dot{\rho}$ se denomina *factor (coeficiente) de reflexión* y $\dot{\tau}$, *relación de transferencia (coeficiente de transmisión)*: la primera de estas magnitudes nos da el valor relativo de la amplitud eléctrica compleja de la onda reflejada en el plano de separación de los medios, mientras que la segunda, el valor análogo para la onda que pasa a través de dicho plano.

Si en los dos medios no hay absorción, las impedancias de onda $\dot{W}_1$ y $\dot{W}_2$ son reales (al mismo tiempo, escribiremos W_1 y W_2) y junto con ellas y según la (36.10), son también reales $\dot{\rho} = \rho$ y $\dot{\tau} = \tau$. En este caso, al pasar la onda por la superficie de separación, su fase no varía, mientras que al reflejarse bien queda igual ($\rho > 0$ si $W_2 > W_1$), bien varía a 180° ($\rho < 0$ si $W_2 < W_1$). En lo que se refiere a los valores absolutos de ρ y τ reales, la primera no sobrepasa a la unidad, la segunda, a dos; dejamos que el lector compruebe que

$$\left[\dot{\boldsymbol{E}}_m^0(0) + \dot{\boldsymbol{E}}_m^-(0),\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^0(0)^* + \dot{\boldsymbol{H}}_m^-(0)^*\right] = \left[\dot{\boldsymbol{E}}_m^+(0),\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^+(0)^*\right],$$

es decir, que al pasar a través de la superficie de separación el flujo de energía, transportada por el campo total, se conserva. En la fig. 36.2 se muestra gráficamente cómo ρ y τ dependen de la razón W_2/W_1.

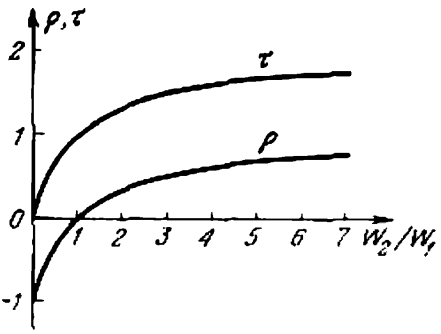


Fig. 36.2.

Deseando investigar el campo en el primer medio, realicemos una sencilla transformación en las correspondientes expresiones del (36.11):

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{x}_0 \dot{A} e^{-i\dot{k}_1 z}\left(1 + \dot{\rho} e^{i2\dot{k}_1 z}\right),$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m = \boldsymbol{y}_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} e^{-i\dot{k}_1 z}\left(1 - \dot{\rho} e^{i2\dot{k}_1 z}\right) \quad (z \leqslant 0) \qquad (36.13)$$

De aquí se desprende que las amplitudes de los vectores del campo ($\boldsymbol{E}_m$ y $\boldsymbol{H}_m$) son proporcionales, respectivamente, a los módulos de los números complejos $1 + \dot{\rho} e^{i2\dot{k}_1 z}$ y $1 - \dot{\rho} e^{i2\dot{k}_1 z}$. La variación de estos últimos en dependencia de z se puede comprender con facilidad por medio de los diagramas que se emplean para representar los números complejos. Supongamos que como anteriormente no hay pérdidas ($\dot{k}_1 = k_1$, $\dot{W}_1 = W_1$). Además, en los diagramas (fig. 36.3, *a*, *b*)

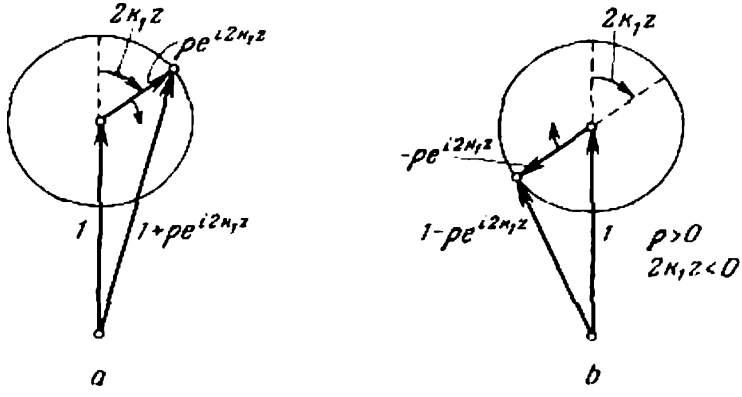


Fig. 36.3.

se fija un segmento dirigido unitario alrededor del cual, al variar z, gira el segmento dirigido $\rho e^{i2k_1 z}$ o bien $-\rho e^{i2k_1 z}$ de longitud $|\rho|$ (junto con z aumenta la fase $2k_1 z$). Por lo tanto, las magnitudes E_m y H_m son proporcionales a los segmentos que en los diagramas se obtienen mediante la adición vectorial de los "vectores" inmóvil y en rotación. Como vemos, $E_m(z)$ y $H_m(z)$ oscilan (fig. 36.4, *a*, *b*), co-

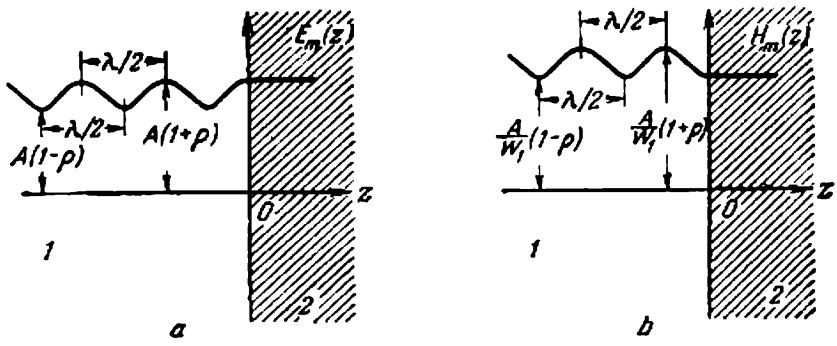


Fig. 36.4.

rrespondiendo la distancia entre los máximos y mínimos adyacentes a una vuelta completa del vector de rotación del diagrama; designando tal distancia por Δz, tenemos: $2k_1 \Delta z = 2\pi$, de donde

$$\Delta z = \frac{\lambda_1}{2} \quad \left(k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}\right), \tag{36.14}$$

es decir, tanto los máximos como los mínimos se encuentran a distancias iguales a una semionda. Los valores máximos de $E_m(z)$ y $H_m(z)$ son proporcionales a $1+|\rho|$, los mínimos, a $1-|\rho|$; por esto, a pequeñas reflexiones, las oscilaciones de las amplitudes también son pequeñas, mientras que al ser la reflexión total ($|\rho| = 1$), las amplitudes disminuyen hasta cero. En virtud de la (36.10) la reflexión es considerable, cuando una de las impedancias de onda supera considerablemente a la otra por el módulo ($|\dot{W}_1| \gg |\dot{W}_2|$ o bien $|\dot{W}_2| \gg |\dot{W}_1|$).

4. Reflexión de un conductor ideal. Dado un medio conductor, sobre cuya superficie de separación incide una onda. Entonces, en virtud de (33.19),

$$\dot{W}_2 \approx \sqrt{i \frac{\omega \mu_2}{\sigma_2}}. \tag{36.15}$$

Pasando a un conductor ideal ($\sigma \to \infty$), la expresión (36.15) resulta ser exacta: $\dot{W}_2 = 0$. En tal caso, a base de las (36.10):

$$\dot{\rho} = -1 \quad \text{y} \quad \dot{\tau} = 0. \tag{36.16}$$

Con todo, debido al (36.11), en el segundo medio el campo no existe; en el primer medio, las amplitudes complejas de los vec-

tores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ tienen el aspecto

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = -i\boldsymbol{x}_0 2\dot{A}\,\mathrm{sen}\,\dot{k}_1 z, \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m = \boldsymbol{y}_0 2\frac{\dot{A}}{\dot{W}_1}\cos\dot{k}_1 z, \quad z \leqslant 0, \quad (36.17)$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m &= -\boldsymbol{x}_0 2\dot{A}\,(i\,\mathrm{sen}\,k_1' z\,\mathrm{ch}\,k_1'' z + \cos k_1' z\,\mathrm{sh}\,k_1'' z), \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m &= \boldsymbol{y}_0 2\frac{\dot{A}}{\dot{W}_1}(\cos k_1' z\,\mathrm{ch}\,k_1'' z + i\,\mathrm{sen}\,k_1' z\,\mathrm{sh}\,k_1'' z), \quad z \leqslant 0. \end{aligned}\right\} \quad (36.17a)$$

Subrayemos que el campo magnético que se define mediante estas fórmulas ya no satisface la condición inicial de continuidad en el plano de separación $\dot{H}_1(0) = \dot{H}_2(0)$. En virtud de la (8.5b), en el plano de separación está distribuida una corriente superficial, cuya amplitud compleja de su densidad es

$$\dot{\eta}_m = [-\boldsymbol{z}_0, \dot{\boldsymbol{H}}_m(0)] = \boldsymbol{x}_0 2\frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} = \boldsymbol{x}_0 2\dot{H}_m^0. \quad (36.18)$$

Cuando el medio no es absorbente ($\dot{k}_1 = k_1$ y $\dot{W}_1 = W_1$ son reales), como se desprende de la (36.17) las intensidades $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ están desfasadas a 90°. El vector medio de Poynting $\overline{\boldsymbol{\Pi}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re} \times \times [\dot{\boldsymbol{E}}_m, \dot{\boldsymbol{H}}_m^*]$ resulta ser nulo: el campo, por término medio, no transporta energía. Al mismo tiempo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ tienen fases que no varían en el espacio, cuando, respectivamente, el signo de $\boldsymbol{E}_m$ y $\boldsymbol{H}_m$ queda constante. Efectivamente, determinando en el caso dado de las (36.17)

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\,\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{i\omega t} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{H} = \mathrm{Re}\,\dot{\boldsymbol{H}}_m e^{i\omega t}, \text{ tenemos}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 2A\,\mathrm{sen}\,k_1 z\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi), \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{y}_0 2\frac{A}{W_1}\cos k_1 z\cos(\omega t + \varphi). \quad (36.19)$$

Vemos que las fases de los campos eléctrico y magnético sólo dependen del tiempo, si $\mathrm{sen}\,k_1 z > 0$ o bien $\mathrm{sen}\,k_1 z < 0$ y, respectivamente, si $\cos k_1 z > 0$ o bien $\cos k_1 z < 0$, mientras que en el espacio varían sus amplitudes.

Así, en el caso considerado, se crea una *onda estacionaria* que de una forma más general se describió en el § 34, punto 4, ya que para $|\rho| = 1$ aquí vemos claramente la superposición de dos ondas con amplitudes iguales que se propagan en sentidos inversos. Una serie de diagramas de la función $E(z)$ para la sucesividad de momentos de tiempo $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ nos muestra que los máximos ("vientres") y ceros ("nodos") de distribución, están fijados en el espacio (fig. 36.5, *b*); esto es el resultado de la coincidencia espacial de fases de las oscilaciones del campo. Las distribuciones $E_m(z)$ y $H_m(z)$ están desplazadas a lo largo del eje z a $\lambda/4$ (fig. 36.5, *a*) y a causa del desfasaje a 90°, es decir, un desplazamiento respecto al tiempo de $T/4$ (fig. 36.5, *c*), hay momentos $\left(t = \frac{m\pi - \varphi}{\omega}, m = 0, 1, 2, \ldots\right)$, cuando el campo es puramente magnético y otros, $\left(\frac{n\pi - 2\varphi}{\omega} = 2t, n = 1, 2, \ldots\right)$, cuando es puramente eléctrico.

En cualquier plano que esté distanciado de una superficie de separación conductora ideal a un número entero de semiondas, el

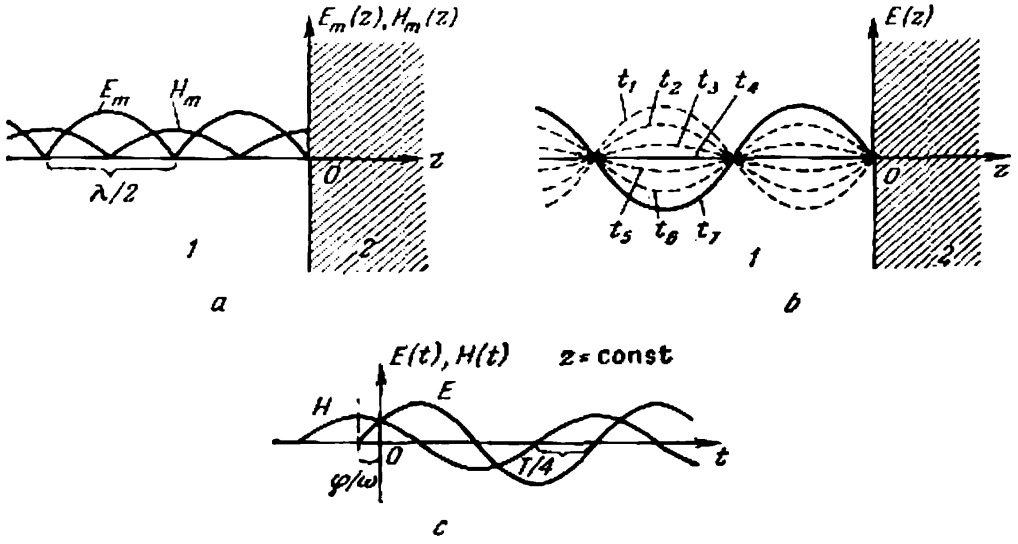


Fig. 36.5.

campo satisface las mismas condiciones que en esta superficie; por consiguiente, cada una de dichas superficies puede ser sustituida por una segunda superficie de separación conductora ideal, sin perturbar absolutamente las premisas para la existencia del campo. En la fig. 36.6, *a* dos superficies de separación conductoras ideales se encuentran a una distancia $3\lambda/2$; entre ellas existe un campo del tipo de onda estacionaria que se define mediante las expresiones (36.19). Luego, fijemos la distancia entre los planos, denominándola *d*.

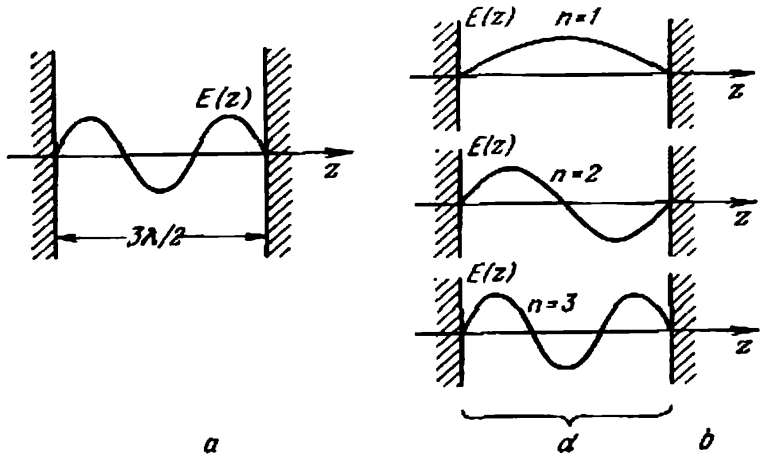


Fig. 36.6.

Es evidente, que entre estas superficies de separación planas idealmente conductoras, pueden haber diferentes campos del tipo de onda estacionaria, siendo la condición para su existencia la exigencia:

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2d}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (36.20a)$$

En la fig. 36.6, *b* se muestran tres distribuciones del campo que corresponden *a los valores inferiores de n. A cada una de las* longitudes de onda λ_n "permitida" corresponde una frecuencia

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{n\pi}{d} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (36.20b)$$

llamada *frecuencia propia* de un sistema de planos conductores ideales. Este último es, ni más ni menos, que el *resonador* electromagnético más sencillo, ya que dicho sistema "responderá" a una excitación de una frecuencia ω igual a una de las frecuencias propias ω_n. Llamamos *oscilaciones propias* del resonador todos los posibles campos libres que en él existen. Claro está que su cantidad es infinita.

Los resonadores electromagnéticos serán estudiados sistemáticamente en el capítulo 5.

5. **Reflexión en un conductor real.** En conclusión investiguemos la incidencia de una onda que se propaga por un dieléctrico perfecto ($\dot{k}_1 = k_1$, $\dot{W}_1 = W_1$) en la superficie de separación con un conductor real. Aplicando la (36.15), introducimos la relación

$$\alpha = \frac{\dot{W}_2}{\dot{W}_1} \approx \sqrt{i \frac{\omega \mu_2}{\sigma_2} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_1}{2\sigma_2}}, \qquad (36.21)$$

que es un parámetro complejo pequeño (se supone que $\dot{\mu}_2 = \mu_1 = \mu_0$, como tiene lugar en la mayoría de los casos). Es cómodo representar las fórmulas (36.10) en forma del desarrollo respecto a α:

$$\dot{\rho} = -\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = -1 + 2\alpha - 2\alpha^2 + 2\alpha^3 - \ldots,$$

$$\dot{\tau} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} = 2\alpha - 2\alpha^2 + 2\alpha^3 - \ldots. \qquad (36.22)$$

De esta manera, con una precisión de hasta α^2

$$\dot{\rho} \approx -1 + 2\alpha = -1 + (1 + i) \sqrt{\frac{2\omega \varepsilon_1}{\sigma_2}},$$

$$\dot{\tau} \approx 2\alpha = (1 + i) \sqrt{\frac{2\omega \varepsilon_1}{\sigma_2}}. \qquad (36.23)$$

Hasta qué punto este resultado se aproxima a las correlaciones (36.16) obtenidas para un conductor perfecto, se puede juzgar por el ejemplo de que para una superficie reflectora de cobre ($\sigma_2 = 5{,}8 \cdot 10^7$ S/m) en el aire ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m)

$$\sqrt{\frac{\omega \varepsilon_1}{\sigma_2}} = \sqrt{\frac{2\pi f \varepsilon_0}{\sigma_2}} \approx 10^{-9} \sqrt{f},$$

siendo f la frecuencia en Hz.

Sin embargo, hay que tomar en consideración la diferencia, si se plantea el problema de calcular la *absorción* de energía para la reflexión de una superficie conductora (metálica). En virtud de las (36.11) y (36.23), el valor medio del vector de Poynting $\overline{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]$ dirigido hacia el interior de un metal, es

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2} z_0 \operatorname{Re} \frac{A^2 |\dot{\tau}|^2}{\dot{W}_2^*} = z_0 A^2 \varepsilon_1 \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma_2 \mu_0}}, \quad z = 0. \qquad (36.24)$$

El valor absoluto de dicho vector es la potencia que se pierde por unidad de superficie del metal. Para que nuestro resultado tenga una forma más cómoda, tomemos en consideración que, en virtud de las (36.11), en una superficie conductora

$$H_m(0) = \frac{A}{\dot{W}_1} |1 - \dot{\rho}| \approx \frac{2A}{\dot{W}_1} = 2H_m^0.$$

Y, por lo tanto,

$$\overline{\Pi} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_2}} H_m^2(0) = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_2}} (H_m^0)^2. \qquad (36.25)$$

La potencia de absorción en un área S se halla multiplicando esta magnitud por S.

§ 37. Incidencia oblicua. Leyes de Snell

1. Rasgos fundamentales del planteamiento del problema. Supongamos que sobre la superficie de separación de los medios *1* y *2* incide oblicuamente la onda E^0, H^0. Lo mismo que para la incidencia normal, el campo completo se compone de tres ondas: en el primer medio, además de la onda *incidente*, existe la onda *reflejada* E^-, H^-, mientras que en el segundo medio, la onda *refractada* E^+, H^+; el esquema del proceso ondulatorio se muestra en la fig. 37.1.

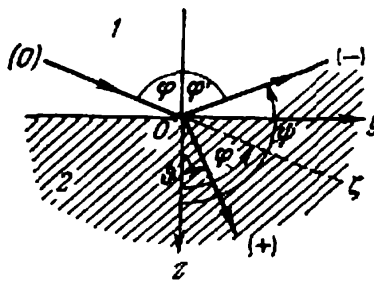


Fig. 37.1.

En diferencia del § 36, comencemos la investigación no hallando la solución del problema electrodinámico, sino aclarando ciertas premisas sobre su existencia que de por sí nos llevarán a la enunciación de las leyes de reflexión y refracción.

En la fig. 37.1 están representados tres *rayos* que nos indican las direcciones de propagación de las ondas a estudiar. El rayo de la onda incidente (*o*) se encuentra en el plano *zOy*, llamado *plano de incidencia* y que con el eje *z* forma el ángulo φ (*ángulo de incidencia*). De acuerdo con la (34.2), todas las componentes del cam-

po de la onda incidente dependen de las coordenadas como

$$e^{-ik_1(x\cos\gamma_1+y\cos\gamma_2+z\cos\gamma_3)},$$

donde en virtud de la fig. 37.1 y la fig. 34.1, *a*, $\gamma_1=90°$, $\gamma_2=90°-\varphi$ y $\gamma_3=\varphi$. De tal guisa, la función

$$f^0(y, z)=e^{-ik_1(y\operatorname{sen}\varphi+z\cos\varphi)} \tag{37.1}$$

caracteriza (con una precisión de hasta el factor constante) la dependencia entre cualquiera de las componentes de la onda incidente $\boldsymbol{E}^0$, $\boldsymbol{H}^0$ y las coordenadas; señalemos que el campo no depende de la coordenada x (que es perpendicular a la superficie de la figura).

Los rayos de las ondas reflejada y refractada están también ubicados en el plano de incidencia yOz, ya que de lo contrario los respectivos campos dependerían de la coordenada x y, en tal caso, las condiciones límites en la superficie de separación no podrían ser satisfechas. De acuerdo con la fig. 37.1, las componentes de las ondas reflejada y refractada se definen por funciones semejantes a $f^0(y, z)$ (37.1): es sólo necesario en lugar de φ tomar en un caso el ángulo ψ y en otro, ϑ, sustituyendo también k_1 por k_2. Por consiguiente, se trata, respectivamente, de las funciones

$$f^-(y, z)=e^{-ik_1(y\operatorname{sen}\psi+z\cos\psi)} \tag{37.2}$$

y

$$f^+(y, z)=e^{-ik_2(y\operatorname{sen}\vartheta+z\cos\vartheta)}. \tag{37.3}$$

Es evidente que se podrá satisfacer las condiciones límites sólo al observar la exigencia de que en la superficie de separación de los medios ($z=0$), las componentes de los campos $\boldsymbol{E}^0$, $\boldsymbol{H}^0$; $\boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{H}^-$ y $\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{H}^+$, con una precisión de hasta el factor constante, sean funciones idénticas de la coordenada y, lo que se enuncia en forma de la igualdad doble

$$f^0(y, 0)=f^-(y, 0)=f^+(y, 0). \tag{37.4}$$

2. Leyes de Snell. Introduciendo en las (37.4) las expresiones de las funciones (37.1)—(37.3), vemos que debe ser

$$k_1\operatorname{sen}\varphi=k_1\operatorname{sen}\psi=k_2\operatorname{sen}\vartheta. \tag{37.5}$$

En particular, de aquí obtenemos

$$\operatorname{sen}\varphi=\operatorname{sen}\psi,$$

y ya que, en virtud de la fig. 37.1, $\varphi\leqslant 90°$ y $\psi\geqslant 90°$, el ángulo φ es igual al adyacente con ψ, es decir, a $180°-\psi$, designado por ψ' y llamado *ángulo de reflexión:*

$$\varphi=\varphi'. \tag{37.6}$$

Así, el ángulo de incidencia es igual al de reflexión. Este hecho forma el contenido de la *primera ley de Snell.*

Seguidamente, de la (37.5) se desprende:

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{k_1}{k_2}. \tag{37.7}$$

Cuando en los dos medios no hay absorción

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{k_1}{k_2}=\frac{v_2}{v_1}, \tag{37.7a}$$

siendo v_1 y v_2 las velocidades de fase de las ondas en los medios *1* y *2*. El ángulo ϑ se denomina *ángulo de refracción* y la correlación obtenida expresa la *segunda ley de Snell:* la relación entre los senos de los ángulos de incidencia y refracción es como la de las velocidades de fase en los respectivos medios (no absorbentes).

Introduciendo los *índices de refracción* $n_1=\sqrt{\varepsilon_{1r}\mu_{1r}}$ y $n_2=\sqrt{\varepsilon_{2r}\mu_{2r}}$, así como el *índice de refracción relativo* $n_{12}=n_1/n_2$, podemos escribir una enunciación de la segunda ley de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{n_1}{n_2}=n_{12}. \tag{37.7b}$$

Se puede considerar que la igualdad (37.7) es la expresión generalizada de la ley de Snell.

Las leyes de Snell son conocidas de la óptica geométrica, en la que no existe la noción de onda, sino que se estudian *rayos*. Tomando el rayo como el sentido de propagación de la onda (la normal a su frente), hemos obtenido estas leyes como consecuencia de las leyes generales del electromagnetismo.

Ahora recurramos a las leyes de Snell para hacer ciertas importantes deducciones.

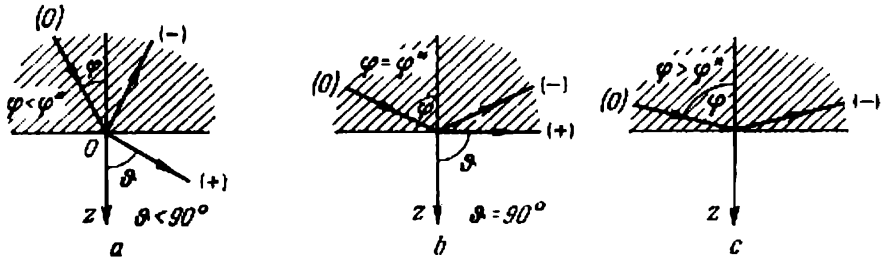


Fig. 37.2.

Si $k_1 > k_2$ (es decir, $n_1 > n_2$ o bien $n_{12} > 1$), suele decirse que el primer medio es "ópticamente más denso" que el segundo. De la (37.7a) o bien la (37.7b) se desprende que al mismo tiempo el ángulo de refracción ϑ es mayor que el ángulo de incidencia φ (fig. 37.2, *a*). Por esta razón, si cierto ángulo agudo $\varphi=\varphi^*$ resulta que el angulo ϑ es *recto* y que el rayo en el segundo medio está dirigido a lo largo de la superficie de separación (fig. 37.2, *b*). En virtud de la (37.7b), la condición de esto será la igualdad

$$n_{12}\operatorname{sen}\varphi^*=1 \tag{37.8}$$

(sen $\vartheta = 1$ y $\vartheta = 90°$). Si ahora aumentamos el ángulo φ

$$\varphi > \varphi^*, \quad n_{12} \operatorname{sen} \varphi > 1, \tag{37.8a}$$

ya no podrá hallarse un ángulo ϑ real, puesto que el sen $\vartheta > 1$. Esto quiere decir que no habrá onda refractada; la onda incidente sólo crea una onda reflejada (fig. 37.2, *c*), es decir, se produce la *reflexión total* desde un medio no absorbente ("transparente") si la incidencia es oblicua. Tomemos otro caso. Sea el segundo medio mucho más denso ópticamente que el primero, es decir, $k_2 \gg k_1$ ($n_2 \gg n_1$ o bien $n_{12} \ll 1$). De la (37.7b) se desprende que independientemente de la magnitud de φ

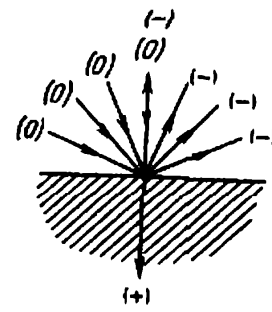


Fig. 37.3.

$$\vartheta \to 0 \quad \text{cuando} \quad n_{12} \to 0, \tag{37.9}$$

es decir, que para una densidad óptica suficientemente elevada del segundo medio, cualquiera que sea el ángulo de incidencia φ, prácticamente el rayo penetra a dicho medio *por la normal* (fig. 37.3).

3. Refracción si hay absorción. Más adelante, consideraremos el caso cuando el segundo medio es absorbente ($\dot{k}_1 = k_1$; $\dot{k}_2 = k_2' - ik_2''$). Expresando el ángulo de refracción ϑ por medio de la (37.7), tenemos

$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{k_1}{\dot{k}_2} \operatorname{sen} \varphi.$$

En esencia, el ángulo de incidencia φ debe obligatoriamente encontrarse en los límites de $0 \div 90°$; $0 \leqslant \operatorname{sen} \varphi \leqslant 1$ y resulta que debido al factor $k_1/\dot{k}_2$ el segundo miembro de la igualdad es complejo. Por esta razón, será también complejo el sen ϑ y hace falta aclarar qué sentido tiene este hecho.

Estudiemos el carácter de la función $f^+(y, z)$ (37.3) que expresa la dependencia entre el campo en el segundo medio y las coordenadas. Como resultado de que $k_1 \operatorname{sen} \varphi$ es una magnitud real, en virtud de la (37.7), es también real la magnitud $\dot{k}_2 \operatorname{sen} \vartheta$; designémosla

$$\dot{k}_2 \operatorname{sen} \vartheta = \alpha_y. \tag{37.10}$$

Al mismo tiempo

$$\dot{k}_2 \cos \vartheta = \dot{k}_2 \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \vartheta} = \sqrt{\dot{k}_2^2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

como vemos, es una magnitud compleja; escribamos:

$$\dot{k}_2 \cos \vartheta = \alpha_z - i\beta, \tag{37.11}$$

siendo α_z y β reales; evidentemente,

$$\alpha_z - i\beta = \sqrt{(k_2')^2 - (k_2'')^2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - i2k_2'k_2''}. \tag{37.11a}$$

Teniendo en cuenta las (37.10) y (37.11), representemos la función $f^+(y, z)$ (37.3) en la forma

$$f^+(y, z) = e^{-\beta z} e^{-i(\alpha_y y + \alpha_z z)}. \qquad (37.12)$$

Es natural que la magnitud β debe ser positiva (más adelante esto será comprobado) y, por consiguiente, podemos decir que se trata de un campo *amortiguado por la normal* dirigida hacia el interior del medio absorbente (eje z). En virtud de esto

$$z = \text{const}$$

es la ecuación del plano de amplitud constante del campo. En lo que se refiere al frente de onda, es decir, a la superficie de fase constante, de la (37.12) se desprende que esta superficie es un plano definido por la ecuación

$$\alpha_y y + \alpha_z z = \text{const}. \qquad (37.13)$$

De ese modo, las superficies de amplitudes *no coinciden* con las de fases constantes (fig. 37.4, *a*) o bien, en otras palabras, la amplitud del frente de onda no es constante; se dice que la onda, siendo plana, *no es homogénea*.

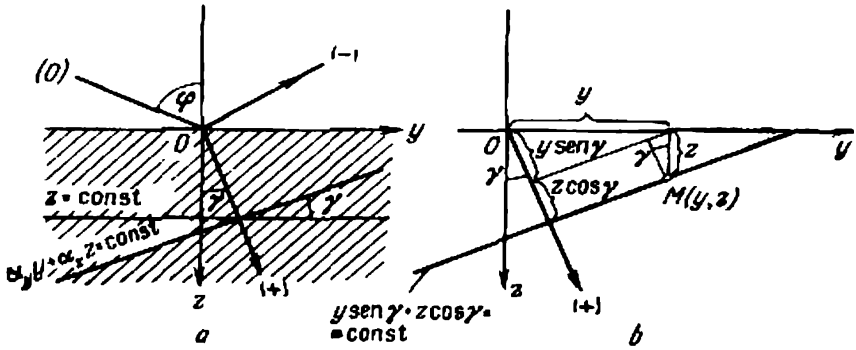


Fig. 37.4.

La normal o el rayo dirigido hacia el frente de onda se indica por medio del ángulo γ, que llamaremos *ángulo de refracción verdadero* para diferenciarlo del ángulo de refracción complejo ϑ. Escribiendo la ecuación del plano del frente de onda en la forma (fig. 37.4, *b*; comparar también con el § 34, punto 1)

$$y \operatorname{sen} \gamma + z \cos \gamma = \text{const}, \qquad (37.14)$$

y al compararla con la (37.13), tenemos

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\alpha_y}{\alpha_z} = \frac{k_1 \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{Re} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}. \qquad (37.15)$$

Mediante esta fórmula hallamos el ángulo de refracción verdadero; señalemos que al mismo tiempo es el ángulo entre el frente y el

plano de amplitud constante (fig. 37.4, *a*). Ya que a base de las (37.10) y (37.11)

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\alpha_y}{\alpha_z - i\beta} = \frac{k_1 \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}, \tag{37.16}$$

entonces

$$\operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{Re}\operatorname{cotg}\vartheta. \tag{37.17}$$

Retornemos a la fórmula (37.11a). Supongamos que

$$(k_2')^2 - (k_2'')^2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi > 0, \tag{37.18}$$
$$2k_2'k_2'' \ll (k_2')^2 - (k_2'')^2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi.$$

Esto tiene lugar cuando el segundo medio es débilmente absorbente, pero en suficiente grado ópticamente más denso que el primero ($|\dot{k}_2| > k_1$). Desarrollando en la (37.11a) el segundo miembro en forma de una serie exponencial y tomando sólo la parte lineal, hallamos que

$$\alpha_z \approx \sqrt{(k_2')^2 - (k_2'')^2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi}, \tag{37.19a}$$

$$\beta \approx \frac{k_2'k_2''}{\sqrt{(k_2')^2 - (k_2'')^2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}. \tag{37.19b}$$

De acuerdo con $k_2'' \leqslant k_2'$ y al mismo tiempo, $\beta \ll \alpha_z$, tendremos

$$\operatorname{tg}\gamma \approx |\operatorname{tg}\vartheta|. \tag{37.20}$$

Si, por el contrario, el segundo medio es ópticamente denso en grado más considerable que el primero ($|\dot{k}_2| \gg k_1$), en particular, debido a la elevada absorción, entonces, como se desprende de la (37.15), el ángulo de refracción γ verdadero es *muy* pequeño y, por esta razón, el frente de onda en el medio absorbente será casi paralelo a la superficie de separación de los medios. En tal caso, es válida la correlación límite

$$\gamma \to 0 \text{ cuando } k_1/|\dot{k}_2| \to 0. \tag{37.21}$$

Al reflejarse en el metal, según la (33.17a),

$$k_2' \approx k_2'' \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}} \quad \text{y} \quad |\dot{k}_2| \approx \sqrt{\omega\mu_2\sigma_2}.$$

Con todo, la condición $|\dot{k}_2| \gg k_1$ se cumple de antemano a causa de la elevada conductibilidad específica σ_2 y podemos decir que en el metal el rayo coincide con la normal interior. En este caso, de acuerdo con la (37.11a), $\alpha_z - i\beta \approx \sqrt{-i2k_2'k_2''}$, es decir,

$$\alpha_z \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}, \tag{37.22}$$

y esto significa que la variación de fase y amplitud a lo largo de la normal transcurre, con alto grado de precisión, según la misma ley que al propagarse una onda plana homogénea (§ 33, punto 3). Sin embargo, no debemos hacernos la idea de que la

onda refractada es, efectivamente, plana y homogénea. Aunque el ángulo entre los planos de las amplitudes y fases constantes sea muy pegueño, su falta de coincidencia será considerable. En realidad, el plano de la amplitud constante es la superficie de separación de los medios, mientras que la fase varia en ella según la ley $yk_1 \operatorname{sen} \varphi$.

§ 38. Fórmulas de Fresnel y estructura del campo

1. Observaciones preliminares. Polarización perpendicular. De lo anteriormente expuesto, vemos que las leyes de Snell nos dan una serie de valiosos datos sobre los procesos ondulatorios al ser plana la superficie de separación entre los medios. Sin embargo, no

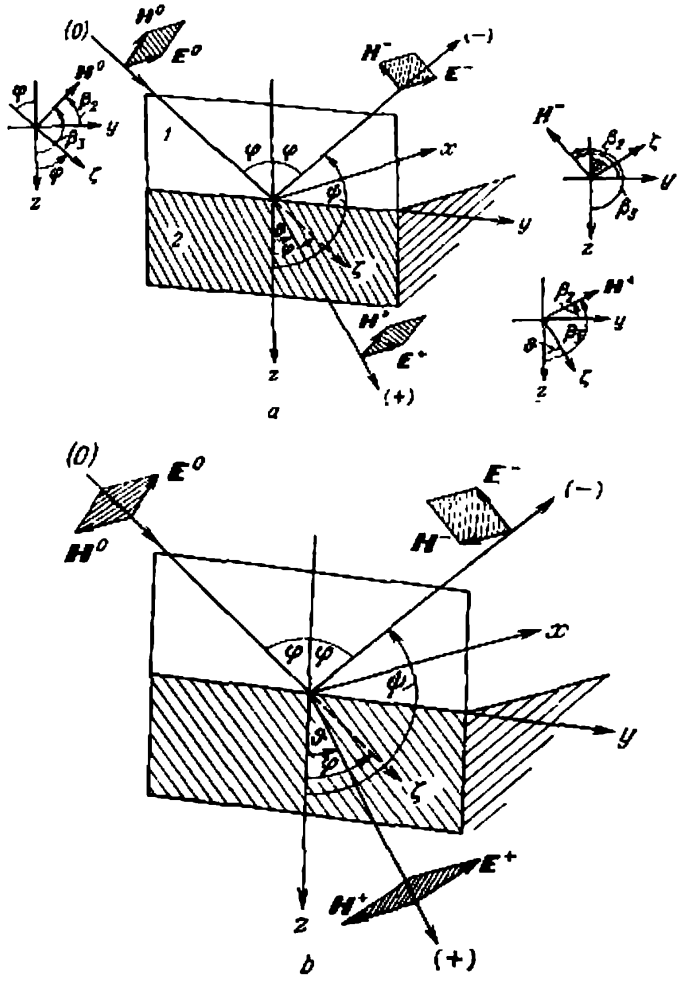


Fig. 38.1.

tendremos una representación total mientras no hallemos las expresiones de las intensidades del campo en ambos medios. Ahora, debemos retornar al planteamiento inicial del problema electrodinámico y obtener su solución.

El propio planteamiento del problema de la incidencia oblicua de una onda (§ 37, punto 1) debe ser precisado, puesto que nada se dijo sobre la *polarización* de la onda. Es evidente que una onda incidente de toda polarización puede ser descompuesta en dos ondas cuya polarización se muestra en la fig. 38.1, *a* y la fig. 38.1, *b*. El vector $\boldsymbol{E}$ de la primera onda (*a*) es perpendicular al plano de incidencia (y paralelo a la superficie de separación de los medios); el vector $\boldsymbol{E}$ de la segunda onda (*b*) está ubicado en el plano de incidencia, es decir, es paralelo a él, mientras que, al mismo tiempo, el vector $\boldsymbol{H}$ es paralelo a la superficie de separación de los medios. Llamaremos *perpendicular* la polarización del primer tipo, y *paralela* la del segundo tipo. Los casos de polarización perpendicular y paralela son respectivamente sencillos y cada uno de ellos será considerado por nosotros. Si la polarización es arbitraria, el campo puede ser hallado como la superposición de dos campos ya conocidos.

Comencemos por la polarización perpendicular (fig. 38.1, *a*). Para escribir el campo de la onda incidente en el sistema prefijado de coordenadas cartesianas, nos será suficiente pasar de las fórmulas (34.1) a las del tipo (34.2). En virtud de la fig. 38.1, *a*

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 0, && \alpha_2 = 90^\circ, && \alpha_3 = 90^\circ, \\ &\beta_1 = 90^\circ, && \beta_2 = \varphi, && \beta_3 = 90^\circ + \varphi, \\ &\gamma_1 = 90^\circ, && \gamma_2 = 90^\circ - \varphi, && \gamma_3 = \varphi \end{aligned}$$

(el vector $\boldsymbol{E}^0$ está dirigido por el eje x, de tal modo que $\xi_0 = \boldsymbol{x}_0$, mientras que el vector $\boldsymbol{H}^0$ forma un ángulo φ con el eje y). O sea, que para la onda incidente obtenemos las siguientes expresiones de las amplitudes complejas:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^0 &= \boldsymbol{x}_0 \dot{A} e^{-ik_1 (y \operatorname{sen}\varphi + z\cos\varphi)}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^0 &= \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} (\boldsymbol{y}_0 \cos\varphi - \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen}\varphi)\, e^{-ik_1 (y \operatorname{sen}\varphi + z\cos\varphi)}, \end{aligned}\right\} z < 0. \qquad (38.1)$$

De forma análoga, para la onda refractada

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 0, && \alpha_2 = 90^\circ, && \alpha_3 = 90^\circ, \\ &\beta_1 = 90^\circ, && \beta_2 = \vartheta, && \beta_3 = 90^\circ + \vartheta, \\ &\gamma_1 = 90^\circ, && \gamma_2 = 90^\circ - \vartheta, && \gamma_3 = \vartheta \end{aligned}$$

(el vector $\boldsymbol{E}^+$ es colineal a $\boldsymbol{E}^0$, mientras que el vector $\boldsymbol{H}^+$ forma con el eje y un ángulo ϑ). Escribamos las amplitudes complejas del campo:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^+ &= \boldsymbol{x}_0 \dot{B} e^{-ik_2 (y \operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^+ &= \frac{\dot{B}}{\dot{W}_2} (\boldsymbol{y}_0 \cos\vartheta - \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen}\vartheta)\, e^{-ik_2 (y \operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, \end{aligned}\right\} z > 0. \qquad (38.2)$$

Para la onda reflejada, el vector eléctrico es colineal (en la fig. 38.1, *a*, es paralelo) a la anterior dirección mientras que el magnético forma, en tal caso, con el eje y un ángulo $\psi = 180° - \varphi$ y por esta razón,

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 0, & \alpha_2 = 90°, & \alpha_3 = 90°, \\ \beta_1 = 90°, & \beta_2 = 180° - \varphi, & \beta_3 = -90° - \varphi, \\ \gamma_1 = 90°, & \gamma_2 = -90° + \varphi, & \gamma_3 = 180° - \varphi \end{array}$$

y a continuación

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^- &= \boldsymbol{x}_0 \dot{C} e^{-ik_1 (y \operatorname{sen} \varphi - z \cos \varphi)}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^- &= \frac{-\dot{C}}{\dot{W}_1} (\boldsymbol{y}_0 \cos \varphi + \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen} \varphi) e^{-ik_1 (y \operatorname{sen} \varphi - z \cos \varphi)}, \end{aligned}\right\} \quad (z < 0). \qquad (38.3)$$

Aplicando a los campos la exigencia de continuidad de las componentes tangenciales de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ en la superficie de separación de los medios ($z = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{E}_m^0 (y, 0) + \dot{E}_m^- (y, 0) &= \dot{E}_m^+ (y, 0), \\ \dot{H}_{my}^0 (y, 0) + \dot{H}_{my}^- (y, 0) &= \dot{H}_m^+ (y, 0), \end{aligned} \qquad (38.4)$$

tenemos

$$\dot{A} + \dot{C} = \dot{B}, \quad \dot{W}_2 (\dot{A} - \dot{C}) = \dot{W}_1 \dot{B} \cos \vartheta. \qquad (38.5)$$

De forma semejante a como lo hicimos en el § 36 al examinar la incidencia normal, introducimos el *factor de reflexión* y la *relación de transferencia (coeficiente de transmisión)* para el caso de incidencia oblicua para la polarización perpendicular; éstas serán las magnitudes

$$\dot{\rho}_\perp = \frac{\dot{C}}{\dot{A}} = \frac{\dot{E}_m^- (y, 0)}{\dot{E}_m^0 (y, 0)} = \frac{\dot{H}_m^- (y, 0)}{\dot{H}_m^0 (y, 0)}, \quad \dot{\tau}_\perp = \frac{\dot{B}}{\dot{A}} = \frac{\dot{E}_m^+ (y, 0)}{\dot{E}_m^0 (y, 0)} = \frac{\dot{W}_2 \dot{H}_m^+ (y, 0)}{\dot{W}_1 \dot{H}_m^0 (y, 0)} \qquad (38.6)$$

(la dirección positiva convencional de los vectores $\dot{\boldsymbol{E}}_m^0$, $\dot{\boldsymbol{E}}_m^-$ y $\dot{\boldsymbol{E}}_m^+$ se indica, con todo, por el versor $\boldsymbol{x}_0$, mientras que la de los vectores $\dot{\boldsymbol{H}}_m^0$, $\dot{\boldsymbol{H}}_m^-$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m^+$, respectivamente, por los vectores unitarios $\boldsymbol{k}_0^0 = \boldsymbol{y}_0 \cos \varphi - \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen} \varphi$, $\boldsymbol{k}_0^- = -\boldsymbol{y}_0 \cos \varphi - \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen} \varphi$ y $\boldsymbol{k}_0^+ = \boldsymbol{y}_0 \cos \vartheta - \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen} \vartheta$, la fig. 38.2, *a*). Las ecuaciones (38.5) toman la forma

$$1 + \dot{\rho}_\perp = \dot{\tau}_\perp, \quad \dot{W}_2 (1 - \dot{\rho}_\perp) \cos \varphi = \dot{W}_1 \dot{\tau}_\perp \cos \vartheta. \qquad (38.7)$$

De aquí

$$\dot{\rho}_\perp = \frac{\dot{W}_2 \cos \varphi - \dot{W}_1 \cos \vartheta}{\dot{W}_2 \cos \varphi + \dot{W}_1 \cos \vartheta} \quad \text{y} \quad \dot{\tau}_\perp = \frac{2\dot{W}_2 \cos \varphi}{\dot{W}_2 \cos \varphi + \dot{W}_1 \cos \vartheta}. \qquad (38.8)$$

Estas expresiones de los coeficientes de reflexión y transferencia se denominan *fórmulas de Fresnel*.

Señalemos que si $\varphi = \vartheta = 0$ (incidencia normal) las fórmulas de Fresnel (38.8) se convierten en las correlaciones (36.10) obtenidas anteriormente, ya que en virtud de las definiciones (38.12) y (38.6)

$$\dot{\rho}_\perp = \dot{\rho}, \quad \dot{\tau}_\perp = \dot{\tau}. \tag{38.9}$$

Después de hallar $\dot{\rho}_\perp$ y $\dot{\tau}_\perp$, podemos utilizar estos coeficientes para escribir las expresiones de los campos en ambos medios; en

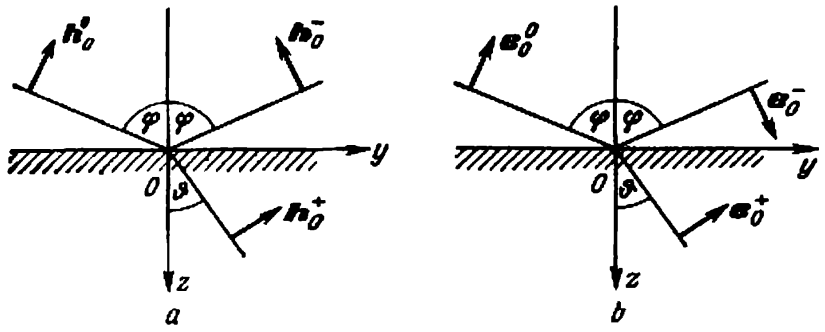


Fig. 38.2.

las expresiones de las amplitudes complejas sólo queda el coeficiente indefinido $\dot{A}$. Asi, confeccionando las sumas $\dot{E}_m^0 + \dot{E}_m^-$ y $\dot{H}_m^0 + \dot{H}_m^-$ que caracterizan el campo en el primer medio y añadiendo $\dot{E}_m^+$, $\dot{H}_m^+$ para el segundo medio, aplicando las correlaciones (38.6), obtenemos

$$\dot{E}_m = \begin{cases} x_0 \dot{A} e^{-i\dot{k}_1 y \operatorname{sen}\varphi} (e^{-i\dot{k}_1 z \cos\varphi} + \dot{\rho}_\perp e^{i\dot{k}_1 z \cos\varphi}), & z < 0, \\ x_0 \dot{A} \dot{\tau}_\perp e^{-i\dot{k}_2 (y \operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, & z > 0, \end{cases} \tag{38.10a}$$

y

$$\dot{H}_m = \begin{cases} \dfrac{\dot{A}}{\dot{W}_1} e^{-i\dot{k}_1 y \operatorname{sen}\varphi} [y_0 (e^{-i\dot{k}_1 z\cos\varphi} - \dot{\rho}_\perp e^{i\dot{k}_1 z\cos\varphi}) \cos\varphi - \\ - z_0 (e^{-i\dot{k}_1 z\cos\varphi} + \dot{\rho}_\perp e^{i\dot{k}_1 z\cos\varphi}) \operatorname{sen}\varphi], \qquad z < 0, \\ \dfrac{\dot{A}}{\dot{W}_2} \dot{\tau}_\perp (y_0 \cos\vartheta - z_0 \operatorname{sen}\vartheta) e^{-i\dot{k}_2 (y \operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, \\ \qquad\qquad z > 0. \end{cases} \tag{38.10b}$$

2. Polarización paralela. Sin hacer ninguna deducción de los resultados obtenidos, nos vamos a ocupar de la polarización paralela (fig. 38.1, *b*). Ahora, el vector magnético está dirigido en sentido inverso al eje x, mientras que el eléctrico se orienta del mismo modo que el vector magnético, cuando la polarización es perpendicular. De este modo, por analogía con las fórmulas (38.1)—(38.3), todas las expresiones de los campos pueden ser escritas inmedia-

tamente. De esta manera,

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m^0 &= \dot{A}\,(\boldsymbol{y}_0 \cos\varphi - \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen}\varphi)\, e^{-i\dot{k}_1 (y \operatorname{sen}\varphi + z\cos\varphi)}, \\ \dot{H}_m^0 &= -\boldsymbol{x}_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} e^{-i\dot{k}_1 (y \operatorname{sen}\varphi + z\cos\varphi)}, \end{aligned}\right\} \quad z < 0 \qquad (38.11)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m^+ &= \dot{B}\,(\boldsymbol{y}_0 \cos\vartheta - \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen}\vartheta)\, e^{-i\dot{k}_2 (y \operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, \\ \dot{H}_m^+ &= -\boldsymbol{x}_0 \frac{\dot{B}}{\dot{W}_2} e^{-i\dot{k}_2 (y \operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)} \end{aligned}\right\} \quad z > 0 \qquad (38.12)$$

y

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m^- &= \dot{C}\,(\boldsymbol{y}_0 \cos\varphi + \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen}\varphi)\, e^{-i\dot{k}_1 (y \operatorname{sen}\varphi - z\cos\varphi)}, \\ \dot{H}_m^- &= -\boldsymbol{x}_0 \frac{\dot{C}}{\dot{W}_1} e^{-i\dot{k}_1 (y \operatorname{sen}\varphi - z\cos\varphi)}. \end{aligned}\right\} \quad z < 0. \qquad (38.13)$$

Igualando las componentes tangenciales de los vectores del campo en los dos medios, cuando $z = 0$, tenemos

$$(\dot{A} - \dot{C})\cos\varphi = \dot{B}\cos\vartheta, \quad \dot{W}_2(\dot{A} + \dot{C}) = \dot{W}_1\dot{B}. \qquad (38.14)$$

Para el caso de incidencia oblicua con polarización paralela, llamaremos *factor de reflexión* y *coeficiente de transmisión* las magnitudes

$$\left.\begin{aligned} \dot{\rho}_{\parallel} &= -\frac{\dot{C}}{\dot{A}} = \frac{\dot{E}_m^-(y,\,0)}{\dot{E}_m^0(y,\,0)} = -\frac{\dot{H}_m^-(y,\,0)}{\dot{H}_m^0(y,\,0)}, \\ \dot{\tau}_{\parallel} &= \frac{\dot{B}}{\dot{A}} = \frac{\dot{E}_m^+(y,\,0)}{\dot{E}_m^0(y,\,0)} = \frac{\dot{W}_2\dot{H}_m^+(y,\,0)}{\dot{W}_1\dot{H}_m^0(y,\,0)} \end{aligned}\right\} \qquad (38.15)$$

(los vectores unitarios $\boldsymbol{e}_0^- = \boldsymbol{y}_0\cos\varphi - \boldsymbol{z}_0\operatorname{sen}\varphi$, $\boldsymbol{e}_0^- = \boldsymbol{y}_0\cos\varphi + \boldsymbol{z}\operatorname{sen}\varphi$ y $\boldsymbol{e}_0^+ = \boldsymbol{y}_0\cos\vartheta - \boldsymbol{z}_0\operatorname{sen}\vartheta$ indican el *sentido positivo convencional* de los vectores $\dot{\boldsymbol{E}}_m^0$, $\dot{\boldsymbol{E}}_m^-$ y $\dot{\boldsymbol{E}}_m^+$ (fig. 38.2, *b*), mientras que $-\boldsymbol{x}_0$, el de los vectores $\dot{\boldsymbol{H}}_m^0$, $\dot{\boldsymbol{H}}_m^-$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m^+$). En virtud de la (38.14)

$$(1 + \dot{\rho}_{\parallel})\cos\varphi = \dot{\tau}_{\parallel}\cos\vartheta, \quad \dot{W}_2(1 - \dot{\rho}_{\parallel}) = \dot{W}_1\dot{\tau}_{\parallel}. \qquad (38.16)$$

De aquí obtenemos las *fórmulas de Fresnel* para la polarización paralela

$$\dot{\rho}_{\parallel} = \frac{\dot{W}_2\cos\vartheta - \dot{W}_1\cos\varphi}{\dot{W}_2\cos\vartheta + \dot{W}_1\cos\varphi} \quad \text{y} \quad \dot{\tau}_{\parallel} = \frac{2\dot{W}_2\cos\varphi}{\dot{W}_2\cos\vartheta + \dot{W}_1\cos\varphi}. \qquad (38.17)$$

Comparando las (38.15) y (36.12), advertimos que cuando $\varphi = \vartheta = 0$

$$\dot{\rho}_{\parallel} = \dot{\rho}, \quad \dot{\tau}_{\parallel} = \dot{\tau}, \qquad (38.18)$$

y, efectivamente, las fórmulas (36.10) es posible obtenerlas para $\varphi = \vartheta = 0$ tanto de las (38.17), como de las (38.8).

De modo semejante a como lo hicimos en el caso de la polarización perpendicular, escribamos para ambos medios las ampli-

tudes complejas de los vectores del campo, expresados mediante $\dot{\rho}_{11}$ y $\dot{\tau}_{11}$:

$$\dot{E}_m = \begin{cases} \dot{A}e^{-i\dot{k}_1 y \operatorname{sen}\varphi}\left[\boldsymbol{y}_0\left(e^{-i\dot{k}_1 z\cos\varphi} + \dot{\rho}_{11}e^{i\dot{k}_1 z\cos\varphi}\right)\cos\varphi - \right. \\ \left. -\boldsymbol{z}_0\left(e^{-i\dot{k}_1 z\cos\varphi} - \rho_{11}e^{i\dot{k}_1 z\cos\varphi}\right)\operatorname{sen}\varphi\right], \quad z<0; \\ \dot{A}\dot{\tau}_{11}\left(\boldsymbol{y}_0\cos\vartheta - \boldsymbol{z}_0\operatorname{sen}\vartheta\right)e^{-i\dot{k}_2(y\operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, \quad z>0 \end{cases} \tag{38.19a}$$

y

$$\dot{H}_m = \begin{cases} -\boldsymbol{x}_0\dfrac{\dot{A}}{\dot{W}_1}e^{-i\dot{k}_1 y\operatorname{sen}\varphi}\left(e^{-i\dot{k}_1 z\cos\varphi} - \dot{\rho}_{11}e^{i\dot{k}_1 z\cos\varphi}\right), \quad z<0, \\ -\boldsymbol{x}_0\dfrac{\dot{A}}{\dot{W}_2}\dot{\tau}_{11}e^{-i\dot{k}_2(y\operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, \quad z>0. \end{cases} \tag{38.19b}$$

§ 39. Reflexión y paso totales para incidencia oblicua

1. Reflexión total en un conductor perfecto. Ondas guiadas. Las fórmulas de Fresnel y las expresiones de los campos obtenidas anteriormente, nos permiten llegar a una serie de interesantes deducciones sobre los procesos ondulatorios cuando la superficie de separacion entre los medios es plana. Examinemos ciertos importantes casos.

Como se desprende de las fórmulas de Fresnel (38.8) y (38.17), mientras mayor sea la diferencia entre las impedancias de onda de ambos medios, la reflexión será más considerable. Lo mismo que para la incidencia normal (§ 36), según su módulo el factor de reflexión se aproxima a la unidad si $|\dot{W}_1| \gg |\dot{W}_2|$ o bien $|\dot{W}_2| \gg |\dot{W}_1|$. Supongamos que el segundo medio es un conductor perfecto, o sea, $\sigma_2 \to \infty$ y $|\dot{W}_2| = 0$. En virtud de las (38.8) y (38.17), tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\perp &= -1, \quad \dot{\rho}_{11} = -1, \\ \dot{\tau}_\perp &= 0, \quad \dot{\tau}_{11} = 0. \end{aligned} \tag{39.1}$$

Es natural, que para el caso de incidencia normal, de aqui obtenemos las igualdades (36.16): con este objeto es suficiente tener en cuenta las correlaciones (38.9) y (38.18).

Introduciendo en las (38.10a) y (38.10b) $\dot{\rho}_\perp = -1$ y $\dot{\tau}_\perp = 0$, obtendremos las expresiones para las ampitudes complejas del campo, cuando la reflexión de una onda perpendicularmente polarizada en una superficie perfectamente conductora es total

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= \boldsymbol{x}_0\dot{E}_0\operatorname{sen}(\dot{k}_1 z\cos\varphi)\,e^{-i\dot{k}_1 y\operatorname{sen}\varphi}, \\ \dot{H}_m &= \frac{\dot{E}_0}{\dot{W}_1}\left[\boldsymbol{y}_0 i\cos\varphi\cos(\dot{k}_1 z\cos\varphi) - \right. \\ &\left. -\boldsymbol{z}_0\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}(\dot{k}_1 z\cos\varphi)\right]e^{-i\dot{k}_1 y\operatorname{sen}\varphi}, \quad z<0 \end{aligned} \tag{39.2}$$

($\dot{E}_0 = -i2\dot{A}$). Como vemos, al superponer las ondas incidente y reflejada se crea un campo exclusivamente característico que tiene las propiedades de onda progresiva (móvil) para la dirección y (propagación a lo largo de la superficie de separación de los medios) y de onda estacionaria para la dirección z (creación de nodos y vientres a lo largo de la normal a la superficie de separación). En este, caso, el papel de los números complejos de onda lo juegan las magnitudes

$$\dot{\Gamma} = \dot{k}_1 \operatorname{sen} \varphi, \quad \dot{\chi} = \dot{k}_1 \cos \varphi. \tag{39.3}$$

La primera de ellas, $\dot{\Gamma}$, caracteriza el campo como una onda progresiva y se denominará *número de onda longitudinal*, así como también *constante de propagación*, mientras que la segunda magnitud, $\dot{\chi}$, se llamará *número de onda transversal*. En conjunto, el campo es una *onda plana homogénea:* en los planos del frente $y = \text{const}$, las amplitudes de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ no quedan constantes, sino que varían según la ley de la onda estacionaria. En diferencia de la onda plana homogénea que ya conocemos, la onda a examinar tiene no sólo componentes transversales del campo (E_x y H_z en el sistema elegido de coordenadas), sino que, además, una componente longitudinal (H_y).

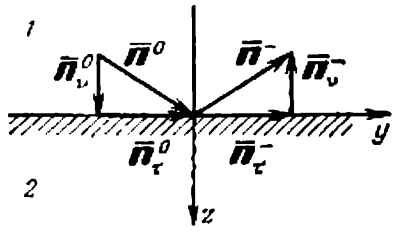


Fig. 39.1.

El motivo de la creación del campo considerado lo aclara el diagrama vectorial de la densidad media del flujo de energía (fig. 39.1). Indiquemos, primeramente, que la onda estacionaria pura en la dirección z y la onda móvil no amortiguada por y (a lo largo de la superficie de separación), se crean al no haber absorción ($\dot{k}_1 = k_1$). Debido a la reflexión total, los valores medios del vector de Poynting para las ondas incidente y reflejada tienen una magnitud absoluta igual: $\overline{\Pi}^- = \overline{\Pi}^0$. Pero como vemos en el diagrama, esto significa que sus componentes normales mutuamente se anulan y las tangenciales su suman. El campo no transporta energía por la normal z (en realidad, la energía no debe penetrar al segundo medio) y por esta razón, adquiere el carácter de una onda estacionaria por z. De este modo, la energía se transporta a lo largo de la superficie de separación por una onda no homogénea que se propaga tangencialmente. Al parecer, esta última está dirigida por la superficie de separación y, por esto, emplearemos la denominación de *onda guiada*.

En el caso de reflexión de una onda paralelamente polarizada en un plano perfectamente conductor, las expresiones de las amplitudes complejas del campo se obtienen poniendo $\dot{\rho}_{\parallel} = -1$ y $\dot{\tau}_{\parallel} = 0$

en las (38.19a), (38.19b). Esta operación nos da

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= \dot{E}_0 [\boldsymbol{y}_0 \cos\varphi \operatorname{sen}(\dot{k}_1 z \cos\varphi) - \\ &\quad - \boldsymbol{z}_0 i \operatorname{sen}\varphi \cos(\dot{k}_1 z \cos\varphi)] e^{-i\dot{k}_1 y \operatorname{sen}\varphi}, \\ \dot{H}_m &= -\boldsymbol{x}_0 \frac{i\dot{E}_0}{\dot{W}_1} \cos(\dot{k}_1 z \cos\varphi) e^{-i\dot{k}_1 y \operatorname{sen}\varphi}, \\ & z < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (39.4)$$

($\dot{E}_0 = -i2\dot{A}$). De manera semejante a las (39.2), el resultado obtenido define una onda plana no homogénea, dirigida por la superficie de separación de los medios. Como anteriormente, en el plano del frente $y = \text{const}$, las amplitudes del campo están distribuidas según la ley de una onda estacionaria (la onda estacionaria pura, es decir, sin absorción). Los números de onda transversales y longitudinales son los mismos que en el caso de polarización perpendicular (39.3). El campo tiene una componente longitudinal pero ya no magnética, sino eléctrica (E_y).

2. Guía de ondas hueca más sencilla. Sin absorción ($\dot{k}_1 = k_1$), los valores instantáneos de las componentes del campo se miden por la normal z, como se muestra en la fig. 39.2, *a*, *b*. Con facilidad se advierte que en los planos (véase las líneas de trazos)

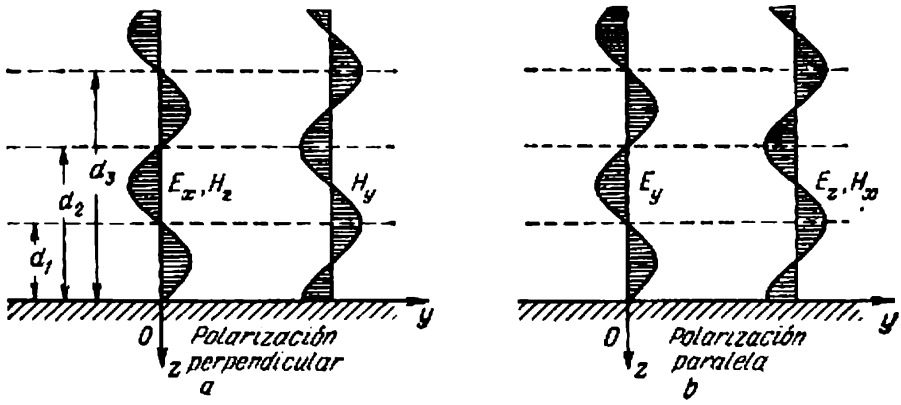


Fig. 39.2.

distanciados de la superficie de separación de los medios a d_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) y que se definen por la condición

$$\dot{\chi} d_n = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (39.5)$$

se satisfacen unas condiciones límites semejantes a las de la propia superficie de separación perfectamente conductora de los medios ($E_x = 0$, $H_z = 0$ para polarización perpendicular y $E_y = 0$, para paralela). Además, la estructura del campo se repite periódicamente. Por consiguiente, si a uno (o varios) de los planos mar-

cados a trazos se le dan las propiedades de conductor perfecto, tal hecho de nungún modo influenciará en el campo. Este último puede existir entre *dos* superficies perfectamente conductoras, que juegan el papel de un sistema que *dirige* la onda o, bien, de una *guía de ondas*. En la fig. 39.3, *a*, *b* se muestra la estructura de los campos más sencillos ubicados en un sistema de dicho tipo.

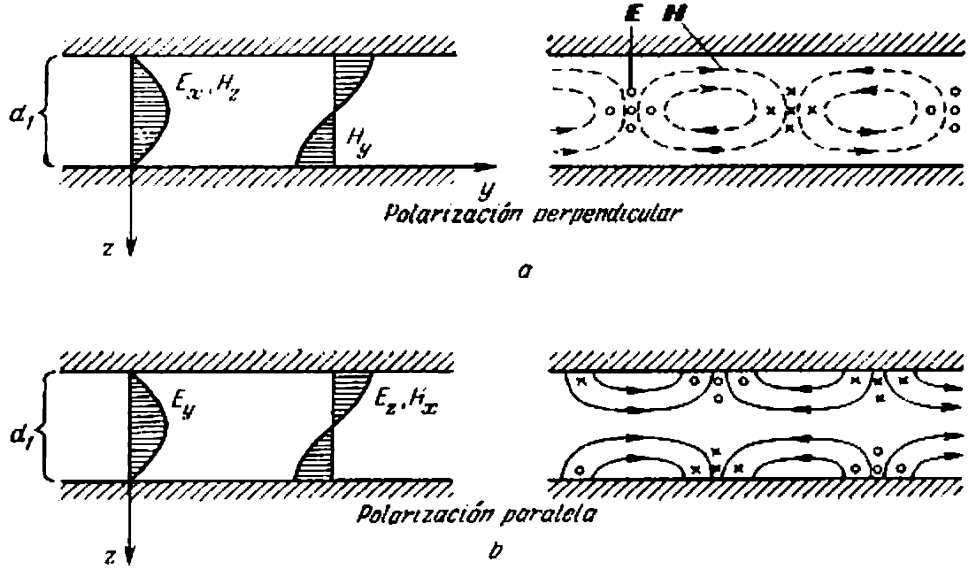


Fig. 39.3.

Cuando la polarización es perpendicular, pueden ser, además, introducidos planos perfectamente conductores paralelos a *zOy* que pueden disponerse a cualesquier distancias ya que, en todo lugar, el vector $\boldsymbol{E}$ no tendrá en ellas componente tangencial y el vector $\boldsymbol{H}$, normal. Como resultado, vemos que la onda puede propagarse por un "tubo" perfectamente conductor de sección transversal rectangular (fig. 39.4). Esto es lo que denominamos *guía de ondas rectangular*.

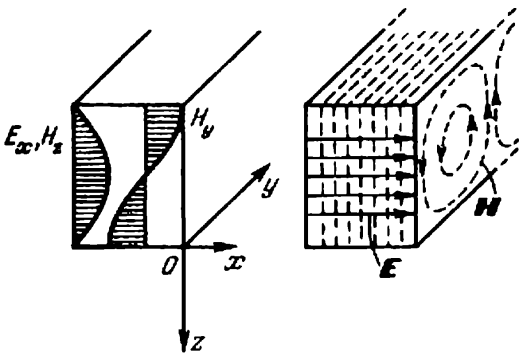


Fig. 39.4.

Las guias de ondas serán detalladamente estudiadas en el capítulo 5 y por esta razón, aqui nos limitaremos a hacer ciertas indicaciones. Supongamos que la distancia *d* entre dos planos perfectamente conductores está fijada. Entonces, según la (39.5), entre ellos pueden propagarse ondas cuyos núme-

ros de onda transversales $\chi = \chi_n$ se subordinan a la condición

$$\chi_n = \frac{n\pi}{d} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{39.6}$$

En otras palabras, para los valores indicados de χ es posible la existencia de una serie infinita de campos libres (39.2) y (39.4.) De acuerdo con la (39.3)

$$\dot{k}_1^2 = \dot{\chi}^2 + \dot{\Gamma}^2 \tag{39.7}$$

y, por consiguiente,

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_n = \sqrt{\dot{k}_n^2 - \chi_n^2} = \sqrt{\omega^2 \dot{\varepsilon}_1 \dot{\mu}_1 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}, \tag{39.8}$$

es decir, a cada una de las soluciones corresponde su constante de propagación $\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_n$. El campo correspondiente es, por lo tanto, una onda no homogénea independiente que se propaga con su propia velocidad de fase.

Por lo demás, para cada valor de n podemos hablar de una onda móvil mientras la frecuencia ω sea suficientemente grande, así que la expresión subradical en la (39.8) es positiva. En caso contrario, la constante de propagación se convierte en magnitud imaginaria $\dot{\Gamma} = \mp i\beta$ y, en esencia, el campo pierde su carácter ondulatorio, ya que

$$\operatorname{Re} e^{-i\dot{\Gamma}_n} e^{i\omega t} = e^{\mp \beta_n} \cos \omega t.$$

Tal campo resulta ser cofásico y amortiguado respecto a la amplitud en la dirección y o, bien, $-y$. Se denomina frecuencia *crítica* (ω_{cr}) aquella para la que la constante de propagación se reduce a cero. Es evidente que

$$\omega_{cr} = \frac{n\pi}{d} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}. \tag{39.9}$$

Luego, al disminuir la frecuencia ($\omega < \omega_{cr}$), $\dot{\Gamma}_1$ pasa a la región imaginaria. Se llama *fundamental* (*principal*) aquella de las ondas que se propaga a las más bajas frecuencias; su número de onda transversal $\chi_1 = \pi/d$ es el menor.

Comparando las (39.6) y (39.3), obtenemos

$$\cos \varphi = \frac{n\pi}{k_1 d} = \frac{1}{\omega} \frac{n\pi}{d} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{\omega_{cr}}{\omega}. \tag{39.10}$$

Como vemos, para una frecuencia ω dada, cada onda no homogénea dirigida (n es fijado) se forma al incidir una onda homogénea bajo cierto ángulo φ. Tomemos cualquier onda, por ejemplo, la principal ($n = 1$) y observemos cómo varía el ángulo φ en dependencia de la frecuencia. Mientras mayor sea ω, más próximo a cero se encontrará $\cos\varphi$ y φ a 90°. Para una frecuencia relativamente alta, el esquema de los rayos se muestra en la

fig. 39.5, *a*. Al disminuir la frecuencia, $\cos\varphi$ aumenta y el ángulo φ disminuye (fig. 39.5, *b*, *c*), hasta el momento, cuando a la frecuencia crítica no resulta ser nulo (39.5, *d*). La propagación de una onda no homogénea entre los planos es equivalente a la reflexión múltiple de una onda homogénea; a medida que se aproxima al caso de incidencia normal ($\varphi = 0$, $\omega = \omega_{cr}$), el transporte de energía a lo largo de los planos se retarda y,

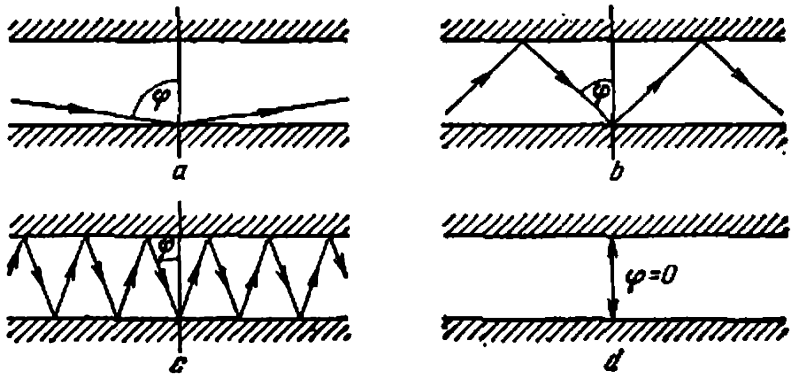


Fig. 39.5.

por fin, cesa al crearse una onda estacionaria corriente a la frecuencia crítica (véase el § 36, punto 4, resonador electromagnético). A frecuencias inferiores a la crítica corresponden ángulos imaginarios de incidencia φ ($\cos\varphi > 1$), así que el concepto de reflexión total sólo conserva un sentido formal.

En virtud del contenido de la noción de número de onda, (págs. 183, § 32, punto 2, § 35, punto 2) escribiremos para una región real $\dot{\Gamma} = \Gamma$:

$$v_f = \frac{\omega}{\Gamma}, \quad \Lambda = \frac{2\pi}{\Gamma}, \quad v_{gr} = \frac{d\omega}{d\Gamma}, \tag{39.11}$$

siendo v_f la velocidad de fase de una onda no homogénea, Λ la correspondiente longitud de onda (el período espacial a lo largo de la dirección de propagación) y v_{gr} la velocidad de grupo. Partiendo de la (39.8), obtenemos

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\chi}{k_1}\right)^2}} = \frac{v_1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2}}, \quad \Lambda = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2}},$$

$$v_{gr} = v_1\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2}, \quad \omega \geqslant \omega_{cr}. \tag{39.12}$$

Cuando $\omega \longrightarrow \omega_{cr}$, la velocidad de fase y la longitud de onda crecen infinitamente, y la velocidad de grupo tiende a cero.

Como

$$v_f > v_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}, \tag{39.13}$$

es decir, la velocidad de fase de las ondas no homogéneas consideradas supera a la velocidad de fase de una onda homogénea electromagnética *en un mismo medio, las primeras se denominan* ondas *rápidas*.

En conclusión, señalemos que la propiedad de dirigir una onda electromagnética, propia de superficies perfectamente conductoras, debe conservarse al tener éstas ciertas curvaturas. Podemos fácilmente imaginarnos el paso gradual de una superficie de separación plana a otra cilíndrica (fig. 39.6); podemos, por esta razón, esperar que guía de onda puede ser un tubo circular o de cualquier otra forma. Más adelante, (capítulo 5), el lector podrá convencerse de la justeza de tal afirmación.

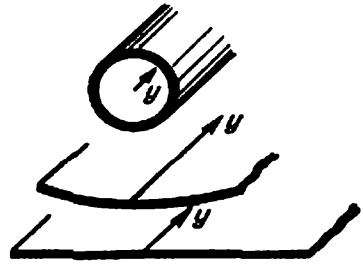


Fig. 39.6.

3. Reflexión total en un dieléctrico. Ondas guiadas superficiales. Pasemos a considerar la reflexión total que se produce para la incidencia oblicua de una *onda sobre la superficie de separación de* un medio ópticamente menos denso, lo que brevemente se ha estudiado en el § 37, punto 2. Este fenómeno tiene lugar cuando el ángulo de incidencia φ supera a una magnitud crítica φ^* que se determina mediante la fórmula (37.8), es decir,

$$\frac{k_1}{k_2} \operatorname{sen} \varphi > 1 \qquad (39.14)$$

(ambos medios son no absorbentes). En este caso, el coseno del ángulo de refracción ϑ resulta ser imaginario: en virtud de la (37.7) $\operatorname{sen} \vartheta = \frac{k_1}{k_2} \operatorname{sen} \varphi$, así que

$$\cos \vartheta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{sen} \varphi\right)^2} = \pm i \left| \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{sen} \varphi\right)^2} \right|, \qquad (39.15)$$

ya que, debido a la (39.14), la expresión subradical es negativa. Dejando a un lado, por el momento, la cuestión sobre la elección del signo en la (39.15), convezcámonos de que la reflexión total se produce realmente y, para esto, introducimos en las expresiones de los factores de reflexión $\dot{\rho}_\perp$ (38.8) y $\dot{\rho}_\parallel$ (38.17) el valor imaginario del coseno del ángulo de refracción $\cos \vartheta = \pm i |\cos \vartheta|$. Como veremos, los módulos de las dos magnitudes son iguales a la unidad:

$$|\dot{\rho}_\perp| = \frac{|W_2 \cos \varphi \mp i W_1 |\cos \vartheta||}{|W_2 \cos \varphi \pm i W_1 |\cos \vartheta||} = 1, \qquad (39.16a)$$

$$|\dot{\rho}_\parallel| = \frac{|-W_1 \cos \varphi \pm i W_2 |\cos \vartheta||}{|W_1 \cos \varphi \pm i W_2 |\cos \vartheta||} = 1. \qquad (39.16b)$$

Esto nos certifica que la reflexión es total.

Introduzcamos designaciones para las fases de los coeficientes $\dot{\rho}_\perp$ y $\dot{\rho}_\parallel$, cuando la reflexión es total, de forma que

$$\dot{\rho}_\perp = e^{i\psi_\perp} \quad \text{y} \quad \dot{\rho}_\parallel = e^{i\psi_\parallel} \quad \text{si} \quad \varphi > \varphi^*. \tag{39.17}$$

A continuación, consideremos los campos. Introduciendo $\dot{\rho}_\perp = e^{i\psi_\perp}$ en las (38.10), para polarización perpendicular, obtenemos

$$\boldsymbol{E}_m = \begin{cases} \boldsymbol{x}_0 \dot{E}_0 \cos(k_1 z \cos\varphi + \psi_\perp/2)\, e^{-i(k_1 y \operatorname{sen}\varphi - \psi_\perp/2)}, & z < 0, \\ \boldsymbol{x}_0 \dfrac{\dot{E}_0}{2} \dot{\tau}_\perp e^{-ik_2(y \operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, & z > 0. \end{cases} \tag{39.18a}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}_0 = \begin{cases} -\dfrac{\dot{E}_0}{W_1}\left[\boldsymbol{y}_0 i \cos\varphi \operatorname{sen}(k_1 z\cos\varphi + \psi_\perp/2) + \right. \\ \left. + \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen}\varphi \cos(k_1 z\cos\varphi + \psi_\perp/2)\right] e^{-i(k_1 y \operatorname{sen}\varphi - \psi_\perp/2)}, \\ z < 0, \\ \dfrac{\dot{E}_0}{2W_2} \dot{\tau}_\perp (\boldsymbol{y}_0 \cos\vartheta - \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen}\vartheta)\, e^{-ik_2(y\operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, \\ z > 0 \\ (2\dot{A} = \dot{E}_0). \end{cases} \tag{39.18b}$$

Siendo la polarización paralela, en virtud de las (38.19) y para la (39.17)

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \begin{cases} E_0 \left[\boldsymbol{y}_0 \cos\varphi \cos(k_1 z\cos\varphi + \psi_\parallel/2) + \right. \\ \left. + \boldsymbol{z}_0 i \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(k_1 z\cos\varphi + \right. \\ \left. + \psi_\parallel/2)\right] e^{-i(k_1 y \operatorname{sen}\varphi - \psi_\parallel/2)}, \quad z < 0, \\ \dfrac{\dot{E}_0}{2} \dot{\tau}_\parallel (\boldsymbol{y}_0 \cos\vartheta - \boldsymbol{z}_0 \operatorname{sen}\vartheta)\, e^{-ik_2(y\operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, \\ z > 0, \end{cases} \tag{39.19a}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m = \begin{cases} \boldsymbol{x}_0 i \dfrac{\dot{E}_0}{W_1} \operatorname{sen}(k_1 z\cos\varphi + \psi_\parallel/2)\, e^{-i(k_1 y - \psi_\parallel/2)}, & z < 0, \\ -\boldsymbol{x}_0 \dfrac{\dot{E}_0}{2W_2} \dot{\tau}_\parallel e^{-ik_2(y\operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}, & z > 0 \\ (\dot{E}_0 = 2\dot{A}). \end{cases} \tag{39.19b}$$

Como muestran las fórmulas deducidas, el campo del primer medio es una onda plana no homogénea muy parecida a la onda dirigida por un plano perfectamente conductor. Es también una onda que se mueve a lo largo de la superficie de separación (eje y), cuyo campo está distribuido en dirección transversal (eje z) según la ley de una onda estacionaria y que tiene una componente longitudinal eléctrica o magnética; los respectivos números de onda son

$$\Gamma = k_1 \operatorname{sen}\varphi, \quad \chi_1 = k_1 \cos\varphi \tag{39.20}$$

(compárense con las 39.3). Naturalmente, en este caso puede ser empleado el diagrama vectorial de la fig. (39.1). La diferencia al compararlo con lo anterior, consiste en que la onda estacionaria está en cierto grado desplazada por el eje z, y también hay desfasaje; tanto lo uno como lo otro, se determina por la fase del factor de reflexión.

Puede parecer asombroso el hecho de que, a pesar de la reflexión total, en el segundo medio también existe un campo, como se desprende de las (39.18) y (39.19). Sin embargo, no debemos olvidar que tratamos un proceso estacionario y la cuestión de "cómo penetró el campo en el segundo medio" es ilícita (este problema se refiere al establecimiento del campo); a causa de las condiciones límites la existencia del campo en el segundo medio es necesaria. Consideremos con mayor atención dicho campo. De las fórmulas (39.18) y (39.19) se desprende que al haber polarización perpendicular y polarización paralela todas sus componentes varían en el espacio según la ley $f^+(y, z) = e^{-ik_2(y \operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}$. Al mismo tiempo, debido a que el $\cos\vartheta$ es imaginario, el factor $e^{-ik(y\operatorname{sen}\vartheta + z\cos\vartheta)}$ es un exponente decreciente o creciente. Por consideraciones físicas debemos tomar la primera posibil dad, lo que corresponde a la elección del signo menos en la fórmula (39.15). Teniendo también en cuenta que $k_2 \operatorname{sen}\vartheta = k_1 \operatorname{sen}\varphi = \Gamma$ y designando

$$\dot{\chi}_2 = k_2 \cos\vartheta = -ik_2 |\cos\vartheta| = -i\left|\sqrt{k_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi - k_2^2}\right| = -i\beta, \quad (39.21)$$

tenemos

$$f^+(y, z) = e^{-\beta z} e^{-i\Gamma y}, \quad \beta > 0. \quad (39.22)$$

Simultáneamente, para poder efectuar la comparación con las igualdades (39.20), escribimos:

$$\Gamma = k_2 \operatorname{sen}\vartheta, \quad \dot{\chi}_2 = k_2 \cos\vartheta. \quad (39.23)$$

Así, en el segundo medio (ópticamente menos denso) el campo decrece exponencialmente por la normal desde la superficie de separación, sin variar su fase en esta dirección. Por dicha razón, la onda plana no homogénea en este caso se denomina *superficial*. Cuanto mayor sea β, tanto el campo en el segundo medio estará en mayor grado ubicado cerca de la superficie de separación de los medios. Cuando la reflexión total se produce sobre una superficie de separación con un medio menos denso, en esta última no se crea una onda refractada que se lleva la energía de la superficie de separación y, al parecer, el campo se "pega" a ella.

Como $\Gamma = k_1 \operatorname{sen}\varphi$, entonces $\Gamma \leqslant k_1$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 90°$ y $\operatorname{sen}\varphi \leqslant 1)$; al mismo tiempo, de acuerdo con la (39.14), $\Gamma \geqslant k_2$. De esta manera,

$$k_1 \geqslant \Gamma \geqslant k_2. \quad (39.24)$$

Esto significa que la velocidad de fase de una onda no homogénea $v_f = \omega/\Gamma$ se encuentra obligatoriamente en los límites deter-

minados por la igualdad

$$v_1 \leqslant v_f \leqslant v_2, \tag{39.25}$$

siendo $v_1 = 1/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ y $v_2 = 1/\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ las velocidades de fase de las ondas homogéneas en ambos medios. Podemos decir, que respecto al medio más denso la onda homogénea se denomina *rápida* y respecto al menos denso, *lenta*. En la mayoría de los casos que nos ofrecen un interés práctico, el medio menos denso es el aire o el vacío. No prestando atención al campo en el dieléctrico adyacente, corrientemente se habla de una *onda lenta superficial*.

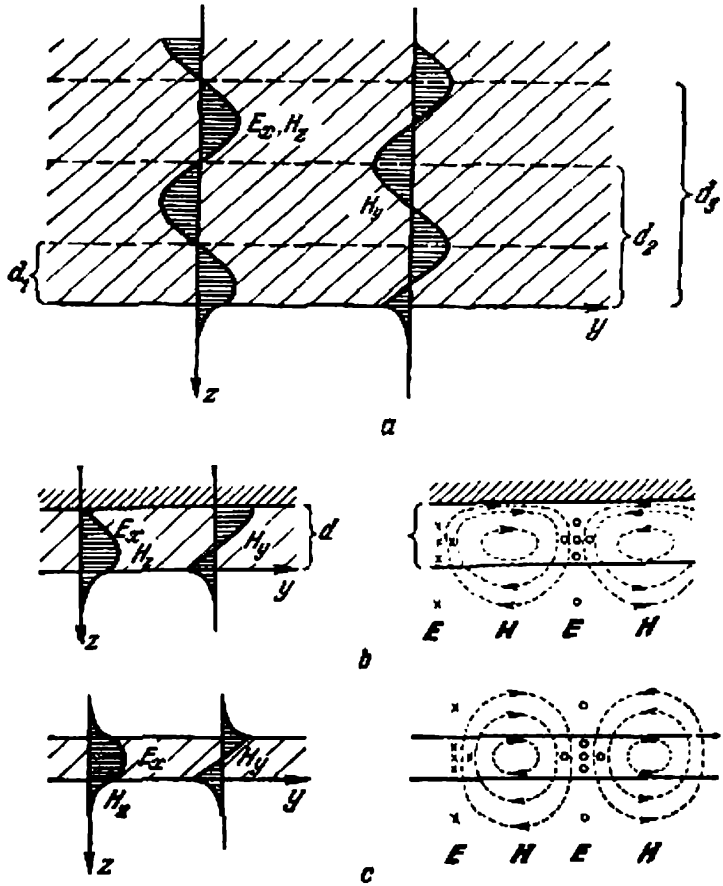


Fig. 39.7.

4. Guía de ondas dieléctrica más sencilla. En la fig. 39.7, *a* se muestra la distribución del campo en el sentido de la normal a una superficie de separación de dieléctricos, en la que con polarización perpendicular se produce reflexión total. Por las líneas de trazos se designan los planos en los que el campo satisface las condiciones límites propias de un conductor ideal. De las (39.18) y (39.19) se desprende que, en general, tales planos se disponen

desde la superficie de separación de los medios a distancias d_n, subordinadas a la condición

$$\chi_1 d_n + \frac{\psi}{2} = n\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots), \tag{39.26}$$

donde $\chi_1 = k_1 \cos\varphi$ y $\psi = \psi_\perp$ o bien $\psi = \psi_\parallel$ se toma en los límites desde $-\pi$ hasta π.

Aislando una capa dieléctrica por un plano idealmente conductor $z = -d_n$ (véase la fig. 39.7, *b*, donde se había tomado $z = -d_1$), podemos considerar independientemente la primera como un sistema que dirige una onda homogénea. El grosor de la capa puede ser escogido de tal modo que ésta sea capaz de dirigir la onda sin el plano idealmente conductor, sino sólo como resultado de la reflexión total sobre las dos superficies de separación con el dieléctrico menos denso (fig. 39.7, *c*). Este es el prototipo de la *guía de ondas dieléctrica* utilizada en la técnica y que es un vástago fabricado de un material dieléctrico. En las figs. 39.7, *b*, *c* se dan también las gráficas de las líneas de fuerza para las ondas más sencillas de la capa dieléctrica para polarización perpendicular; recomendamos que el lector confeccione esquemas análogos para el caso de polarización paralela.

A la propagación de la energía en la capa dieléctrica, lo mismo que entre los planos idealmente conductores (compárese con la fig. 39.5), responde la gráfica de los rayos reflejados múltiples veces (fig. 39.8, *a*, *b*). Sin embargo, ahora el ángulo de incidencia φ

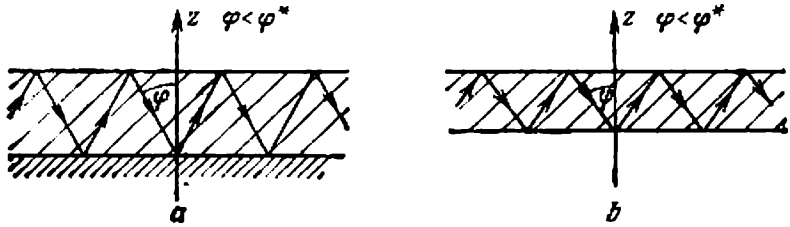


Fig. 39.8.

puede variar no desde cero hasta un ángulo recto, sino sólo en los límites $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi^*$. Cuando $\varphi > \varphi^*$, la condición de la reflexión total en la superficie de separación de los dieléctricos no se satisface y la capa cesa de concentrar el campo. Efectivamente, cuando $\varphi = \varphi^*$ tiene lugar el proceso que se muestra en la fig. 39.9, *a*, *b*, *c*. En el medio exterior aparece una onda refractada que se propaga a lo largo de la superficie de separación $\left(\frac{k_1}{k_2}\operatorname{sen}\varphi = 1,\ \vartheta = 90^\circ\right)$; el campo ubicado fuera de la capa dieléctrica no decrece por la normal (en la (39.22) $\beta = 0$, $\Gamma = k_2$); esto resulta ser una onda homogénea corriente; su energía está distribuida uniformemente por el espacio infinito; en la propia capa sólo queda una parte de energía infinitamente pequeña.

Para la capa de grosor fijado d la condición $\varphi = \varphi^*$ se cumple para un valor de la frecuencia ω estrictamente determinado que se denomina frecuencia *crítica* (ω_{cr}); es natural que para cada una de las posibles estructuras del campo, ω_{cr} tiene su magnitud. Si deseamos calcular ω_{cr} para el caso de la capa ubicada en un plano

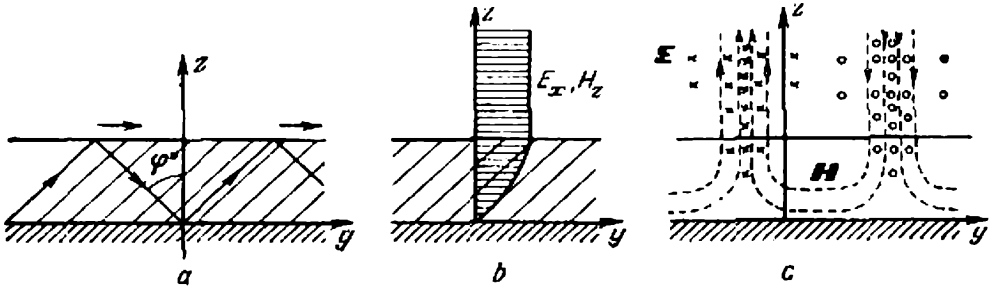


Fig. 39.9.

idealmente conductor notemos primeramente que, en virtud de las (39.20) y (39.23),

$$k_1^2 = \chi_1^2 + \Gamma^2 \quad \text{y} \quad k_2^2 = \chi_2^2 + \Gamma^2. \tag{39.27}$$

De aquí

$$\chi_1^2 - \chi_2^2 = k_1^2 - k_2^2, \tag{39.28}$$

de forma que para $\varphi = \varphi^*$ ($\vartheta = 90°$, $\chi_2 = k_2 \cos \vartheta = 0$)

$$\chi_1^2 = k_1^2 - k_2^2 \quad (\omega = \omega_{cr}). \tag{39.29}$$

Para el caso de polarización perpendicular, poniendo en la (38.8) $\vartheta = 90°$, hallamos que si $\omega = \omega_{cr}$ el coeficiente de reflexión $\dot{\rho}_\perp$ es igual a la unidad, es decir, $\psi_\perp = 0$. Por esta razón, en virtud de la (39.26),

$$\chi_1 d = n \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots; \omega = \omega_{cr}). \tag{39.30}$$

Introduciendo a la (39.29) el valor de $\chi_1 = \chi_{1p}$ que hallamos de la anterior igualdad, tenemos

$$\left(n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{d}\right)^2 = \omega_{cr}^2 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)$$

(recordemos que el grosor d de la capa está fijado); diferentes valores de n corresponden a diferentes tipos de campos en la capa. De esta manera

$$\omega_{cr} = \frac{n\pi}{2d} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots). \tag{39.31}$$

Y por fin, haremos una observación del mismo tipo que al final del punto 2. La propiedad de la superficie de separación de los dieléctricos de dirigir la energía electromagnética, debe conser-

varse cuando ella toma curvatura cilíndrica (fig. 39.10). La guía de ondas en forma de vástago dieléctrico anteriormente indicado, se estudiará en el capítulo 5.

5. Paso total en el caso de incidencia oblicua. En conclusión, pasemos a aclarar las condiciones con las que una onda que incide bajo cierto ángulo no sufre reflexión en la superficie de separación de los medios (paso total). Eliminando de la (38.8), cuando no hay absorción, el cos ϑ mediante la segunda ley de Snell (37.7) e igualando a cero $\rho_\perp$, tenemos

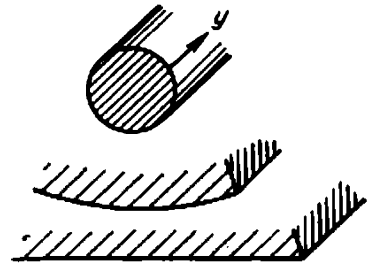


Fig. 39.10.

$$\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 = \frac{k_2^2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{k_2^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)},$$

de donde hallamos la siguiente condición del paso total a la polarización perpendicular:

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}. \qquad (39.32)$$

La onda que incide bajo un ángulo φ determinado por esta fórmula, no se refleja. Sin embargo, como vemos, tal ángulo no siempre existe; por ejemplo, en el caso de dieléctricos no magnéticos corrientes ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$).

Del mismo modo, a la polarización paralela, partiendo de las (38.17), hallamos

$$\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 = \frac{k_2^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)}{k_2^2 - k_1^2 \operatorname{sen} \varphi}$$

y, seguidamente,

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \qquad (39.33)$$

Para los dieléctricos corrientes ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$)

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{1}{\varepsilon_1/\varepsilon_2 + 1} \qquad (39.34)$$

y

$$\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}. \qquad (39.35)$$

El ángulo φ hallado se denomina *ángulo de Brewster*. La onda polarizada paralelamente que incide bajo el ángulo de Brewster sobre la superficie de separación de medios dieléctricos no absorbentes, pasa sin reflexión.

§ 40. Efecto pelicular y absorción en conductores

1. Esencia del efecto pelicular (efecto de carga superficial, efecto Kelvin). En el § 37, puntos 2, 3 fue establecido que durante la incidencia de una onda sobre la superficie de separación con un medio de refracción mucho más denso, la onda, independientemente del ángulo de incidencia, se propaga casi por la dirección de la normal interior a la superficie de separación de los medios. De este modo, la superposición arbitraria de las ondas que inciden bajo diferentes ángulos, proporcionará en un medio adyacente suficientemente denso un campo que será el conjunto de dichas ondas refractadas. Teniendo en cuenta esta circunstancia no es difícil llegar a la conclusión general sobre el carácter de los campos electromagnéticos en las superficies de separación con medios muy densos. La cuestión consiste en que podemos considerar el campo como la superposición de diversas ondas incidentes y de las ondas reflejadas que a ellas corresponden (aquí no vamos a detenernos a realizar una demostración de lo dicho). Por lo tanto, en el medio adyacente muy denso, el campo se representa como la superposición de las ondas refractadas $\dot{\boldsymbol{E}}_i$, $\dot{\boldsymbol{H}}_i$, para las cuales, con alta precisión, es justa la correlación:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{mi} = \dot{W}_i [\dot{\boldsymbol{H}}_{mi}, \boldsymbol{z}_0], \tag{40.1}$$

siendo $\boldsymbol{z}_0$ el vector unitario de la normal interior (compárese con la (32.16)). De la misma manera, podemos escribir esta correlación para el campo completo en el medio denso $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \dot{W}_i [\dot{\boldsymbol{H}}_m, \boldsymbol{z}_0], \tag{40.1a}$$

ya que $\dot{\boldsymbol{E}}_m = \sum_i \dot{\boldsymbol{E}}_{mi}$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m = \sum_i \dot{\boldsymbol{H}}_{mi}$.

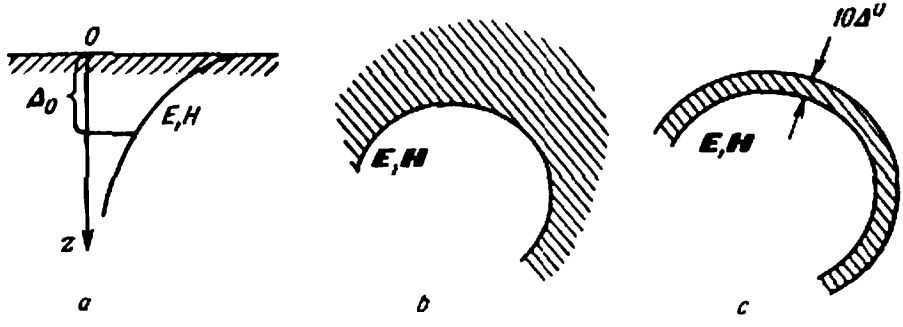


Fig. 40.1.

Particular interés representa el caso, cuando el segundo medio (ópticamente denso) es absorbente. Todas las ondas refractadas y, por consiguiente, su superposición $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ se amortiguan (fig. 40.1, *a*) así que a cierta profundidad el campo resulta ser infinitamente

pequeño. La distancia desde la superficie de separación de los medios a la que el campo se debilita $e = 2{,}718\ldots$ veces, se denomina convencionalmente *profundidad de penetración*; la vamos a designar por Δ^0. Ya que la ley de atenuación (véase los §§ 33 y 37, punto 3) tiene la forma de la función $e^{-k_2'' z}$, la profundidad de penetración, definida por la condición

$$e^{-k_2'' \Delta^0} = e^{-1},$$

es igual a la magnitud inversa del coeficiente de atenuación k_2''

$$\Delta^0 = 1/k_2''. \tag{40.2}$$

En un medio conductor el amortiguamiento es considerablemente elevado. En virtud de las (33.17a) y (37.22), para un conductor

$$\Delta^0 = \sqrt{2/\omega\mu\sigma} \quad (\mu = \mu_a,\ \sigma = \sigma_a). \tag{40.3}$$

Así, para ciertos metales extensamente difundidos se tienen los datos que se dan en la tabla 40.1.

Tabla 40.1

Profundidad de penetración

Metal	Profundidad de penetración Δ^0, mm (frecuencia f, Hz)
Plata	$64{,}2/\sqrt{f}$
Cobre	$66{,}0/\sqrt{f}$
Aluminio	$82{,}6/\sqrt{f}$
Latón	$127{,}0/\sqrt{f}$

Por ejemplo, si una frecuencia $f = 100$ KHz la profundidad de penetración para el cobre es igual a $\Delta^0 \approx 0{,}2$ mm, mientras que si $f = 10^4$ MHz, sólo, $6{,}6 \cdot 10^{-4}$ mm, es decir, menos de un micrón. Prácticamente, el campo resulta ser despreciablemente débil a distancias de varios Δ^0; a una profundidad de $10\Delta^0$ se debilita a $e^{10} \approx 22\,026$ veces. Si el tamaño del cuerpo conductor supera considerablemente a Δ^0, se puede, generalmente, considerar que el campo está concentrado cerca de la superficie. Esto es lo que se denomina *efecto pelicular*.

2. Condiciones límites de Leontóvich y absorción en un conductor. Al tener lugar el efecto pelicular, las capas profundas del conductor no influyen, en esencia, en el proceso electromagnético cerca de su superficie de separación. La onda que penetra al interior se atenúa tan rápidamente que no alcanza a llegar hasta la opuesta superficie de separación en la que podría reflejarse. Por esto, es indiferente si el campo electromagnético está limitado en el dieléctrico por un

medio metálico infinito (fig. 40.1, *b*) o por una capa de un grosor igual a $10 \div 20\,\Delta^e$ (fig. 40.1, *c*).

Surge la necesidad de la deducción de que al definir el campo en un medio dieléctrico limitado por un conductor, el proceso que transcurre en este último puede tenerse en cuenta mediante la condición límite que se desprende de la correlación (40.1a). Esto sucede a causa de que los vectores del campo $\dot{E}$ y $\dot{H}$ dentro del conductor, siendo paralelos a la superficie de separación plana, continuamente se convierten en la propia superficie de separación en

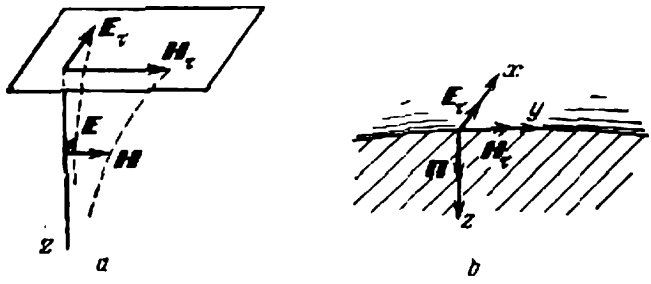


Fig. 40.2.

componentes tangenciales $\dot{E}_\tau$ y $\dot{H}_\tau$ (fig. 40.2, *a*). Suponiendo que con $z = 0$ en la (40.1a)

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m\tau} \text{ y } \dot{H}_m = \dot{H}_{m\tau},$$

se obtiene una correlación que enlaza en la superficie de separación las componentes tangenciales:

$$\dot{E}_{m\tau} = \dot{W}_2 [\dot{H}_{m\tau}, z_0] = \dot{W}_2 [\nu_0, \dot{H}_{m\tau}] \qquad (40.4)$$

(ν_0 es el versor de la normal exterior), o bien en forma de coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{mx} &= \dot{W}_2 \dot{H}_{my}, \\ \dot{E}_{my} &= -\dot{W}_2 \dot{H}_{mx}. \end{aligned}\right\} \qquad (40.4a)$$

Aquí, en virtud de las (33.19) y (40.3),

$$\dot{W}_2 = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1+i}{\sigma\Delta^e} \qquad (\mu = \mu_2,\ \sigma = \sigma_2). \qquad (40.5)$$

Las igualdades (40.4), (40.4a) son conocidas bajo la denominación de *condiciones límites de Leontóvich*. Ya que su procedencia está relacionada con el análisis de la refracción en la superficie de separación plana de dos medios, para las superficies arbitrarias pueden aplicarse sólo en aquellos casos, cuando la curvatura es relativamente pequeña; condición de esto es la igualdad

$$R \gg \Delta^e, \qquad (40.6)$$

siendo R el radio de curvatura. Es natural que si no se satisface la anterior igualdad, la magnitud Δ^e, calculada por medio de la

fórmula (40.3), pierde, a su vez, el sentido de profundidad de penetración.

Para un conductor ideal ($\sigma \to \infty$) la condición límite de Leontóvich (40.4) se convierte en la ya conocida condición límite

$$E_\tau = 0. \tag{40.7}$$

Ya que la conductibilidad eléctrica de los metales es muy elevada, la componente tangencial eléctrica resulta ser extremadamente pequeña y, con frecuencia, suele despreciarse, empleando la condición límite idealizada (40.7). Sin embargo, esto no puede hacerse cuando es preciso tomar en consideración la absorción de energía por el metal. A pesar de que dicha absorción es muy pequeña, en una serie de casos, es la causa de pérdidas de la energía y por tal razón no puede ser despreciada. Si se toma $E_\tau = 0$, entonces la componente del vector de Poynting dirigida al interior del conductor desaparece.

Aplicando las fórmulas (30.6) y (40.4), expresemos la magnitud $\dot{\Pi}_z$ en la superficie del conductor por $\dot{H}_{m\tau}$. Disponiendo el sistema local de coordenadas de manera que el vector E_τ esté dirigido por el eje x y H_τ, por el eje y (fig. 40.2, *b*), se tiene

$$\dot{\Pi}_z = \frac{1}{2}\left[x_0(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}\dot{H}_{m\tau},\ y_0\dot{H}_{m\tau}\right]_z.$$

De este modo, la componente del vector complejo de Poynting dirigida al interior del conductor es igual a

$$\dot{\Pi}_z = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}H^2_{m\tau} = \frac{1+i}{2\sigma\Delta^0}H^2_{m\tau}. \tag{40.8}$$

La integración de esta magnitud por la superficie completa S del cuerpo conductor, o sea, el cálculo del flujo del vector complejo de Poynting dirigido al interior del conductor, nos da la potencia compleja

$$\dot{P} = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}\int_S H^2_{m\tau}\,ds = \frac{1+i}{2\sigma\Delta^0}\int_S H^2_{m\tau}\,ds. \tag{40.9}$$

Las partes reales de las (40.8) y (40.9) representan el valor medio de Π_z y, correspondientemente, la potencia media de pérdidas. Esta última se expresa por la fórmula

$$\overline{P}_p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}\int_S H^2_{m\tau}\,ds = \frac{1}{2\sigma\Delta^0}\int_S H^2_{m\tau}\,ds. \tag{40.10}$$

Está claro que en el caso de un conductor ideal ($\sigma \to \infty$) no habrá pérdidas.

Señalemos que, habitualmente, $H_{m\tau}$ no se diferencia prácticamente de $H_{m\tau}|_{\sigma\to\infty}$, amplitud de H_m en la superficie del conductor, hallada para $\sigma \to \infty$, es decir, con la condición límite (40.7).

Tal hecho nos permite partir de la solución de un problema idealizado al calcular la potencia de pérdidas.

Por ejemplo, sea supuesto, que sobre una lámina metálica incide normalmente una onda plana homogénea (la lámina es suficientemente grande y podemos despreciar las particularidades del proceso en sus extremos). En virtud de las (36.17) y (36.1), en la superficie del metal $H_{m\tau}|_{\sigma\to\infty} = 2H_m^0$. Calculando según la fórmula (40.8) $\overline{\Pi} = \operatorname{Re}\dot{\Pi}_z$, se halla

$$\overline{\Pi} = 2\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(H_m^0)^2 = \frac{2}{\sigma\Delta_0}(H_m^0)^2. \qquad (40.11)$$

Este mismo resultado, pero partiendo de otras consideraciones, fue obtenido en el § 36, punto 5, donde se mostró que su presición es muy elevada.

3. Corriente y resistencia superficial. A continuación vamos a examinar la corriente en un conductor. En virtud de la ley de Ohm

$$j = \sigma E$$

la función $j(z)$ tiene el mismo aspecto que $E(z)$, es decir, que la corriente decrece al profundizarse en el conductor según la ley de $e^{-k''z}$, lo mismo que el campo. Por esta razón, Δ^0 también se denomina profundidad de penetración de la corriente.

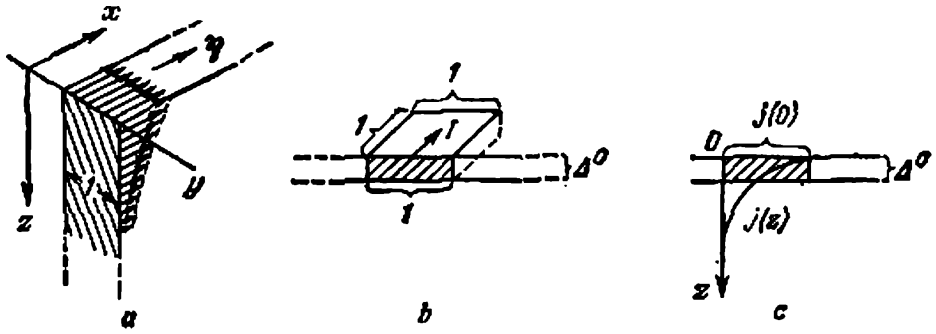


Fig. 40.3.

Como la corriente se dispone cerca de la superficie del conductor, dicha corriente puede ser denominada, convencionalmente, superficial (§ 7, punto 4); al mismo tiempo, la densidad $\hat{\eta}$ de dicha corriente se calcula integrando la magnitud j respecto a la normal interior z. De este modo,

$$\hat{\eta}_m = \int_0^\infty j_m\, dz. \qquad (40.12)$$

Por lo visto, $\hat{\eta}$ es, en esencia, la corriente que pasa por una capa de grosor unitario y de infinita profundidad (fig. 40.3, *a*). Cuando $\sigma \to \infty$, la magnitud $\hat{\eta}$ se convierte en la densidad de corriente superficial verdadera.

Empleando la ley de Ohm y la correlación (40.1a), se escribe:

$$\hat{\eta}_m = \sigma \dot{W}_s \int_0^\infty [\dot{H}_m, z_0]\, dz = \frac{1+i}{\Delta^0} \int_0^\infty [\dot{H}_m, z_0]\, dz, \qquad (40.13)$$

pero como, en virtud de las (33.17) y (40.3),

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{m\tau} e^{-ikz} = \dot{H}_{m\tau} e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} z} = \dot{H}_{m\tau} e^{-\frac{1+i}{\Delta^0} z},$$

entonces,

$$\int_0^\infty \dot{H}_m\, dz = \dot{H}_{m\tau} \int_0^\infty e^{-\frac{1+i}{\Delta^0} z} dz = \frac{\Delta^0}{1+i} \dot{H}_{m\tau}.$$

Introduciendo esta fórmula en la (40.13), se halla

$$\hat{\eta}_m = [\dot{H}_{m\tau}, z_0] = [\nu_0, \dot{H}_m]\,|_S \qquad (40.14)$$

donde $\nu_0 = -z_0$. Es curioso que este resultado coincide por su forma con la ya conocida correlación (8.5b), justa para un conductor ideal: la densidad de la corriente "convencionalmente superficial" que hemos introducido está relacionada con el campo magnético en la superficie de separación de la misma forma que la densidad η de corriente superficial verdadera.

Al tener lugar el efecto Kelvin pelicular, el conductor puede ser caracterizado por la llamada *resistencia superficial* $\dot{z}_S = \mathcal{R}_S + i\mathcal{X}_S$ que se define como la relación entre las amplitudes complejas de la intensidad del campo eléctrico en la superficie y la densidad de la corriente superficial:

$$\dot{z}_S = \dot{E}_{m\tau} / \hat{\eta}_m, \qquad (40.15)$$

además, en virtud de las (40.4) y (40.14), y teniendo en cuenta (40.5), se desprende que

$$\dot{z}_S = \dot{W}_s = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1+i}{\sigma\Delta^0}, \qquad (40.16)$$

es decir,

$$\mathcal{R}_S = \frac{1}{\sigma\Delta^0} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}_S = \frac{1}{\sigma\Delta^0}. \qquad (40.16a)$$

La parte activa de la resistencia $\mathcal{R}_S$ resulta ser igual a la resistencia del paralelepípedo representado en la fig. 40.3, *b*. Esto significa que la resistencia óhmica del conductor es tal, como si la corriente, sin disminuir su amplitud, penetra a una profundidad Δ^0 (fig. 40.3, *c*). Este hecho nos aclara el sentido de la expresión "profundidad de penetración de corriente".

Tomemos un conductor cilíndrico de sección transversal arbitraria (fig. 40.4, *a*, *b*), para el cual se satisface la condición

$$R_{min} \gg \Delta^0 = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}, \qquad (40.17)$$

siendo R_{min} el radio mínimo de la curvatura del contorno de la sección transversal. Podemos esperar que en tal caso la superficie de separación del conductor se aproximará en suficiente grado a la plana y será observado el efecto Kelvin. Entonces, la corriente total que pasa a lo largo del cilindro se hallará por medio de la densidad $\dot{\eta}$ (compárese con la (40.12)), como la integral

$$\dot{I}_m = \oint_L \dot{\eta}_m \, dl. \qquad (40.18)$$

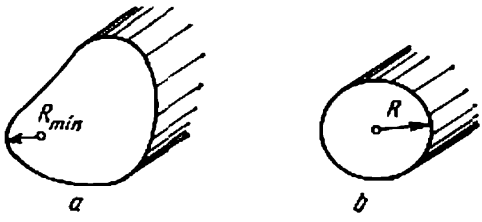


Fig. 40.4.

Si $\dot{\eta}_m = \text{const}$, se tiene: $\dot{I}_m = \dot{\eta}_m L$. Si es posible interpretar $\dot{E}_{m\tau}$ como la tensión reducida a la unidad de longitud ($\dot{E}_{m\tau} = \dot{U}'_m$), podemos también hablar de la resistencia de un segmento unitario del conductor $\mathfrak{Z}' = \dot{U}'_m / \dot{I}_m$, siendo, en virtud de lo anterior, $\mathfrak{Z}' = \dot{E}_m / \dot{\eta}_m L$. Ahora, hagamos uso de las correlaciones (40.15) y (40.16) que son tanto más válidas, como igualdades aproximadas, en el caso dado, cuanto en mayor grado se satisfaga la desigualdad (40.17). Expresando $\mathfrak{Z}'$ en forma de $\mathfrak{Z}_S / L$, se obtiene

$$\mathfrak{Z}' \approx \frac{1+i}{\sigma \Delta^0 L} \qquad (40.19)$$

y, en particular, para un conductor de sección redonda con el radio R

$$\mathfrak{Z}' \approx \frac{1+i}{2\pi R \sigma \Delta^0}. \qquad (40.20)$$

Estas fórmulas son de antemano incorrectas, cuando no se observa la desigualdad (40.17) que puede ser denominada "condición del efecto Kelvin fuerte". Más adelante (§ 68, punto 1), el efecto Kelvin será considerado sin limitaciones.

4. Efecto pelicular en una capa conductora. Resolvamos de forma rigurosa el problema sobre el efecto pelicular en una capa plana (fig.40.5, *a*) por cuyos ambos lados la densidad de corriente tiene igual valor que no varía por el plano xOy.

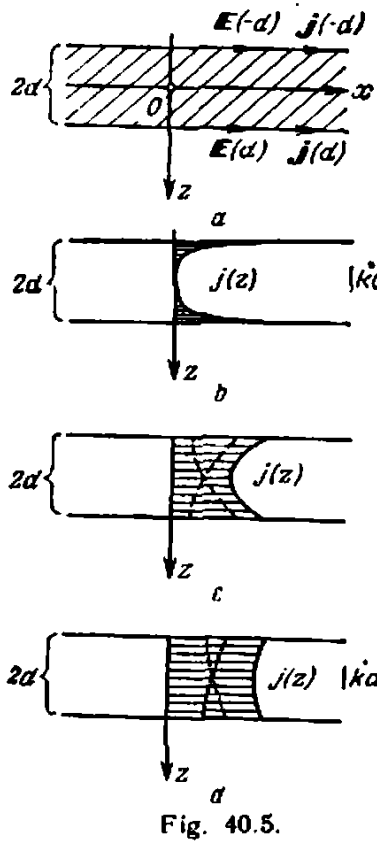


Fig. 40.5.

A base de la (32.2) representemos la amplitud compleja de la intensidad del campo eléctrico en la capa mediante la expresión

$$\dot{E}_m = \boldsymbol{x}_0 (\dot{A} e^{-ikz} + \dot{B} e^{ikz}) \qquad (40.21)$$

(el campo es unidimensional), pero de acuerdo con la condición inicial

$$\dot{E}_m(d) = \dot{E}_m(-d) = \dot{E}_{m\tau}. \tag{40.22}$$

De aquí

$$\dot{A}e^{-i\dot{k}a} + \dot{B}e^{i\dot{k}d} = \dot{A}e^{i\dot{k}d} + \dot{B}e^{-i\dot{k}a},$$

es decir,

$$\dot{A} = \dot{B}, \quad \dot{E}_m = \dot{A}(e^{-i\dot{k}z} + e^{i\dot{k}z}) = 2\dot{A}\cos\dot{k}z,$$
$$2\dot{A}\cos\dot{k}d = \dot{E}_{m\tau}$$

y definitivamente

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m\tau}\frac{e^{-i\dot{k}z} + e^{i\dot{k}z}}{2\cos\dot{k}d} = \dot{E}_{m\tau}\frac{\cos\dot{k}z}{\cos\dot{k}d}. \tag{40.23}$$

Como al mismo tiempo, según la ley de Ohm,

$$\dot{j}_m = \sigma\dot{E}_{m\tau}\frac{e^{-i\dot{k}z} + e^{i\dot{k}z}}{2\cos\dot{k}d} = \sigma\dot{E}_{m\tau}\frac{\cos\dot{k}z}{\cos\dot{k}d}, \tag{40.24}$$

entonces, es fácil calcular la densidad de corriente superficial convencional por la fórmula:

$$\dot{\eta}_m = \int_{-d}^{d}\dot{j}_m\,dz = \frac{2\sigma\dot{E}_{m\tau}}{\dot{k}}\operatorname{tg}\dot{k}d \tag{40.25}$$

y la resistencia de cada capa, reducida a la unidad de superficie, es igual a

$$\dot{Z}'' = \frac{\dot{E}_{m\tau}}{\dot{\eta}_m} = \frac{\dot{k}}{2\sigma}\operatorname{ctg}\dot{k}d \qquad \left(\dot{k} = \frac{1-i}{\lambda^0}\right). \tag{40.26}$$

En la fig. 40.5, *b*, *c*, *d* se muestran distribuciones de la corriente en la capa, para distintos grados de manifestación del efecto Kelvin, obtenidos en virtud de la (40.24); por las líneas de trazos se representan las curvas que corresponden a los sumandos en forma de las ondas atenuadas que se desplazan al encuentro. Con $|\dot{k}d| \gg 1$ se observa un fuerte efecto Kelvin (fig. 40.5, *b*); las ondas que se propagan desde los extremos se atenúan rápidamente y en la parte media de la capa, el campo y la corriente son despreciablemente pequeños. Como, además, $\operatorname{ctg}\dot{k}d \approx i$, la expresión (40.26) toma el aspecto

$$\dot{Z}'' \approx \frac{1+i}{2\sigma\lambda^0}, \quad |\dot{k}d| \gg 1; \tag{40.26a}$$

este resultado podría ser obtenido mediante la fórmula (40.19). Si $|\dot{k}d| \ll 1$, el efecto Kelvin será débil (fig. 40.5, *d*): en la parte media de la capa sólo hay un pequeño decrecimiento del campo y

la corriente. Suponiendo en este caso que $\operatorname{tg} \dot{k}d \approx \dot{k}d$, se tiene

$$\dot{z}'' \approx \frac{1}{2\sigma d}, \quad |\dot{k}d| \ll 1; \tag{40.26b}$$

esto es la resistencia a la corriente continua.

5. **Presión sobre el conductor.** Según la (6.4), en el interior del conductor actúa una fuerza que, al ser reducida a la unidad de su superficie para fuerte efecto Kelvin, es igual a

$$\boldsymbol{p} = \int_0^\infty \boldsymbol{f} dz = \int_0^\infty [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B}] dz \tag{40.27}$$

(compárese con la definición de $\hat{\eta}$ mediante $\boldsymbol{f}$, en virtud de la (40.12)). En esencia, ésta resulta ser la presión que actúa sobre el conductor. En el caso de un campo que oscila armónicamente, de acuerdo con el (S3.15), se puede expresar la presión media:

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^\infty [\dot{\boldsymbol{j}}_m, \dot{\boldsymbol{B}}_m^*] dz = \frac{\sigma\mu}{2} \operatorname{Re} \int_0^\infty [\dot{\boldsymbol{E}}_m, \dot{\boldsymbol{H}}_m^*] dz. \tag{40.27a}$$

Haciendo uso de las correlaciones (40.1a) y (40.16), se halla

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \frac{\sigma\mu}{2} \operatorname{Re} \dot{W} \int_0^\infty [[\dot{\boldsymbol{H}}_m, \boldsymbol{z}_0], \dot{\boldsymbol{H}}_m^*] dz = \boldsymbol{z}_0 \frac{\sigma\mu\mathcal{R}s}{2} \int_0^\infty H_m^2 dz =$$

$$= \boldsymbol{z}_0 \frac{\mu}{2\Delta^0} \int_0^\infty H_{m\tau}^2 e^{-\frac{2}{\Delta^0} z} dz = \boldsymbol{z}_0 \mu \frac{H_{m\tau}^2}{4}. \tag{40.28}$$

Sea que sobre una superficie conductora incide normalmente una onda. Suponiendo en este caso que $H_{m\tau} = 2H_m^0$ (§ 36, punto 5), se tiene

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{z}_0 \mu H_m^{0^2} = \boldsymbol{z}_0 2\bar{w}, \tag{40.29}$$

donde $\bar{w}$ es la densidad media de la energía de onda incidente (§ 32, punto 4).

Como sabemos, en el año 1901 P. N. Lébedev demostró por primera vez de modo experimental la existencia de la presión de la luz, lo que jugó un importante papel en la fundamentación de la teoría del electromagnetismo.

IV. Ondas de radio en condiciones naturales

Entendemos por *ondas de radio*, ondas electromagnéticas que se utilizan en radiotecnia; en particular, a éstas pertenecen las ondas en diferentes aparatos radiotécnicos, por ejemplo, las que se propagan por guías de ondas especiales. Las ondas electromagnéticas de este tipo serán estudiadas más adelante (capítulo 5). Pero inde-

pendientemente del carácter de los aparatos que se emplean, la esencia de la radiotecnia está relacionada con la propagación de ondas en *condiciones naturales*. Basándonos en lo ya expuesto sobre los procesos electromagnéticos ondulatorios, ahora podemos examinar ciertas particularidades generales de estas ondas de radio.

Las ondas de radio se excitan por las antenas transmisoras y se propagan relativamente cerca de la Tierra; es una exclusión la radiocomunicación cósmica lejana. De esa manera, un factor esencial es la existencia de una superficie de separación esférica de dos medios: la Tierra y el espacio cerca de ella. A veces, dicha superficie de separación puede ser considerada como un plano; en tal caso, pueden ser empleados los conocimientos sobre los procesos ondulatorios al haber superficies de separación planas, reflexión y refracción. Es sumamente importante que, a su vez, el espacio cerca de la Tierra no es homogéneo. Las capas con elevada ionización de la atmósfera, llamada *ionosfera*, que se extiende a cientos de kilómetros sobre la Tierra, son capaces de absorber y „reflejar" las ondas de radio (con mayor exactitud, variar el sentido de su propagación). También puede influir considerablemente la heterogeneidad de las capas aéreas inferiores. Y por fin, al estudiar la propagación de las ondas de radio en condiciones naturales, debe prestarse atención a las cuestiones relacionadas con su emisión y recepción, es decir, al funcionamiento de las antenas.

De lo dicho puede llegarse a la conclusión de que el problema de la propagación de las ondas de radio en condiciones naturales, es, en su conjunto, muy complicado. Pero anteriormente hemos descrito totalmente no todo el círculo de fenómenos. La irregularidad e inconstancia de los factores naturales, la presencia simultánea de múltiples procesos electromagnéticos, la influencia del campo magnético de la Tierra y la actividad solar, así como otros muchos, crean particulares dificultades para realizar el análisis de las ondas de radio, cuya solución es imposible sin extensas investigaciones experimentales y observaciones de la naturaleza. Debido a las constantes exigencias de la práctica, el estudio experimental y teórico de la propagación de ondas de radio en el espacio circunterrestre se efectúa decenas de años. Podemos decir que hoy día, la representación general de los procesos está clara; además, ciertos rasgos muy importantes de dichos fenómenos pueden ser definidos de forma elemental. En su estudio nos detendremos en primer término.

§ 41. Datos elementales sobre las líneas de radiocomunicación

1. Funcionamiento de las antenas y líneas de radiocomunicación ideales. Se entiende por *línea de radiocomunicación o radiocanal* el espacio en el que están situados el transmisor y el receptor con

sus antenas; por la línea de radiocomunicación se transmite la energía electromagnética y junto con ella, la información necesaria. Es natural que en tal caso sólo juega un papel importante determinada región del espacio.

La teoría de radiación electromagnética será estudiada en el siguiente capítulo; en lo que se refiere a las antenas, a ellas se ha dedicado un curso especial que se estudia después de la teoría de electromagnetismo. Sin embargo, ahora ya es conveniente estudiar los problemas más sencillos del funcionamiento de las antenas, relacionados con las líneas de radiocomunicación.

Supongamos que en un medio homogéneo isótropo y no absorbente, desde el punto A se produce una radiación electromagnética; el medio es infinito. Si la densidad del flujo de energía fuera igual en todas las direcciones, entonces, tomando una superficie esférica $S = 4\pi r^2$ con el centro ubicado en A, podríamos expresar la potencia media de la radiación $\overline{P} = \overline{P}_A^0$ del modo siguiente:

$$\overline{P}_A^0 = \oint_S \overline{\Pi}^0 ds = 4\pi r^2 \overline{\Pi}^0 (r). \qquad (41.1)$$

Habitualmente, a una antena hipotética que emite uniformemente llamamos *radiador isótropo*.

En realidad, las antenas no emiten uniformemente en diversas direcciones. Si la potencia de cierta antena es $\overline{P} = \overline{P}_A$ y en el punto $M(r, \vartheta, \alpha)$ crea un flujo de energía con una densidad que en $D_A(\vartheta, \alpha)$ supera algunas veces la densidad del flujo de energía de un radiador isótropo de la misma potencia, es decir,

$$\overline{\Pi}(r, \vartheta, \alpha) = D_A(\vartheta, \alpha)\, \overline{\Pi}^0(r) \text{ para } \overline{P}_A = \overline{P}_A^0,$$

en virtud de la (41.1), se obtiene

$$\overline{\Pi}(r, \vartheta, \alpha) = \frac{D_A(\vartheta, \alpha)\, \overline{P}_A}{4\pi r^2}. \qquad (41.2)$$

Esta expresión define la densidad del flujo de energía a una distancia r en la dirección (ϑ, α). El factor $D_A(\vartheta, \alpha)$ se denomina *coeficiente de directividad* de la antena (ganancia de antena dirigida) que estudiamos.

Suponiendo que localmente el campo de radiación puede ser considerado como una onda plana homogénea, hagamos uso de la fórmula (32.18), es decir, tomemos

$$\overline{\Pi}(r, \vartheta, \alpha) = \frac{E_m^2(r, \vartheta, \alpha)}{2W}, \qquad (41.3)$$

siendo $E_m(r, \vartheta, \alpha)$ la amplitud de la intensidad del campo eléctrico a una distancia r en la dirección (ϑ, α). Entonces, de las (41.2) y (41.3)

$$E_m(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{D_A(\vartheta, \alpha)\, \overline{P}_A W}{2\pi}}. \qquad (41.4)$$

La magnitud E_m (o bien $\sqrt{\overline{\Pi}}$) como función de las coordenadas angulares, se considera como la *curva característica de emisión* de la antena. La curva característica de emisión normalizada es la función

$$F(\vartheta, \alpha) = \frac{E_m(r, \vartheta, \alpha)}{E_m(r, \vartheta, \alpha)_{máx}}, \quad r = \text{const}. \tag{41.5}$$

Su gráfica en uno u otro plano (por ejemplo, para $\alpha = \text{const}$ o bien $\vartheta = \text{const}$) es lo que llamamos *diagrama de directividad*. Para un radiador isótropo tal diagrama (fig. 41.1, *a*) es una circunfe-

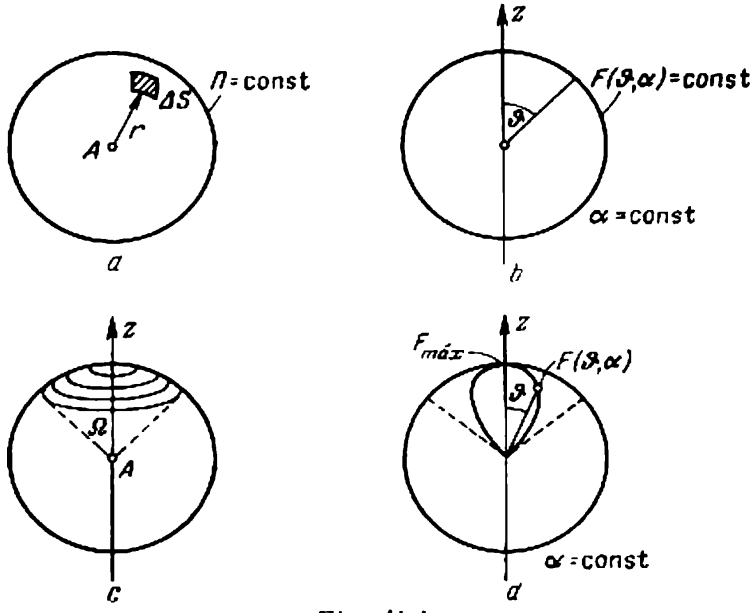


Fig. 41.1.

rencia (fig. 41.1, *b*). Podemos representarnos una antena cuya completa radiación se dispone en los límites del ángulo sólido Ω (fig. 41.1, *c*) y que en cualquier plano meridional el diagrama de directividad tiene la forma representada en la fig. 41.1, *d*. A la dirección *z* le corresponde el valor máximo del coeficiente *D*.

Luego, supongamos que en el punto *B* está situada una antena receptora (decimos en "un punto" por ser el tamaño de la antena despreciablemente pequeño en comparación con las distancias a considerar). Del flujo de energía que incide en la dirección (ϑ, α) con una densidad $\overline{\Pi}(\vartheta, \alpha)$, la antena absorbe una potencia

$$\overline{P}_B = \overline{\Pi}(\vartheta, \alpha) S_B(\vartheta, \alpha). \tag{41.6}$$

El coeficiente $S_B(\vartheta, \alpha)$ se denomina *superficie efectiva* de la antena para la dirección dada. Se trata de demostrar [1] q e el coeficiente

[1] Véase, por ejemplo, la pag. 45 y las anteriores en [C.5]. En el presente libro la deducción no se expone pues esto exigiría profundizar en la teoría de las antenas, sin embargo, en el § 53, punto 4 se da un ejemplo aclarante.

de directividad de la antena está relacionado con su superficie efectiva por medio de la correlación

$$D_B(\vartheta, \alpha) = \frac{4\pi S_B(\vartheta, \alpha)}{\lambda^2} \tag{41.7}$$

Si las antenas emisora A y receptora B, estudiadas anteriormente, forman una línea de radiocomunicación, entonces $\overline{\Pi}(\vartheta, \alpha)$ en la (41.6) debe ser expresado en la forma (41.2). Aplicando también la fórmula (41.7), se obtiene

$$\overline{P}_B = \frac{D_A(\vartheta, \alpha) D_B(\vartheta, \alpha) \lambda^2}{(4\pi r)^2} \overline{P}_A. \tag{41.8}$$

Esta correlación caracteriza a una "línea de radiocomunicación ideal", cuando las antenas están dispuestas en un espacio homogéneo isótropo.

Al *calcular líneas de radiocomunicación reales, se emplea con* frecuencia, una fórmula análoga

$$\overline{P}_B = F^2(r) \frac{D_A(\vartheta, \alpha) D_B(\vartheta, \alpha) \lambda^2}{(4\pi r)^2} \overline{P}_A, \tag{41.9}$$

siendo $F(r)$ el factor de amortiguamiento *(coeficiente de atenuación)* que nos muestra en cuántas veces la intensidad del campo de una línea real resulta ser menor que la de una línea ideal.

2. Sobre las líneas de radiocomunicación reales. El problema principal que se plantea al proyectar una línea de radiocomunicación, es la determinación de una potencia del transmisor que asegure una potencia suficientemente elevada de recepción (o bien, intensidad del campo en el punto de recepción). Si la línea de radiocomunicación se aproxima a la ideal, lo que puede tener lugar durante la comunicación de radio en el cosmos, los cálculos necesarios pueden ser con facilidad efectuados por medio de la fórmula (41.8). En lo que se refiere a las líneas de radiocomunicación reales de tipo más complicado, debido a la diversidad de las condiciones no puede ser indicado un método sencillo y general para su proyección. Tras la sencillez de la fórmula (41.9), están camufladas dificultades reales.

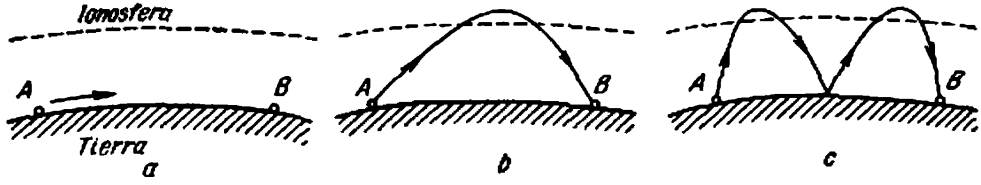


Fig. 41.2.

Pasemos a considerar los factores más importantes que determinan la propagación de las ondas de radio sobre la Tierra. En diferencia de un medio infinito homogéneo, diversas direcciones de radiación no son, en el caso dado, de antemano equivalentes. Si la línea de radiocomunicación debe ser establecida entre dos puntos A y B (fig. 41.2, *a*) situados cerca de la Tierra, al prin-

cipio sólo produce interés la dirección de radiación, tangente a la superficie terrestre. Suele decirse que en esta dirección se propaga la "onda terrestre". Efectivamente, en cierto grado la radiación se dirige por la superficie de la Tierra; en tal caso, ésta engendra una considerable absorción, de forma que E_m decrece con mayor rapidez que $1/r$. Sin embargo, resulta que la línea de radiocomunicación entre los puntos A y B puede ser creada sin emplear la onda terrestre. Como anteriormente indicamos, sobre la Tierra se encuentra la *ionosfera*; así se denominan las capas ionizadas de la atmósfera (la frontera inferior de la ionosfera se considera una altura de hasta 60 km). Por causas que más bajo estudiaremos brevemente y en el capítulo 6 con detalles, en la ionosfera se produce algo parecido a la reflexión de las ondas de radio de múltiples bandas. Gracias a esto, la radiación desde el punto A emitida bajo cierto ángulo respecto al horizonte, puede llegar al punto B como esto se muestra en la fig. 41.2, *b*; son posibles múltiples reflexiones, con participación de la superficie de la Tierra (fig. 41.2, *c*). Precisamente las "ondas ionosféricas" resuelven el problema de la radiotransmisión a grandes distancias (fundamentalmente, a más de 2000 km).

Para comprender el carácter de la onda ionosférica, hay que tener, ante todo, en cuenta que la onda llegada a la ionosfera puede ser considerada como una onda localmente plana. Al principio, la ionización crece al aumentar la altura, *disminuyendo*, por lo tanto, la densidad óptica del medio (§ 81, punto 1). Sustituyamos el medio real por un sistema de capas planas (fig. 41.3, *a*) y

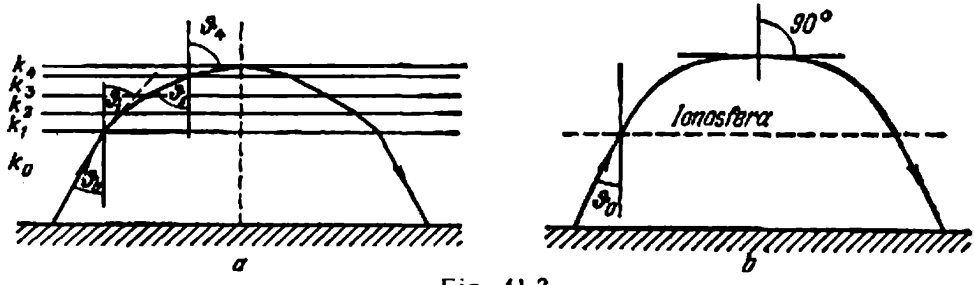


Fig. 41.3.

examinemos las propiedades de este modelo. De acuerdo con la condición $k_0 > k_1 > k_2 \ldots > k_n > \ldots$, por esta razón, según la ley de Snell (37.7), se tiene la representación de los rayos refractados que constantemente se aproximan en dirección al horizonte. En realidad, de la igualdad

$$k_0 \operatorname{sen} \vartheta_0 = k_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 = k_2 \operatorname{sen} \vartheta_2 = \ldots = k_n \operatorname{sen} \vartheta_n = \ldots, \quad (41.10)$$

teniendo en cuenta la correlación de los números de onda, obtenemos: $\operatorname{sen} \vartheta_n > \operatorname{sen} \vartheta_0$. Si las capas adyacentes son próximas según su densidad óptica, cuando el rayo pasa por la superficie de separación, las reflexiones son insignificantes. Sin embargo, al

satisfacerse la condición $\operatorname{sen}\vartheta_n = \frac{k_{n-1}}{k_n}\operatorname{sen}\vartheta_{n-1} > 1$, tendrá lugar la reflexión total sobre la n-ésima capa y el rayo "volverá hacia atrás". Es fácil cerciorarse de que la segunda mitad (descendente) de su recorrido será simétrica a la primera (ascendente hacia el punto B) respecto a la vertical.

En realidad, k no varía de forma brusca de capa a capa, sino suavemente en función de la altura y, por esta razón, la trayectoria del rayo no tiene fracturas (fig. 41.3, *b*); por esta misma causa, la reflexión total se produce cuando $\vartheta = 90°$, ya que en (37.7b) conviene poner $n_{12} = 1$. Sea que la reflexión total tiene lugar si $k = \check{k}$ y, entonces, en virtud de la (41.10),

$$\operatorname{sen}\vartheta_0 = \frac{\check{k}}{k_0} = \sqrt{\frac{\check{\varepsilon}}{\varepsilon_0}}. \qquad (41.11)$$

El proceso puede ser caracterizado como la *refracción* (véase más adelante la pág. 349).

En esta deducción de la condición necesaria para la vuelta del rayo (reflexión ionosférica) vamos a detenernos, sólo haciendo varias observaciones. Primeramente es importante que la constante dieléctrica relativa del gas ionizado ($\varepsilon/\varepsilon_0 < 1$) sea función de la frecuencia; esto determina las particularidades de propagación de ondas de radio de diferentes bandas. Las ondas más cortas, para las que la condición de reflexión ionosférica puede ser satisfecha, tienen una longitud de un orden de 10 m; las ondas más cortas parten desde la Tierra a la ionosfera. En segundo lugar, señalemos que en los anteriores razonamientos, para simplificar, no hemos tenido en cuenta la absorción; en realidad, este hecho es muy *importante*. Y *por fin, la propia representación del rayo curvado* exige su fundamentación (véase más adelante el § 56, punto 5 y el § 81).

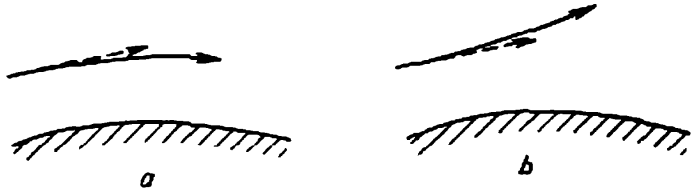


Fig. 41.4.

Para concluir el párrafo, notemos aún que cierta curvatura de los rayos en determinadas condiciones se observa también en las capas inferiores de la atmósfera, llamadas *troposfera*, lo que está condicionado por la variación de la densidad del aire al cambiar *la altura bajo la influencia de diversos factores. Este fenómeno se* denomina "refracción atmosférica". En dependencia de si, con la altura, la densidad del aire disminuye o aumenta, tiene lugar la "refracción positiva" (fig. 41.4, *a*) o bien, la "refracción negativa" (fig. 41.4, *b*).

§ 42. Bandas de las ondas de radiocomunicación

1. Clasificación de las ondas por bandas. Las frecuencias de las oscilaciones electromagnéticas que se emplean en la multicidad de los dispositivos modernos de radio, ocupan tan extensa región que las condiciones naturales de propagación de las correspondientes ondas de radiocomunicación divergen en alto grado. Esto es la causa principal por la que las ondas de radio se clasifican en una serie de bandas según las frecuencias (longitudes de onda). Dicha división se realiza de tal forma que en los límites de cada banda las condiciones naturales quedan relativamente iguales y pueden indicarse las particularidades principales de propagación de las ondas de radio de acuerdo con los factores físicos que predominan.

En la actualidad se destacan cinco bandas principales de ondas de radio:

1. Ondas ultracortas 10^{-3} — 10 m ($3 \cdot 10$ — $3 \cdot 10^5$ MHz); subbandas:
   ondas milimétricas 1 — 10 mm/$3 \cdot 10^4$ — $3 \cdot 10^5$ MHz),
   ondas centimétricas 1 — 10 cm ($3 \cdot 10^3$ — $3 \cdot 10^4$ MHz),
   ondas decimétricas 10 cm — 1 m ($3 \cdot 10^2$ — $3 \cdot 10^3$ MHz),
   ondas métricas 1 — 10 m ($3 \cdot 10$ — $3 \cdot 10^2$ MHz).
2. Ondas cortas 10 — 100 m (3 — $3 \cdot 10$ MHz).
3. Ondas medias 100 — 1 km ($3 \cdot 10^2$ — $3 \cdot 10^3$ kHz).
4. Ondas largas 1 — 10 km ($3 \cdot 10$ — $3 \cdot 10^2$ kHz).
5. Ondas ultralargas 10 — 100 km (3 — $3 \cdot 10$ kHz).

Claro que pueden haber ondas de radio tanto más largas como más cortas. La asimilación de las ondas ultracortas se produjo a medida que se desarrollaban los métodos de generación de oscilaciones electromagnéticas de frecuencias más elevadas. Por fin, en los últimos 15 años, tuvo lugar un suceso de enorme importancia: como resultado de la invención de los láseres han podido encontrar aplicación las oscilaciones electromagnéticas coherentes que corresponden al espectro óptico. Por esta razón, podemos decir, que hoy día la técnica dispone de ondas de radio de banda óptica; esta última se divide en las siguientes subbandas:

1. Región ultravioleta 10^{-4} — $4 \cdot 10^{-4}$ mm ($7{,}5 \cdot 10^5$ — $3 \cdot 10^6$ MHz).
2. Luz visible $4 \cdot 10^{-4}$ — $7{,}5 \cdot 10^{-4}$ mm ($4 \cdot 10^5$ — $7{,}5 \cdot 10^5$ MHz).
3. Región infrarroja $7{,}5 \cdot 10^{-4}$ — 1 mm ($3 \cdot 10^5$ — $4 \cdot 10^5$ MHz).

2. Breves datos sobre el espacio circunterrestre. ¿Cuáles son las particularidades más características de la propagación de las ondas de radiocomunicación de diferentes bandas? Una respuesta más completa y detallada a esta pregunta el lector obtendrá al final del presente manual. Nuestro más próximo problema es examinar los rasgos generales de los fenómenos en los límites de los conocimientos ya adquiridos de la teoría del electromagnetismo.

Pero primeramente, debemos prestar atención a ciertos datos sobre la atmósfera de la Tierra. Sus capas inferiores más densas, como ya sabemos, se denominan troposfera; ésta se extiende hasta

una altura de cerca de 15 km. La troposfera se calienta por la superficie de la Tierra; en término medio, su temperatura disminuye al aumentar la altura.

A una altura de 60—80 km comienza la ionosfera. Los procesos de ionización que transcurren principalmente bajo la influencia del Sol son tales que a una distancia de 250—400 km de la superficie terrestre se encuentra la región con la mayor concentración de electrones libres y que se llama capa F. En la fig. 42.1[1] está representada la gráfica de la función $N'(h)$ confeccionada partiendo de los datos experimentales, y que expresa la cantidad de electrones libres en 1 cm³ a una altura h. En la llamada "ionosfera interior", es decir, bajo la capa F se distinguen otras dos capas, D y E (véase la figura), donde la concentración de electrodos N' alcanza, respectivamente, valores de un orden de 10^3 y 10^5, creciendo con rapidez en las fronteras convencionales.

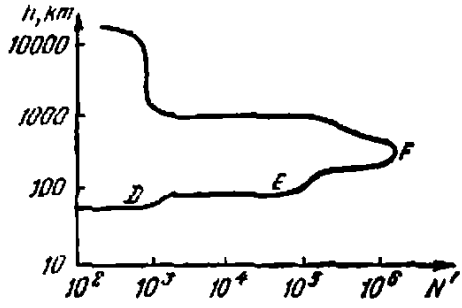


Fig. 42.1.

El cuadro representado es muy variable. La capa D forma durante el día la frontera inferior de la ionosfera, pero por la noche desaparece y dicha frontera se eleva hasta la capa E. A la altura de la capa D la densidad del gas que disminuye con la altura, es aún relativamente grande, así que los electrones libres que oscilan bajo la acción del campo, deben sufrir choques relativamente frecuentes con partículas pesadas, y, por lo tanto, transferirles su energía; éste es el mecanismo principal de absorción de la energía del campo electromagnético en la ionosfera (§ 80, punto 3). La magnitud ν que expresa el número medio de choques por segundo del electrón con las partículas pesadas, alcanza en la capa D un orden de 10^7.

La capa E comienza a una altura de 100 km, siendo este nivel estable; aquí $\nu \approx 10^6$. Hacia la noche, la densidad de electrones N' disminuye gradualmente hasta varios miles y al comenzar el día queda casi constante.

Toda la ionosfera sufre variaciones casi periódicas diarias, de tiempo, así como variaciones más lentas que, sobreponiéndose, pueden crear un cuadro muy complicado. También es complicado el régimen de la capa F. Por ejemplo, durante el día, en el invierno, la magnitud N' alcanza $2 \cdot 10^6$, mientras que por la noche disminuye en un orden. Además, la altura de la capa es durante el día cerca de 200 y de noche, de 300 km. Durante el verano, de día la capa F se descompone en dos capas: F_1 (altura cerca

[1] La figura se ha tomado de [F·2].

de 200 km) y F_2 (altura 300—400 km). En todos los casos, la capa F es extremadamente inestable. Para ella, el número ν se encuentra en los límites de 10^3—10^4.

Sobre la capa F, en la llamada "ionosfera exterior", la concentración electrónica, disminuyendo con la altura, tiene un valor de un orden de 10^2 a una distancia de 20 000 km de la Tierra. Se considera que este nivel es la frontera de la ionosfera.

3. Particularidades de banda de la propagación de ondas de radio. Ahora podemos pasar al estudio de las particularidades de propagación de ondas de radio de diversas bandas.

Comencemos por ondas largas. Para los campos electromagnéticos de las correspondientes frecuencias (30—300 kHz), diferentes tipos de tierras actúan, en su mayoría, como conductores; en mayor grado, las superficies acuáticas pueden considerarse como conductores. Por ejemplo, tomando en la tabla 6.2 para tierras secas $\sigma = 10^{-3}$ S/m, para $\varepsilon/\varepsilon_0 = 4$, y una frecuencia igual a 10^6 Hz, se halla: $\operatorname{tg}\Delta \approx 45$ (véase el § 29, punto 2). La impedancia de onda del medio es de módulo relativamente pequeño; el campo magnético cerca de la superficie terrestre es fundamentalmente tangencial, mientras que el eléctrico sólo tiene una pequeña componente tangencial; la absorción también es relativamente pequeña (§ 40, punto 2). Por esta razón y también, a causa de fenómenos de difracción que trataremos en el siguiente capítulo, en la banda de ondas largas la llamada onda terrestre puede ser recibida a distancias muy considerables (digamos cerca de 3000 km).

Ya que las antenas receptora y transmisora en la banda dada, al parecer, se encuentran en la propia superficie de separación (la altura sobre la Tierra siempre es muy pequeña en relación con la longitud de onda), debido a las condiciones límites propias de un conductor, resulta ser natural la polarización paralela (§ 38, punto 2), es decir, el vector $\boldsymbol{E}$ se encuentra en el plano vertical.

La propagación de las ondas ionosféricas también transcurre con bastante débil absorción: la penetración del campo a la ionosfera es muy pequeña. Se supone que en la banda dada la onda ionosférica se refleja sobre la capa D (durante el día) y la E (por la noche) como desde una superficie de separación de medios heterogéneos: la variación de la densidad óptica del medio en la superficie de separación de la ionosfera es rápida (en relación con la longitud de la onda). Las ondas ionosféricas pueden ser recibidas en todos los puntos del globo terrestre.

Como útil modelo para el estudio de la propagación de ondas largas, puede emplearse una "guíaondas esférica", es decir, el sistema de dos superficies esféricas concéntricas que reflejan totalmente. Por el espacio dispuesto entre ellas se propaga un proceso ondulatorio; un segmento de tal guíaondas poco se diferencia de un sector de guíaondas formado por dos planos paralelos (§ 39, punto 2). Si el campo en la guíaondas esférica se excita por un manantial ubicado en el punto A (fig. 42.2, *a*) y que radia uniforme-

mente en todas las direcciones, podemos decir que los rayos se acumularán en el punto antípode B. En dependencia de la distancia, la intensidad del campo deberá, en tal caso, variar, como se muestra en la fig. 42.2, *b*, a trazos. En realidad, la superficie terrestre y la frontera inferior tienen sólo cierta semejanza de una guíaondas de tal tipo; de modo principal, la diferencia consiste en la absorción al reflejarse sobre las dos fronteras. Sin embargo,

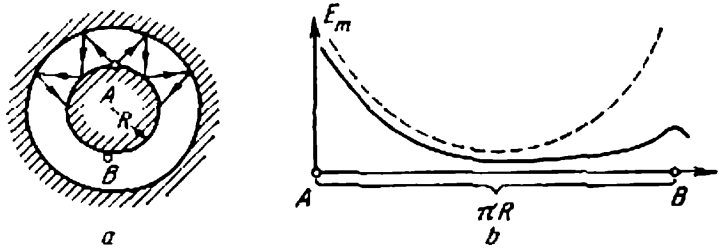


Fig. 42.2.

tiene lugar el "efecto de antipode", o sea, el aumento de la intensidad del campo a una distancia igual a la semicircunferencia terrestre desde la antena; en condiciones reales, la variación de la intensidad del campo se muestra en la fig. 42.2,*b* mediante una línea continua.

A medida que aumenta la frecuencia, las condiciones de propagación de las ondas de radio varían en tal grado, que para la banda de ondas medias son características ya otras particularidades. *A causa de una absorción más elevada en la Tierra, las líneas* de radiocomunicación en las que se hace uso de la onda terrestre tienen sólo una longitud de cerca de 1000 km. En lo que se refiere a la onda ionosférica, ésta sólo puede reflejarse con una concentración eléctrica, propia de la capa *E*. Por esta razón, durante el día, cuando existe la capa *D* situada a menor altura, la onda pasa por ella y, prácticamente, se absorbe por completo. De noche, la absorción es respectivamente mucho menor y la línea de radio puede funcionar utilizando la onda ionosférica; en este caso,

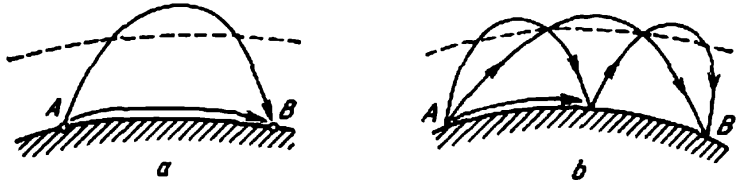


Fig. 42.3.

su radio de acción aumenta considerablemente. Es importante que por la noche, al punto receptor *B* pueden llegar simultáneamente las ondas terrestre e ionosférica (fig. 42.3, *a*), o bien dos ondas ionosféricas (fig. 42.3, *b*) e incluso más de dos. Como el estado de la ionosfera no es constante, la fase de las ondas que pasan a

través de ella varían con el tiempo. Por esta causa, en los dos casos indicados (fig. 42.3) la interferencia de ondas produce bien la amplificación, bien la atenuación del campo. Esto se denomina "desvanecimientos". Para evitar este fenómeno, se procura disminuir la radiación bajo grandes ángulos respecto al horizonte.

Al aumentar la frecuencia en mayor grado, las ondas penetran profundamente tanto a la tierra que ya deja de ser un dieléctrico perfecto, como a la ionosfera. Para la banda de ondas cortas es característica tan elevada absorción de la onda terrestre que, por medio de dichas ondas, la radiodifusión es posible sólo a decenas de kilómetros. En este caso, sólo representan interés práctico las ondas ionosféricas. Estas últimas, pasando por las capas D y E, pueden reflejarse sólo con una concentración electrónica N' próxima a la máxima (capa F). Cuanto más alta es la frecuencia, tanto mayor deberá ser la concentración N' para que se produzca la reflexión total para el ángulo de incidencia dado ϑ_0 y mientras mayor sea el ángulo de incidencia, éste ya no provocará la reflexión total para la concentración dada; en la fig. 42.4, a, b se mues-

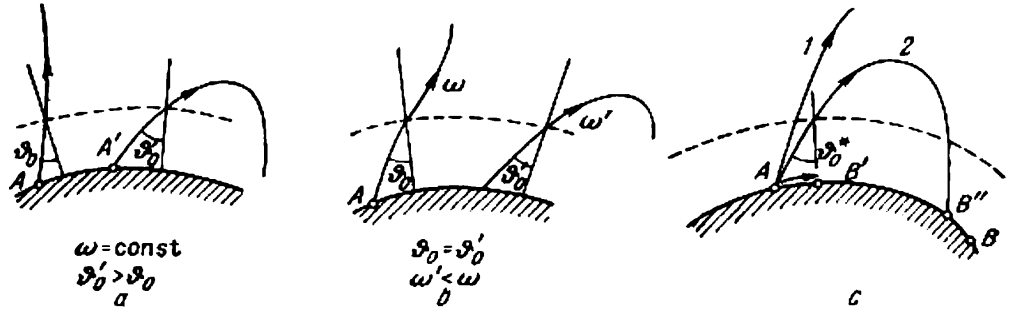


Fig. 42.4.

tra cómo puede perturbarse la condición de reflexión. Si en la ionosfera no se produce la reflexión, esto quiere decir que la onda sale de los límites de la capa F y no retorna a la Tierra. En lo que se refiere a la absorción de las ondas ionosféricas ésta, en la banda dada, crece al disminuir la frecuencia. Es decir, es conveniente aumentar la frecuencia, pero esto es sólo posible hasta los límites determinados que dependen de las condiciones variables. Durante el día, la concentración N' es más elevada y se emplean ondas de 10—25 m, "ondas diurnas". La banda de las "ondas nocturnas" es de 35—100 m. Influyen en el estado de la ionosfera los procesos que transcurren en el Sol. La capa F se liquida como resultado de las "perturbaciones magnéticas"; en la parte alumbrada de la esfera terrestre puede producirse una absorción inesperada (y prácticamente total) de las ondas cortas a consecuencia de una ionización complementaria de la capa D bajo la influencia de las ráfagas solares.

Una particularidad de las líneas de radiocomunicación que funcionan en la banda de ondas cortas, es la existencia de "zonas muertas o de silencio" que son regiones a las que, podemos decir, no llega la onda terrestre (más exactamente, la intensidad de su campo es infinitamente pequeña) y a donde no puede llegar la onda ionosférica, ya que para esto la reflexión en la ionosfera debería producirse bajo un ángulo de incidencia ϑ_0 muy pequeño. Este fenómeno se aclara en la fig. 42.4, *c*. Sea imposible la recepción de la onda terrestre en el punto B' a una distancia AB' de la antena A, y para los ángulos de incidencia ϑ_0, menores que ϑ_0^*, no se produce la reflexión desde la ionosfera (por ejemplo, como para el rayo *1*); entonces la zona de silencio se extiende desde B' a B''. Otro efecto característico, que en ciertos casos se observa en ondas cortas, es el "eco alrededor del mundo", es decir, la superposición en la señal que se recibe de otra, creada por la onda que se ha propagado alrededor del globo terrestre (en dirección directa o inversa) y que, correspondientemente, se retarda según el tiempo.

Las ondas ultracortas se distinguen fundamentalmente, por que no se reflejan en la ionosfera y pasan a través de ella (forman una exclusión los casos de reflexión de las ondas más largas métricas en los períodos de elevada actividad solar). Por toda la banda de ondas ultracortas, la tierra posee propiedades de dieléctrico absorbente.

En dicha banda de ondas, una línea de radio típico existe sólo en los límites de visibilidad geométrica (horizonte visible): la radiación de la antena emisora A (fig. 42.5) llega al punto de recepción B mediante los rayos directo (*1*) y reflejado en la tierra (*2*). El radio de acción de la línea de radio aumenta al aumentar la altura de la antena sobre la Tierra.

Hay, sin embargo, una serie de factores físicos cuya manifestación favorece al alargamiento de las líneas de radio con ondas ultracortas. Entre ellas se encuentra, por ejemplo, la refracción atmosférica (§ 41, fig. 41.5, *a*), así como la dispersión de las ondas en heterogeneidades casuales en la atmósfera; hay líneas de radiocomunicación que utilizan la dispersión de las ondas en las trazas meteóricas.

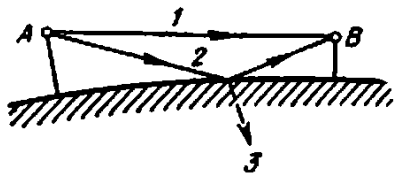


Fig. 42.5.

Hemos hecho un breve estudio de las particularidades principales de la propagación de ondas de radio de diferentes bandas; no hemos sólo tratado la banda de ondas superlargas y el espectro óptico. En los siguientes capítulos las cuestiones de la propagación de ondas de radio en condiciones naturales serán tratadas de nuevo.

En los §§ 58—60 se consideran las ondas de radio terrestres y troposféricas. En tal caso, se emplean ciertos datos sobre los fenó-

menos de difracción (§§ 50, 54) y refracción (§§ 56, 57). En el § 80 se introduce el modelo electromagnético del plasma, con objeto de retornar a las cuestiones de la propagación de las ondas de radio en la ionosfera (§ 81). Más adelante, (§ 84) se tendrá en cuenta la influencia del campo magnético de la Tierra en los procesos ionosféricos. Por fin, en el § 88 se analizan las particularidades de diversas líneas de radiocomunicación.

Capítulo 4

Radiación, difracción y refracción

1. Radiación

El problema de la *radiación electromagnética* se ha tratado reiteradamente en los anteriores capítulos y hemos ya acumulado un material que nos permite considerar dicho fenómeno de modo sistemático. Recordemos ciertos momentos que, en adelante, serán iniciales.

Como radiación se entiende el movimiento de energía en el espacio desde un manantial; sin embargo, aquí es necesaria una serie de precisiones. Primeramente señalemos que la propia palabra "manantial" se utiliza en diferentes sentidos. Por ejemplo, decimos que los manantiales del campo electrostático son cargas, mientras que las del campo magnético estacionario, corrientes continuas. En el campo electrostático no hay movimiento de energía; como no hay campo magnético el vector de Poynting es nulo.

En lo que se refiere a la corriente continua, debemos recordar la deducción hecha en el § 28, punto 4. En este caso simultáneamente existen los campos eléctrico y magnético que, en su conjunto, crean un campo electromagnético y se produce la transmisión de la energía que es resultado de la acción de fuerzas exteriores (o sea, procesos de transformación de energía no electromagnética en electromagnética). Sin embargo, al ubicar cualquier distribución de corriente continua en una superficie S imaginariamente cerrada, advertiremos que el flujo del vector de Poynting a través de S es igual a cero:

$$\oint_S \Pi\, ds = 0.$$

Por ejemplo, hay movimiento de energía electromagnética desde una fuente química de corriente continua en dirección a la carga conectada a él, pero será igual a cero el flujo de energía a través de cualquier superficie que comprenda todo el circuito. Aquí vemos claramente el movimiento de energía en el espacio desde el manantial y, sin embargo, al mismo tiempo, dicha energía no sale de cierta región limitada del espacio. Tal transmisión de energía no se puede llamar radiación.

La radiación es propia de procesos electromagnéticos alternativos. El campo electromagnético alternativo creado por la acción de fuerzas exteriores, tiene carácter ondulatorio y si no hay obstáculos exteriores, transmite la energía a distancias arbitrariamente alejadas del manantial. En los §§ 32—39 ya se trataron con suficiente detalle los campos electromagnéticos ondulatorios, pero en dichos casos los campos eran *libres*, o sea, existían sin manantiales. El problema de la radiación consiste en la investigación de los campos ondulatorios excitados por manantiales, en otras palabras, campos *forzados*.

¿Qué puede servir de manantial de un proceso electromagnético ondulatorio? El principio de la contestación a dicha pregunta lo hallamos en el § 28, punto 1. Si a consecuencia de la transformación de energía no electromagnética en energía electromagnética, se tiene una distribución de corriente eléctrica alterna conocida de antemano, tal corriente se denomina *exterior* y al resolver los problemas de electrodinámica se considera prefijada. Además, el problema sobre la radiación se reduce a la exigencia de hallar el campo electromagnético como resultado de la solución de las ecuaciones de Maxwell (o las derivadas de ellas) respecto a la corriente exterior dada que, precisamente, expresa la acción del manantial.

Lo primero que aquí debemos hacer, es hallar la solución de los problemas de esta clase, más sencillos y, al mismo tiempo, característicos. Llegando a comprender la acción de los *radiadores elementares*, aclararemos importantes leyes generales de la radiación electromagnética.

Seguidamente, será enunciado un punto de vista más amplio, en virtud del cual en calidad de manantiales de radiación podremos considerar no sólo corrientes conductivas prefijadas, sino que, por ejemplo, campos preestablecidos. Esto se refleja en el *principio de Huygens*.

En el párrafo a continuación, se expone una serie de cuestiones sobre la teoría de radiación electromagnética. A ellas también se refieren las representaciones sobre las *corrientes magnéticas*, el *principio de dualidad* y el *principio de reprocidad*. Todo este círculo de problemas, tendrá particular importancia al estudiar la teoría de antenas.

§ 43. Problema principal sobre la radiación

1. Corriente exterior y campo de radiación. Consideremos uno de los planteamientos del problema sobre la radiación que tiene considerable generalidad.

Sea que en cierta región del espacio está distribuida una corriente exterior, pero que sólo en esta *región del manantial* V hay corrientes conductivas, de forma que

$$j = \begin{cases} j^{ex} \text{ en } V, \\ 0 \text{ fuera de } V. \end{cases} \tag{43.1}$$

Supongamos que el medio es homogéneo (las permeabilidades ε y μ son constantes). Escribiendo la ecuación vectorial de D'Alembert (28.6) para las condiciones preestablecidas, se tiene que [1]

$$\nabla^2 H - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} j^{ex}. \tag{43.2}$$

En virtud del (S5.25) podríamos escribir inmediatamente la solución de la ecuación (43.2). Sin embargo, en este momento tiene primeramente interés el contenido físico del proceso de radiación y nosotros abordaremos esta cuestión por otro lado.

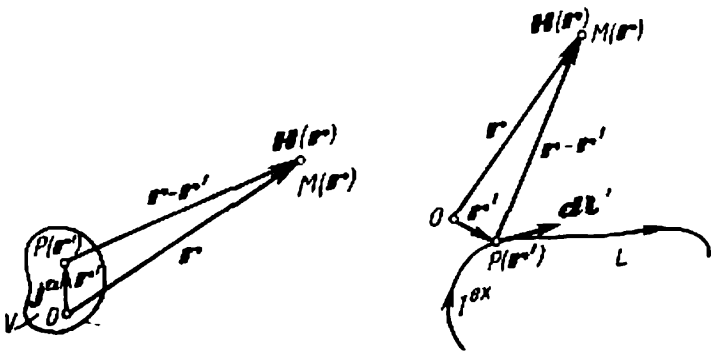


Fig. 43.1.

Dirijámonos a la fig. 43.1,*a*, en la que está representada esquemáticamente la región V del manantial en la que se ha destacado el punto $P(r')$ y el punto de observación $M(r)$ ubicado a cierta distancia (incluso fuera de V, lo que no tiene importancia). Supongamos al principio que las variaciones según el tiempo transcurren muy lentamente. Sean estas variaciones tan lentas que la intensidad del campo magnético H en el punto $M(r)$ en un momento arbitrario de tiempo t no diverge en los límites de una exactitud dada

[1] Sobre el empleo de la operación rot respecto a la función prefijada de distribución de la corriente $j^{ex}(r)$, véase el principio del punto 2 en el § 22.

de antemano respecto a la intensidad del campo magnético estacionario si $j = j^{ex}(t)$. Entonces, H se determina por la fórmula (22.6) que expresa la solución de la ecuación (22.5), es decir,

$$H(r, t) \approx \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot}' j^{ex}(r', t)}{|r - r'|} dv'. \qquad (43.3)$$

Es evidente que en tal caso debemos llamar el campo *cuasiestacionario* (§ 27).

Pero mientras mayor sea la velocidad de variación de la corriente exterior, menos fidedigno será el resultado de la definición del campo magnético en el punto fijado $M(r)$ según esta fórmula. Esto es comprensible: la energía electromagnética emitida en el punto $P(r')$ no puede vencer momentalmente la distancia $|r - r'|$ que separa $M(r)$ de $P(r')$ y podemos esperar que las variaciones en $M(r)$ *retardarán* a un tiempo $\Delta t = |r - r'|/v$, necesario para la propagación del proceso (v es la velocidad de propagación).

Supongamos que tomamos en cuenta la indicada circunstancia lo que permite que la fórmula (43.3) sea válida para determinar H en $M(r)$ con cualesquiera variaciones de la corriente exterior j^{ex} en $P(r')$. Precisando, vamos a considerar que para el cálculo de $H(r, t)$ sólo hay que tomar en lugar de $\text{rot}' j^{ex}(r', t)$ el valor de la función rot j^{ex} en el anterior momento de tiempo $t - \Delta t$. En tal caso, es suficiente introducir en la (43.3) la respectiva corrección. Sabiendo que $t - \Delta t = t - \frac{|r - r'|}{v}$, se escribe

$$H(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot}' j^{ex}(r') \Big|_{t - \frac{|r - r'|}{v}}}{|r - r'|} dv', \qquad (43.4)$$

aquí por v, como se desprende de lo precedente (capítulo 3), es lógico entender $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Es curioso que el resultado (43.4) obtenido mediante razonamientos tan sencillos, da una solución rigurosa del problema. Para convencernos, tomemos la fórmula (S5.25). Comparando los (43.2) y (S5.21), vemos que el (S5.25) es la solución de (43.2) si en calidad de $f\left(r', t - \frac{|r - r'|}{v}\right)$ tomar $-\text{rot } j^{ex}$ como función de r' y $t - \frac{|r - r'|}{v}$. En lo que se refiere a la forma de anotación, nos abstendremos del símbolo rot $j^{ex}\left(r', t - \frac{|r - r'|}{v}\right)$, ya que puede ser interpretado como el rotacional de $j^{ex}\left(t - \frac{|r - r'|}{v}\right)$, lo que no es lo mismo [1].

[1] Como el tiempo de retardo $|r - r'|/v$ es una función de r', éste es diferente para las funciones $j^{ex}(r')$ y rot $j^{ex}(r')$ que se encuentran bajo el signo de la integral.

Si la corriente oscila armónicamente, o sea, $j^{ex}(r', t) = j_m^{ex}(r')\cos[\omega t + \varphi(r')]$, es más cómodo pasar a la representación compleja $j^{ex}(r', t) = j_m^{ex}(r')e^{i\omega t}$, siendo $j_m^{ex}(r') = j_m^{ex}(r')e^{i\varphi(r')}$ la amplitud compleja. Seguidamente

$$\operatorname{rot}' j^{ex}(r')\Big|_{t-\frac{|r-r'|}{v}} = [\operatorname{rot}' j_m^{ex}(r')]e^{i\omega\left(t-\frac{|r-r'|}{v}\right)} =$$

$$= e^{i(\omega t - k|r-r'|)}\operatorname{rot}' j_m^{ex}(r'),$$

siendo $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Por esta razón

$$\dot{H}(r, t) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{e^{i(\omega t - k|r-r'|)}\operatorname{rot}' j_m^{ex}(r')}{|r-r'|}dv'.$$

Destacando y omitiendo el factor $e^{i\omega t}$, podemos escribir la expresión de la amplitud compleja de la intensidad del campo magnético:

$$\dot{H}_m(r) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{e^{-ik|r-r'|}\operatorname{rot}' j_m^{ex}(r')}{|r-r'|}dv'. \qquad (43.5)$$

Esta es la solución de la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2\dot{H}_m + k^2\dot{H}_m = -\operatorname{rot} j_m^{ex}, \qquad (43.6)$$

obtenida de la (43.2) empleando el método de las amplitudes complejas. Es evidente que la expresión (43.5) se halla inmediatamente según la fórmula (S5.23) sustituyendo $\dot{f}_m(r')$ por $-\operatorname{rot} j_m^{ex}(r')$.

2. **Diferentes tipos de soluciones.** Todo lo considerado anteriormente tenía un solo objetivo: comprender la solución de las ecuaciones de D'Alembert y Helmholtz para el problema sobre la radiación electromagnética; para esto fue elegida una de sus posibles enunciaciones. No obstante, al preestablecer la corriente exterior (43.1) no se tiene obligatoriamente que partir de la ecuación (43.2). En el § 28 fueron deducidas diferentes ecuaciones de D'Alembert (28.6), (28.7), (28.14) y (28.15) y sus soluciones pueden ser escritas directamente a base de las expresiones (S5.25) y (S5.20). Por ejemplo, con las condiciones (43.1) las soluciones de las ecuaciones de D'Alembert para los potenciales (28.14) y (28.15) tienen la forma

$$A(r, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{j^{ex}\left(r', t-\frac{|r-r'|}{v}\right)}{|r-r'|}dv' \qquad (43.7)$$

y

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho^{ex}\left(r', t-\frac{|r-r'|}{v}\right)}{|r-r'|}dv', \qquad (43.8)$$

siendo ρ^{ex} la densidad de la carga que se encuentra sólo en la región del manantial; en virtud de la (4.2) $\partial\rho^{ex}/\partial t = -\operatorname{div} j^{ex}$. Suele decirse que las fórmulas (43.7) y (43.8) expresan los poten-

ciales "retardados". Efectivamente, ellas pueden ser directamente obtenidas de las (22.13) y (14.10) introduciendo el tiempo de retardo.

Dirijámonos, a continuación, a las ecuaciones de Helmholtz, expuestas en el § 29, punto 4 que fueron halladas al introducir las permitividades complejas. Mediante ellas, podemos plantear el problema sobre la radiación en un medio absorbente. Haciendo uso de la fórmula general de la solución (S5.23), se escriben las soluciones de las ecuaciones (29.18) y (29.19):

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\dot{V}} \frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{rot}'\,\dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv' \tag{43.9}$$

y

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m(\boldsymbol{r}) = -\frac{i}{4\pi\omega\dot{\varepsilon}}\int_{\dot{V}} \frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,[\mathrm{grad}\,\mathrm{div}'\,\dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}(\boldsymbol{r}') + k^2\dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}(\boldsymbol{r}')]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv', \tag{43.10}$$

así como también las ecuaciones para los potenciales (29.25) y (29.26):

$$\dot{\boldsymbol{A}}_m(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\dot{V}} \frac{\dot{j}_m^{ex}(\boldsymbol{r}')\,e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv' \tag{43.11}$$

y

$$\dot{\varphi}_m(\boldsymbol{r}) = \frac{i}{4\pi\omega\dot{\varepsilon}}\int_{\dot{V}} \frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{div}'\,\dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv'. \tag{43.12}$$

La fórmula (43.9) nos da la generalización de la solución de la (43.5) que se extiende a los medios absorbentes. Este tipo de solución es digno de especial interés, ya que permite efectuar una transformación que lleva a una sencilla expresión del vector $\boldsymbol{H}$ del campo de radiación; a continuación se efectuará tal transformación.

3. Transformación de la solución y carácter de la radiación electromagnética. Procedamos como lo hicimos en el § 22 al obtener la fórmula (22.7) de la (22.6). Modificando la forma de la expresión subintegral en la (43.9) mediante la identidad vectorial (S1.35), se escribe

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\left\{\int_{\dot{V}} \mathrm{rot}'\,\frac{\dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}(\boldsymbol{r}')\,e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv' - \right.$$

$$\left. -\int_{\dot{V}} \left[\mathrm{grad}'\,\frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\ \dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}(\boldsymbol{r}')\right] dv'\right\}. \tag{43.13}$$

La primera integral, en virtud del (S1.28) se reduce a una integral de superficie:

$$\int_{\dot{V}} \mathrm{rot}'\,\frac{\dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}(\boldsymbol{r}')\,e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dv' = -\oint_S \frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,[\dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}(\boldsymbol{r}'),\ d\boldsymbol{s}'].$$

Esta integral es igual a cero, como la integral de superficie análoga en el § 22, punto 2. En la segunda integral de la (43.13), según las (S1.11) y (S1.36)

$$\operatorname{grad}' \frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} = r_{0q}\left(\frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|^2} + ik\,\frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|}\right),$$

siendo $r_{0q} = (r-r')/|r-r'|$. Como resultado de la (43.13), se halla

$$\dot{H}_m(r) = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|}\right)[j_m^{ex}(r'),\ r_{0q}]\,e^{-ik|r-r'|}\,dv'. \tag{43.14}$$

La forma de solución obtenida nos da un método relativamente sencillo de definir el campo de radiación para los manantiales preestablecidos: expresando directamente la amplitud compleja del vector $\boldsymbol{H}$, dicha forma no contiene operaciones de diferenciación bajo el signo de la integral. Más adelante, demostraremos la aplicación de la fórmula (43.14). Por el momento, ella tiene importancia ya que nos da cierta representación sobre el carácter del campo de radiación.

La integral se descompone en dos sumandos y podemos decir que el campo está formado por dos componentes que se determinan por dichos sumandos y los que, al alejarse del manantial, decrecen de modo diferente. Escribamos la (43.14) en la forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_m &= \dot{H}_m^c + \dot{H}_m^l, \\ \dot{H}_m^c &= \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{[j_m^{ex}(r'),\ r_{0q}]\,e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|^2}\,dv', \\ \dot{H}_m^l &= \frac{ik}{4\pi}\int_V \frac{[j_m^{ex}(r'),\ r_{0q}]\,e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|}\,dv'. \end{aligned}\right\} \tag{43.14a}$$

La componente $\dot{H}_m^c$ que decrece con mayor rapidez, caracteriza el llamado campo "cercano". Utilizando para comparar la fórmula (22.7), vemos que el campo cercano puede ser parecido por su estructura a un campo estacionario. Con este objeto es preciso que el factor $e^{-ik|r-r'|}$, situado bajo la integral, se deferencie poco de la unidad. Supongamos, en particular, que no hay absorción ($\dot{k} = k$). Entonces $e^{-ik|r-r'|} \approx 1$ al ser $k|r-r'| \ll 1$, es decir, si $|r-r'| \ll \lambda$; la distancia desde el punto de observación $M(r)$ hasta cualquier punto $P(r')$ en el manantial debe ser pequeña en comparación con la longitud de onda. Es evidente que esta misma limitación se divulga automáticamente a las dimensiones del manantial. En tal caso, el campo cercano será *quasiestacionario*.

La componente $\dot{H}_m^l$ que decrece con mayor lentitud, caracteriza el llamado campo "lejano". Con $|r-r'| \to \infty$ (véase la fig. 43.1, *a*) $|r-r'| \to r$ y por esto, al no haber absorción, el

campo cercano decrece asintóticamente como $1/r^3$, mientras que el lejano, como $1/r$:

$$\dot{H}_m^c = 0\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad \text{y} \quad \dot{H}_m^l = 0\left(\frac{1}{r}\right) \text{ para } \dot{k} = k. \tag{43.15}$$

En virtud de las (43.15)

$$\dot{H}_m \to \dot{H}_m^l, \text{ cuando } r \to \infty. \tag{43.16}$$

De este modo, el campo de radiación decrece al aumentar la distancia desde el manantial mucho más *lentamente* que el campo estacionario.

Está claro que a medida que el campo se aleja del manantial, éste se aproxima más a una onda esférica divergente con una dependencia radial $e^{-ikr}r$ y la solución (43.9), (43.14) satisface la condición de radiación (S5.24) que en el caso dado tiene la forma

$$\lim_{r \to \infty} r\left[\frac{\partial \dot{H}_m(r)}{\partial r} + ik\dot{H}_m(r)\right] = 0. \tag{43.17}$$

Como, al haber absorción, el campo decrece con mayor rapidez que $1/r$, la solución también satisface la condición de unicidad enunciada en el § 31, punto 2.

4. Radiación de corrientes lineales. Si la corriente exterior es una corriente lineal ideal (§ 23, punto 1), o sea,

$$\dot{j}_m^{ex}(r) = \tau_0 \dot{I}_m^{ex} \delta(r - r') \tag{43.18}$$

(fig. 43.1, *b*), entonces ciertas de las fórmulas obtenidas anteriormente en los puntos 2, 3 pueden ser fácilmente simplificadas. Así, en lugar de la (43.14), se tiene

$$\dot{H}_m(r) = \frac{1}{4\pi}\int_L \dot{I}_m^{ex}\left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|}\right)e^{-ik|r-r'|}[dl', r_{0q}], \tag{43.19}$$

mientras que en vez de la (43.11)

$$\dot{A}_m(r) = \frac{\mu}{4\pi}\int_L \dot{I}_m^{ex}\frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|}dl'. \tag{43.20}$$

La deducción de estas expresiones en nada se diferencia de la deducción de las fórmulas (23.2) y (23.3). La magnitud $\dot{I}_m^{ex}$ no se ha sacado fuera del signo de la integral, ya que en diferencia de la corriente continua (§ 23), $\dot{I}_m^{ex}$ puede variar a lo largo de L.

§ 44. Radiador eléctrico elemental y oscilador lineal

1. Elementos de corriente y dipolo de Hertz (hertziano). Las fórmulas obtenidas anteriormente nos permiten hallar el campo de radiación para cualesquiera distribuciones de la corriente exterior. Comencemos nuestras consideraciones por un caso muy sencillo,

pero que, sin embargo, representa un interés de principio: tomemos un pequeño elemento de corriente lineal.

Un elemento "abierto" de corriente continua es, naturalmente, inverosímil, pero nosotros consideramos la corriente alterna que, como es fácil convencerse, puede mantenerse en los extremos del

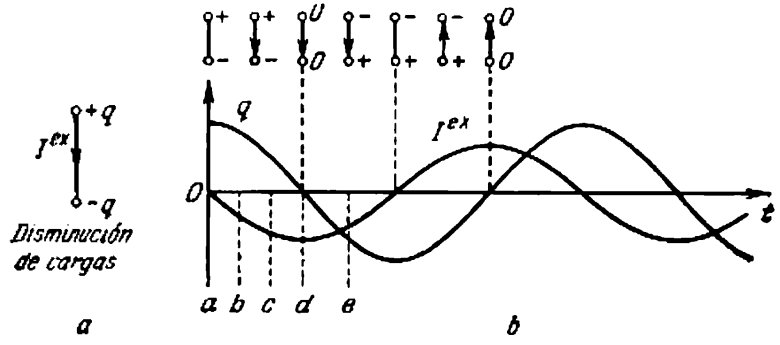


Fig. 44.1.

segmento por cargas que oscilan (fig. 44.1, *a*). Si en cierto momento las dos cargas de signo contrario, tienen igual magnitud absoluta, tal igualdad se conservará posteriormente. Supongamos, por ejemplo, que la carga convencional positiva pasa al extremo negativamente cargado. La disminución de la magnitud absoluta de la carga transcurre, en tal caso, en los dos extremos en igual medida: en uno de ellos por la pérdida de la carga, en el segundo, debido a la neutralización. Finalmente, la corriente descarga los dos extremos y, a continuación (sin cambiar de dirección), los recarga con signos contrarios. Cuando, por fin, todas las cargas en movimiento han sido "gastadas" y los valores absolutos de las cargas alcanzan sus máximos, la corriente, disminuyendo hasta

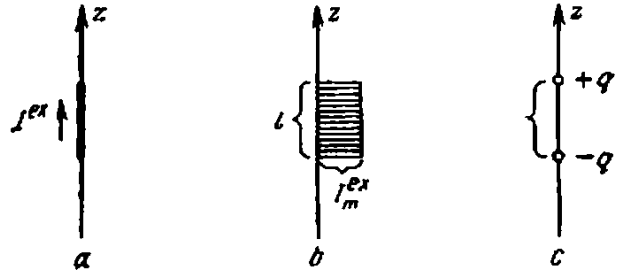


Fig. 44.2.

cero, cambia de dirección, etc. Este proceso cíclico se esclarece en la gráfica de la fig. 44.1, *b*. De este modo, al segmento de corriente alterna corresponde un *dipolo oscilante*.

Podemos convencernos de la justeza de la descripción efectuada por medio de la ley de conservación de la carga en la forma de la (29.13). Ubicando elemento de corriente en el eje *z* del sistema

cartesiano de coordenadas de la fig. 44.2, *a*, debemos escribir la ecuación (29.13) en la forma

$$\operatorname{div} \boldsymbol{z}_0 \dot{j}_m^{ex} = -i\omega \dot{\rho}_m^{ex} \tag{44.1}$$

o bien,

$$\frac{d\dot{j}_m^{ex}}{dz} = -i\omega \dot{\rho}_m^{ex}. \tag{44.1a}$$

Suponiendo que el segmento l tiene cierto grosor, es decir, sustituyéndolo por un vástago conductor con sección transversal S arbitrariamente pequeña, se tiene

$$\dot{j}_m^{ex} S = \dot{I}_m^{ex} \quad \text{y} \quad \dot{\rho}_m^{ex} S \Delta z = \dot{q}_m^{ex},$$

siendo $\dot{I}_m^{ex}$ la amplitud compleja de la corriente exterior que pasa a lo largo del eje z y $\dot{q}_m^{ex}$ la amplitud compleja de la carga que a ella corresponde en un elemento pequeño Δz. Multiplicando ambos miembros de la (44.1a) por $S\Delta z$, de este modo obtenemos

$$\Delta \dot{I}_m^{ex} = -i\omega \dot{q}_m^{ex}, \tag{44.2}$$

entendiendo por $\Delta \dot{I}_m^{ex}$ la variación de la magnitud $\dot{I}_m^{ex}$ en el sector elemental Δz. Si la amplitud $\dot{I}_m^{ex}$ es constante en todo el segmento l, como se muestra en la fig. 44.2, *b*, entonces sus variaciones transcurren sólo en sus extremos, siendo $\Delta \dot{I}_m^{ex} = \pm \dot{I}_m^{ex}$ desde cero hasta $\dot{I}_m^{ex}$ y desde $\dot{I}_m^{ex}$ hasta cero. Al mismo tiempo, como se desprende de la (44.2), $\dot{q}_m^{ex} = 0$ por toda la longitud del segmento l, salvo en sus extremos, en los que están concentradas las cargas oscilantes con amplitudes complejas, de igual magnitud absoluta y signos contrarios

$$\dot{q}_m^{ex} = \mp i \frac{\dot{I}_m^{ex}}{\omega}. \tag{44.3}$$

Estas son las cargas que forman el dipolo (fig. 44.2, *b*) que corresponde al elemento de corriente alterna. Señalemos que, en virtud de (44.3), las cargas y la corriente están desfasadas a 90°, como se muestra en la fig. 44.1, *b*. Introduzcamos a nuestras consideraciones, el momento del dipolo $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{z}_0 ql$ (§ 15, punto 4) que, lo mismo que las cargas, oscila con una frecuencia circular ω; su amplitud compleja es igual a

$$\dot{\boldsymbol{p}}_m = -i \frac{\dot{I}_m^{ex} l}{\omega} \boldsymbol{z}_0. \tag{44.4}$$

Pues, un elemento de corriente alterna cuya amplitud es constante, existe al haber un dipolo oscilante que, generalmente, se denomina *dipolo de Hertz*, así como *radiador eléctrico elemental*.

2. Solución del problema sobre el radiador elemental. Hallemos el campo electromagnético cuyo manantial es un dipolo hertziano. Dispongamos el segmento rectilíneo l con corriente en un sistema

esférico de coordenadas (fig. 44.3, *a*). Entonces, en virtud de la fórmula (43.19), en la que en el caso dado $dl' = z_0 dz$, se tiene

$$\dot{H}_m(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} j_m^{ex} \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|} \right) e^{-ik|r-r'|} [z_0, r_{0q}] dz. \tag{44.5}$$

A causa de la pequeñez del elemento de corriente, el cálculo de $\dot{H}_m$ se reduce a las operaciones muy sencillas: mientras menor sea l en comparación con la distancia de observación y la longitud

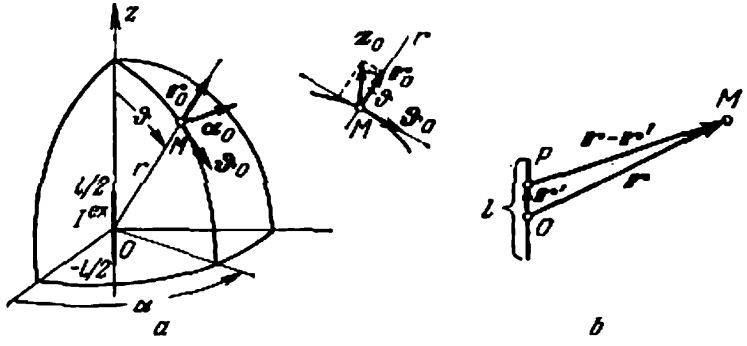


Fig. 44.3.

de onda, con mayor razón puede considerarse que la expresión subintegral es constante. Efectivamente, siendo $l \ll r$, tenemos: $\frac{1}{|r-r'|} \approx \frac{1}{r}$ y $[z_0, r_{0q}] \approx [z_0, r_0] = \alpha_0 \operatorname{sen} \vartheta$ y si $l \leqslant \lambda$: $e^{-ik|r-r'|} \approx e^{-ikr}$. Esto último precisa cierta aclaración. Como vemos en la fig. 44.3, *b*, $|r - |r-r'|| < l/2$, de manera que al no haber absorción ($\dot{k} = k = 2\pi/\lambda$) $|\dot{k}r - \dot{k}|r-r'|| < \pi \frac{l}{\lambda}$. De aquí se desprende la aproximación; ésta sigue siendo válida si hay absorción, cuando $\lambda = 2\pi/k'$.

Teniendo en cuenta estas indicaciones, de la (44.5) obtenemos

$$\dot{H}_m \approx \alpha_0 \frac{j_m^{ex} l}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{-ikr} \operatorname{sen} \vartheta. \tag{44.6}$$

Así que hemos hallado el resultado. Sin embargo, antes de emplearlo para la definición completa del campo de radiación, introduzcamos en nuestras consideraciones un objeto para el que la fórmula (44.6) es exacta a cualesquiera valores de r. Este es el *dipolo de Hertz ideal*, "punto dipolar" (compárese con el § 15, punto 4) que se obtiene cuando $l \to 0$, conservando el momento p lo que, en virtud de (44.4), refleja la constancia del producto $j_m^{ex} l$. Aplicando (44.4) de (44.6), se halla

$$\dot{H}_m = \alpha_0 \frac{\dot{p}_m \omega}{4\pi} \left(\frac{i}{r^2} - \frac{k}{r} \right) e^{-ikr} \operatorname{sen} \vartheta \qquad (l \to 0, \ \dot{p}_m = \text{const}). \tag{44.7}$$

Si, a continuación, deseamos hallar la amplitud compleja de la intensidad del campo eléctrico del dipolo de Hertz ideal, partiremos de la primera ecuación de Maxwell. En virtud de la (29.11a), en todo el espacio fuera del punto dipolar $\dot{\boldsymbol{E}}_m = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_m$. Introduciendo en esta igualdad $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ hallada por medio de (44.7) y haciendo uso de la fórmula del (S1.23), calculamos

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \frac{\dot{p}_m}{4\pi\varepsilon}\left[\boldsymbol{r}_0 \frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + i\dot{k}\right)\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0 \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\dot{k}}{r} - \dot{k}^2\right)\operatorname{sen}\vartheta\right] e^{-i\dot{k}r}. \tag{44.8}$$

Las igualdades (44.7) y (44.8) describen totalmente el campo de radiación en forma de las amplitudes complejas de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$; más adelante, en el punto 3, dicho campo será investigado. Por el momento, vamos a señalar que en lugar de la definición directa dada en la (43.19) podemos, primeramente, utilizar la fórmula (43.20)

$$\dot{\boldsymbol{A}}_m(r) = \frac{\dot{\mu}}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \dot{I}_m^{ex} \frac{e^{-i\dot{k}|r-r'|}}{|r-r'|} \boldsymbol{z}_0 dz. \tag{44.9}$$

De aquí, para el dipolo hertziano ideal $\left(l \to 0,\ \dot{p}_m = \frac{-i\dot{I}_m^{ex} l}{\omega} = \text{const}\right)$

$$\dot{\boldsymbol{A}}_m = \boldsymbol{z}_0 \frac{i\omega\dot{\mu}\dot{p}_m}{4\pi r} e^{-i\dot{k}r} = (\boldsymbol{r}_0 \cos\vartheta - \boldsymbol{\vartheta}_0 \operatorname{sen}\vartheta) \frac{i\omega\dot{\mu}\dot{p}_m}{4\pi r} e^{-i\dot{k}r} \tag{44.10}$$

(fig. 44.3, *a*) y la expresión (44.7) se halla gracias a la aplicación de la fórmula (29.22) $\dot{\boldsymbol{H}}_m = \dot{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{A}}_m$.

3. **Propiedades del campo de radiación.** Comencemos por escribir las expresiones para los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ que se desprenden de las (44.7) y (44.8), tomando un medio no absorvente ($\dot{k} = k$) y poniendo $\dot{p}_m = p_m e^{i\varphi}$. Como resultado

$$\boldsymbol{E} = \frac{p_m k^2}{4\pi\varepsilon r}\left\{\boldsymbol{r}_0 2\left[\frac{1}{kr}\cos(\omega t - kr + \varphi) - \operatorname{sen}(\omega t - kr + \varphi)\right]\frac{1}{kr}\cos\vartheta + \right.$$
$$\left. + \boldsymbol{\vartheta}_0\left[\left(\frac{1}{k^2r^2} - 1\right)\cos(\omega t - kr + \varphi) - \frac{1}{kr}\operatorname{sen}(\omega t - kr + \varphi)\right]\operatorname{sen}\vartheta\right\} \tag{44.11a}$$

y

$$\boldsymbol{H} = -\alpha_0 \frac{p_m \omega k}{4\pi} \frac{k}{r}\left[\frac{1}{kr}\operatorname{sen}(\omega t - kr + \varphi) + \cos(\omega t - kr + \varphi)\right]\operatorname{sen}\vartheta. \tag{44.11b}$$

En estas igualdades los sumandos entre paréntesis se han tomado adimensionales.

Como vemos, el campo de un radiador eléctrico elemental tiene el carácter de una *onda no homogénea esférica*. Efectivamente, en la superficie de cualquier esfera coordenada $r = \text{const}$ la fase de

cualquiera de las componentes de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ del campo es constante, mientras que la amplitud varía en dependencia del ángulo ϑ. El campo no depende de α, ya que es azimutalmente homogéneo a causa de la simetría dada del manantial. Las líneas de fuerza magnéticas forman círculos concéntricos en los planos perpendiculares a la corriente ($z = \text{const}$), y las líneas de fuerza eléctricas se disponen en los planos meridionales ($\alpha = \text{const}$). Designando $k = 2\pi/\lambda$, no podemos, sin embargo, considerar a λ como la longitud de onda. Este parámetro no sólo no es el "periodo espacial" a causa de la atenuación del campo al aumentar la distancia, sino que incluso no corresponde a la variación de la fase en 360°. Al pasar del punto $M(r, \vartheta, \alpha)$ al punto $M'(r + \lambda, \vartheta, \alpha)$ alejado del primero en λ, el incremento de fase depende de r y es diferente para diversas componentes del campo. Así, el campo de radiación es relativamente complejo. Pero los sumandos por separado en las fórmulas (44.11a) y (44.11b) no son equivalentes para los campos situados a diferentes distancias del manantial. Este hecho simplifica considerablemente la posterior investigación.

Primeramente, consideremos el campo en la llamada "zona cercana" del radiador, es decir, a distancias $r \ll \lambda$ [1]. Como en tal caso $kr \ll 1$, las fórmulas (44.11a) y (44.11b) pueden sustituirse por correlaciones sencillas aproximadas, desechando entre los corchetes los términos pequeños; despreciando también el desfasaje kr, para $r \ll \lambda$ se obtiene

$$\boldsymbol{E} \approx \frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}(\boldsymbol{r}_0 2\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0 \operatorname{sen}\vartheta), \quad \boldsymbol{H} \approx \alpha_0 \frac{I^{ex} l}{4\pi r^2}\operatorname{sen}\vartheta, \quad (44.12)$$

siendo $p = p_m \cos(\omega t + \varphi)$ e $I^{ex} = -I_m^{ex} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ $(p_m = I_m^{ex} l/\omega)$.

El campo que se define mediante las anteriores fórmulas no tiene carácter ondulatorio. Comparando las (44.12) con la (15.13) y (23.2a) podemos advertir que la distribución del campo eléctrico en el espacio en cualquier momento de tiempo t, resulta ser igual al considerado en el caso de un dipolo electroestático, mientras que la distribución del campo magnético se subordina a la ley de Biot—Savart que es válida para un campo magnético estacionario. De esta manera, como era de esperar, en la zona cercana predomina un campo magnético *cuasiestacionario* (compárese con el § 43, punto 3). De las (44.12) se desprende que en la zona cercana los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ están desfasados casi en 90°. Suponiendo que las fórmulas (44.12) son exactas, llegaríamos a la deducción de que no hay radiación, ya que el vector medio de Poynting $\overline{\boldsymbol{\Pi}}$ es nulo (30.7): el vector complejo de Poynting $\dot{\boldsymbol{\Pi}}$ es una magnitud puramente imaginaria. Esto corresponde al movimiento oscilatorio de la energía en el contorno del manantial. En realidad, este tipo de movimiento predomina en la zona cercana.

[1] Si se considera no un dipolo hertziano ideal, sino un elemento finito de corriente, entonces, en virtud de (44.11), hay que prestar atención para que se cumpla la condición $r \gg l$.

Ahora tomemos la "zona lejana", es decir, investiguemos un campo a distancias $r \gg \lambda$; en este caso $kr \gg 1$. Desechando en las (44.11a) y (44.11b) los términos despreciablemente pequeños, hallamos para $r \gg \lambda$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &\approx -\boldsymbol{\vartheta}_0 \frac{p_m k^2}{4\pi\varepsilon} \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi), \\ \boldsymbol{H} &\approx -\boldsymbol{\alpha}_0 \frac{p_m k^2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{W} \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi) \end{aligned} \tag{44.13}$$

($W = \sqrt{\mu/\varepsilon}$). Este "campo lejano" (§ 43, punto 3) es una onda esférica no homogénea bastante sencilla, cuyos vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ son, como en el caso de una onda plana homogénea (§ 32), perpendiculares a la dirección de propagación, perpendiculares entre sí y se encuentran en una misma fase. Para el campo lejano, $\lambda = 2\pi/k$ es la longitud de onda, ya que a esta distancia la fase varía en 360° según r. Igual que para una onda plana homogénea, la relación entre las amplitudes E_m y H_m es igual a $W = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Todo lo expuesto significa que la onda esférica del dipolo de Hertz se convierte localmente en la ya estudiada onda plana (§ 32).

4. **Características de radiación.** En la zona lejana, el vector complejo de Poynting está dirigido en sentido radial y no posee parte imaginaria; en virtud de (44.13), la densidad media del flujo de energía que se transporta durante la radiación, es igual a

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m, \dot{\boldsymbol{H}}_m^*] = \boldsymbol{r}_0 \frac{p_m^2 k^4}{32\pi^2 \varepsilon^2 W} \frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{r^2} \tag{44.14}$$

(fig. 44.4, *a*). Esta expresión es exacta, de lo que podemos cerciorarnos fácilmente tomando $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ en la forma (44.7), (44.8) (si $\dot{k} = k$). En lo que se refiere a la componente imaginaria $\dot{\boldsymbol{\Pi}}$, ésta

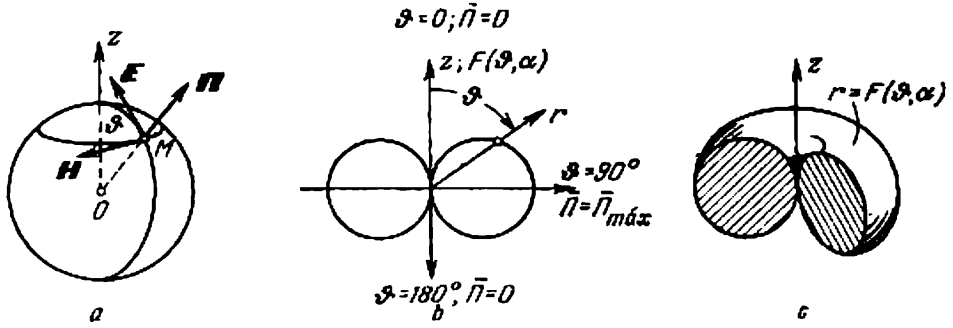


Fig. 44.4.

tiene no sólo componente radial, sino que también transversal ($\dot{\boldsymbol{\Pi}}_\vartheta$); el movimiento oscilatorio de la energía transcurre en los planos meridionales.

Como se desprende de la (44.14), la radiación es máxima en el plano ecuatorial ($\vartheta = 90°$) y no existe en los sentidos axiales

($\vartheta = 0$ y $\vartheta = 180°$). La función

$$F(\vartheta, \alpha) = \sqrt{\overline{\Pi}(\vartheta)} / \sqrt{\overline{\Pi}(90°)} = |\operatorname{sen}\vartheta| \qquad (44.15)$$

nos muestra cómo se distribuye la radiación en el espacio; es, ni más ni menos, que la curva característica de emisión normalizada (41.15). La gráfica $F(\vartheta, \alpha)$, llamada diagrama direccional, tiene para cualquier plano meridional la forma de dos circunferencias adyacentes (fig. 44.4, *b*). Es aún más evidente el diagrama tridimensional de radiación, o sea, la superficie $r = F(\vartheta, \alpha)$; ésta es la superficie de un toro (fig. 44.4, *c*).

Calculemos la potencia media total de radiación P^{Σ}. Confeccionando el flujo medio respecto al tiempo del vector de Poynting que pasa a través de cierta superficie esférica de coordenadas que abarca un radiador eléctrico elemental, tenemos

$$P^{\Sigma} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\Pi}_r r^2 \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta \, d\alpha. \qquad (44.16)$$

Introduciendo en esta expresión $\overline{\Pi}$ (44.14), se tiene

$$\overline{P}^{\Sigma} = \frac{p_m^2 k^4}{16\pi\varepsilon^2 W} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\vartheta \, d\vartheta,$$

y, teniendo en cuenta que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\vartheta \, d\vartheta = \frac{4}{3}$, se halla

$$\overline{P}^{\Sigma} = \frac{4\pi^3}{3} p_m^2 \frac{W}{\varepsilon\mu} \frac{1}{\lambda^4}, \qquad (44.17)$$

o bien,

$$\overline{P}^{\Sigma} = \frac{\pi}{3} (I_m^{ex})^2 W \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \qquad (44.17a)$$

De esta manera, la radiación de un pequeño elemento de corriente ($I_m^{ex} = \text{const}$) aumenta bruscamente al disminuir la condición de calidad cuasiestacionaria $l \ll \lambda$. Con frecuencia, la expresión de la potencia radiada se escribe en forma de la ley de Joule—Lenz

$$P^{\Sigma} = \frac{1}{2} (I_m^{ex})^2 \mathcal{R}^{\Sigma}, \quad \mathcal{R}^{\Sigma} = \frac{2\pi W}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2, \qquad (44.18)$$

llamando $\mathcal{R}^{\Sigma}$, *resistencia de radiación*.

De las (44.14) y (44.17) se desprende que

$$\overline{\Pi}_{máx} = \overline{\Pi}(90°) = \frac{3\overline{P}^{\Sigma}}{8\pi r^2}. \qquad (44.19)$$

El radiador hipotético isótropo (§ 41, punto 1) crea con igual potencia un flujo de energía de una densidad $\overline{\Pi}^0 = \overline{P}^{\Sigma}/4\pi r^2$, es decir, menor una vez y media. Por esta razón, el coeficiente máximo de la directividad de acción de un radiador eléctrico ele-

mental es igual a 3/2:

$$D_{\text{máx}} = D(90°) = \frac{\overline{\Pi}(90°)}{\overline{\Pi}^0} = \frac{3}{2}. \qquad (44.20)$$

5. Conclusión. Dipolo (vibrador) lineal. El primer radiador artificial de ondas electromagnéticas, creado por Enrique Hertz, fue, en realidad, la realización de un radiador eléctrico elemental. En la fig. 44.5, *a* se muestra su aspecto exterior y en la fig. 44.5, *b*,

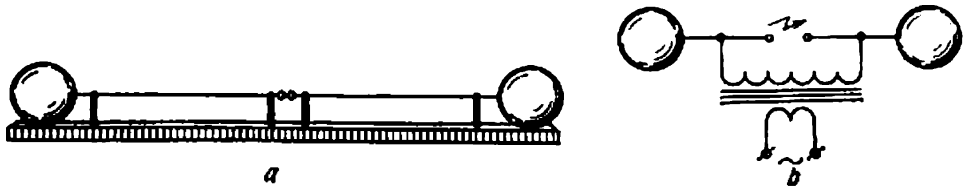


Fig. 44.5.

el esquema de su conexión: las capacidades esféricas en los extremos de los conductores se cargaban de corriente alterna de alta frecuencia que se generaba en el circuito secundario de una bobina de inducción; en tal caso, el intervalo entre las esferas pequeñas se cortocircuitaba mediante una descarga por chispas. Fue también confeccionada por Hertz la teoría de radiación en la que empleó la representación del dipolo oscilante. El obtuvo la figura de las líneas de fuerza eléctricas del campo electromagnético en desarrollo de un radiador elemental que se muestra en la fig. 44.6, *a* [1].

Al estudiar la fig. 44.6, *a*, conviene tener en cuenta que, en sustancia, se trata de un proceso estacionario durante las oscilaciones armónicas de carga y corriente, mostradas en la fig. 44.1, *b*. En este caso, el campo descrito por las fórmulas (44.11a), (44.11b) existe por todo el espacio y la figura representada sólo ilustra el proceso que transcurre relativamente cerca del radiador. En cierto momento *a* (véase también la fig. 44.1, *b*, donde con letras se marcan las fases de las oscilaciones), el campo eléctrico cerca del radiador en un radio de un orden de $\lambda/4$ es extremadamente parecido al campo electrostático de un dipolo. Las líneas de fuerza eléctricas se ensanchan (momentos *b* y *c*) y se deforman de tal modo que en cierto momento se produce su separación del manantial y su autoconexión. Las líneas de fuerza eléctricas cerradas se observan en el momento *d*. No es extraño: en el momento indicado las cargas oscilantes pasan por el valor nulo y las líneas no pueden tener ni comienzo y ni final. El momento *e* es completamente análogo al momento *a*, es decir, se ha producido el "cambio de la polaridad" de las cargas. Pero en la figura ahora también se muestra el campo a distancias $r > \lambda/4$, lo que es el resultado del proceso descrito. De esta manera se forma la onda esférica de un radiador elemental.

[1] Recomendamos al lector la investigación histórica dedicada a Hertz [H.2], de donde han sido tomadas las figs. 44.5, *a* y 44.6, *a*.

En la fig. 44.6, *b* se muestra el campo eléctrico en una región más amplia del espacio. El campo magnético que no ha sido representado por sus líneas de fuerza en las figs. 44.6, *a* y 44.6, *b*, es mucho más sencillo. A partir de cierta distancia, las condensaciones de líneas de fuerza magnéticas que son circunferencias

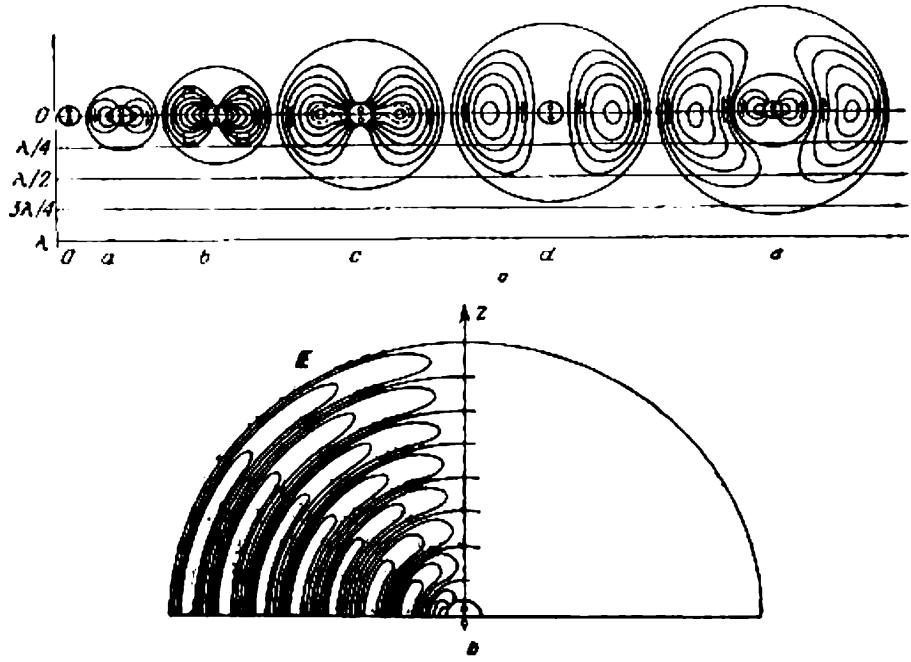


Fig. 44.6.

concéntricas en planos perpendiculares al eje del dipolo coinciden, al desplazarse en direcciones radiales, con las condensaciones de líneas de fuerza eléctricas.

En la zona más alejada se establece la distribución del campo por el ángulo ϑ. Con objeto de apreciar la precisión de las expresiones (44.13), confeccionemos la relación H_m^l/H_m^c (§ 43, punto 3). Como se desprende de la (44.11b)

$$\frac{H_m^l}{H_m^c} = kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}, \qquad (44.21)$$

es decir, por ejemplo, a una distancia r aproximadamente igual a 16λ, dicha relación es igual a 100. A tal distancia del manantial, realmente, ya se ha formado una onda esférica cuyas amplitudes complejas dependen de las coordenadas como $(e^{-ikr} \operatorname{sen} \vartheta)/r$.

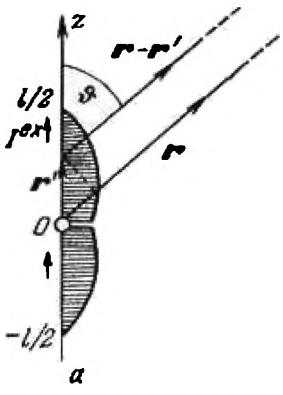
En la actualidad, aún se emplean antenas que, por ser pequeñas en comparación con la longitud de onda, nos recuerdan el radiador eléctrico elemental.

La antena que llamamos dipolo simétrico lineal, consta de dos vástagos conductores alimentados por su parte media y en los que

se establece una onda estacionaria de corriente (fig. 44.7, *a*)

$$I_m^{ex} = \begin{cases} \tilde{I}_m \operatorname{sen} k\left(\frac{l}{2} + z\right), & z < 0, \\ \tilde{I}_m \operatorname{sen} k\left(\frac{l}{2} - z\right), & z > 0. \end{cases} \tag{44.22}$$

Digamos con mayor precisión que la distribución real de la corriente es, generalmente, próxima a la descrita por esta fórmula. En dependencia de la longitud l del dipolo la distribución de la corriente adquiere diferentes formas representadas en la fig. 44.7, *b*. Verdad es que en la mayoría de los casos se emplean dipolos que no son pequeños en comparación con la longitud de onda, como por ejemplo, los de media onda ($l = \lambda/2$).



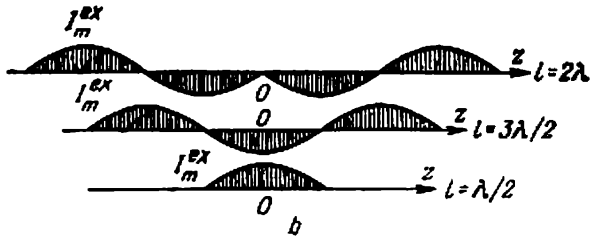


Fig. 44.7.

Hallemos, seguidamente, el campo de un dipolo lineal en un medio no absorbente empleando la expresión (44.5) de la que se desprende que

$$\dot{H}_m^1 = \frac{ik}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I_m^{ex} \frac{[z_0, r_{0q}]\, e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|}\, dz. \tag{44.23}$$

Introduciendo en esta fórmula la función de distribución de la corriente (44.2) y suponiendo que $\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r}$, así como también (véase la fig. 44.7, *a*) que

$$e^{-ik|r-r'|} = e^{-ik(r - z\cos\vartheta)},$$

se tiene

$$\dot{H}_m^1 \approx \alpha_0 \frac{ik\tilde{I}_m \operatorname{sen}\vartheta}{4\pi r} e^{-ikr} \left[\int_{-l/2}^{0} \operatorname{sen} k\left(\frac{l}{2} + z\right) e^{ikz\cos\vartheta}\, dz + \right.$$
$$\left. + \int_{0}^{l/2} \operatorname{sen} k\left(\frac{l}{2} - z\right) e^{ikz\cos\vartheta}\, dz \right] \tag{44.24}$$

(una igualdad rigurosa se obtiene para $r \to \infty$). Como resultado de la integración, hallamos

$$\dot{H}^1_m \approx \alpha_0 \frac{i\dot{I}_m}{2\pi r} e^{-ikr} \frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\vartheta\right) - \cos\frac{kl}{2}}{\operatorname{sen}\vartheta}. \qquad (44.25)$$

El campo lejano resulta ser una onda esférica no homogénea, con una dependencia radial igual a la que observamos en el caso de un radiador elemental. Por esta razón $\dot{E}^1_m = \Phi_0 W \dot{H}^1_m$ de lo que podemos fácilmente cerciorarnos, tomando la primera ecuación de

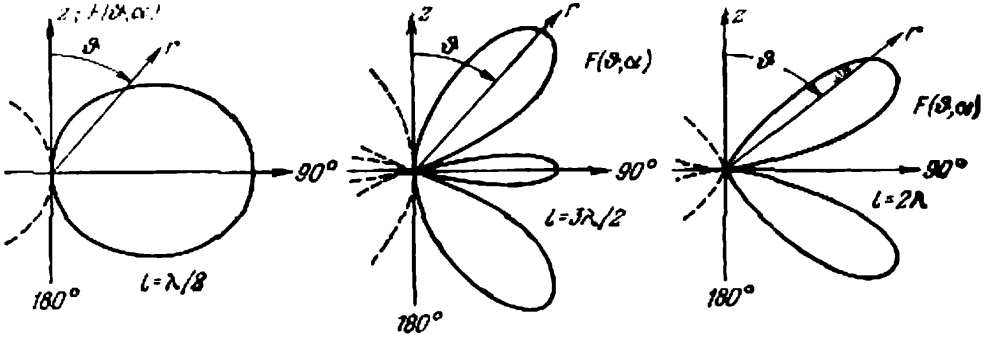


Fig. 44.8.

Maxwell. En lo que se refiere a la distribución angular de la radiación, podemos advertir que al aumentar la longitud l del dipolo, ésta resulta ser mucho más complicada. Este hecho se muestra en los diagramas de radiación para diferentes valores de l representados en la fig 44.8.

§ 45. Radiador magnético elemental

1. Planteamiento del problema y determinación del potencial vectorial. Como otro ejemplo de distribución de la corriente exterior consideramos un contorno circular cerrado de radio a; en la fig. 45.1, a está representado en un sistema esférico de coorde-

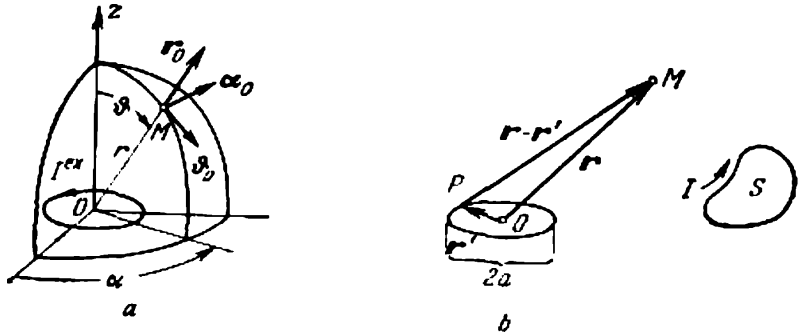


Fig. 45.1.

nadas. Un contorno semejante de corriente continua fue investigado en el § 23, punto 3 y allí fue establecido que en el límite, cuando $a/r \to 0$ $(a^2 I = \text{const})$, dicho contorno se convierte en un dipolo magnético ideal con momento $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{z}_0 \mu I S$ $(S = \pi a^2$, $\boldsymbol{z}_0$ es el versor de la normal positiva al plano de la espira). Por esta razón, podemos suponer que para las oscilaciones armónicas de la corriente, tal contorno será semejante a un dipolo magnético oscilante y obtendremos un *radiador magnético elemental*.

En lugar de la determinación directa del campo, hallemos, primeramente, el potencial vectorial aplicando la fórmula (43.20) que, debido a la constancia de I_m^{ex}, tomará la forma

$$\dot{\boldsymbol{A}}_m(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu I_m^{ex}}{4\pi} \int_L \frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d\boldsymbol{l}'. \tag{45.1}$$

Para la configuración dada (véase la fig. 45.1), las expresiones de las magnitudes $d\boldsymbol{l}$ y $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ en un sistema esférico de coordenadas, son ya conocidas del § 23, punto 3 (fig. 23.2): $d\boldsymbol{l}' = (-\boldsymbol{\alpha}_0 \cos\alpha' + \boldsymbol{R}_0 \operatorname{sen}\alpha')\, a\, d\alpha'$, $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2 = r^2 + a^2 + 2ra \operatorname{sen}\vartheta \cos\alpha'$. Al integrar, sólo la componente azimutal $\boldsymbol{\alpha}_0 a \cos\alpha' d\alpha'$ de la diferencial $d\boldsymbol{l}'$ nos da una aportación que diverge del cero (véase la deducción de la fórmula (23.6). Por esta razón

$$\dot{\boldsymbol{A}}_m(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\alpha}_0 \frac{\mu I_m^{ex}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos\alpha' e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d\alpha'. \tag{45.2}$$

Señalando que $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - r = (r^2 + a^2 + 2ra \operatorname{sen}\vartheta \cos\alpha')^{1/2} - r = a \operatorname{sen}\vartheta \cos\alpha' + O(a^2)$, escribimos:

$$a \cos\alpha' \frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} =$$

$$= a \cos\alpha' \left[\frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{d}{dr}\frac{e^{-ikr}}{r} a \operatorname{sen}\vartheta \cos\alpha' + O(a^2)\right] =$$

$$= \frac{e^{-ikr}}{r} \cos\alpha' \left[a - \left(\frac{1}{r} + ik\right) a^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\alpha' + O(a^3)\right].$$

Vamos a considerar un contorno infinitamente pequeño $(a \to 0)$, cuando $I_m^{ex} a^2 = \text{const}$, o sea, teniendo en cuenta las transformaciones realizadas, buscaremos $\dot{\boldsymbol{A}}_m$ como el límite

$$\dot{\boldsymbol{A}}_m(\boldsymbol{r}) = \lim_{\substack{a \to 0 \\ I_m^{ex} a^2 = \text{const}}} \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{-\mu I_m^{ex}}{4\pi r} e^{-ikr} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left[a - \left(\frac{1}{r} + ik\right) a^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\alpha' + O(a^3)\right] \cos\alpha' d\alpha'.$$

Esta operación nos da

$$\dot{A}_m(r) = \alpha_0 \frac{\dot{\mu} \dot{I}_m^{ex} a^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\dot{k}}{r} \right) e^{-i\dot{k}r} \operatorname{sen} \vartheta. \qquad (45.3)$$

Cuando $\dot{k} \longrightarrow 0$ (es decir, $\omega \longrightarrow 0$), la fórmula (45.3) nos lleva al resultado (23.7) obtenido anteriormente para el caso de corriente continua.

Demos, por fin, a la expresión $\dot{A}_m$ (45.3) la forma siguiente:

$$\dot{A}_m(r) = \alpha_0 \frac{\dot{m}_m}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\dot{k}}{r} \right) e^{-i\dot{k}r} \operatorname{sen} \vartheta, \qquad (45.4)$$

siendo $\dot{m}_m = \dot{\mu} \dot{I}_m^{ex} \pi a^2$. Efectivamente, es natural que la magnitud

$$\dot{m}_m = z_0 \dot{\mu} \dot{I}_m^{ex} S \quad (S = \pi a^2) \qquad (45.5)$$

sea considerada como la amplitud compleja del momento magnético $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_m \cos(\omega t + \varphi)$ de un contorno que junto con la corriente I^{ex} sufre oscilaciones armónicas.

Planteemos la cuestión a qué condiciones la expresión del potencial vectorial (45.3), exacta en el límite, puede ser empleada como expresión aproximada. Primeramente, la distancia hasta el punto de observación debe ser grande en comparación con las dimensiones del contorno a ($r \gg a$). Pero esta condición es insuficiente, ya que al desarrollar $e^{-i\dot{k}|r-r'|}/|r-r'|$ en la serie de Taylor la proximidad entre $e^{-i\dot{k}|r-r'|}$ y $e^{-i\dot{k}r}$ es considerable. Cuando $\dot{k} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$, entonces: $|\dot{k}r - k|r - r'|| < 2\pi a/\lambda$ (fig. 45.1, b). De este modo es, además, necesaria la condición cuasiestacionaria $a \ll \lambda$ del contorno. Sin dificultad vemos una semejanza total con las exigencias enunciadas en el § 44 para un radiador eléctrico elemental.

2. Determinación del campo de radiación. Conociendo $\dot{A}_m$, podemos hallar ahora, en virtud de la (29.22), la amplitud compleja de la intensidad del campo magnético. Empleando la fórmula (S1.23), se obtiene

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{m}_m}{4\pi\dot{\mu}} \left[\boldsymbol{r}_0 \frac{2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + i\dot{k} \right) \cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\dot{k}}{r} - \dot{k}^2 \right) \operatorname{sen} \vartheta \right] e^{-i\dot{k}r}. \qquad (45.6)$$

Lo mismo que en el caso del radiador eléctrico elemental, tengamos en cuenta que fuera del manantial $\dot{\boldsymbol{E}}_m = \frac{1}{i\omega\dot{\varepsilon}} \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_m$. De aquí, haciendo uso de (S1.23), calculamos:

$$\dot{E}_m = -\alpha_0 \frac{\dot{m}_m \omega}{4\pi} \left(\frac{i}{r^2} - \frac{\dot{k}}{r} \right) e^{-i\dot{k}r} \operatorname{sen} \vartheta. \qquad (45.7)$$

Como en el § 44, escribamos, a continuación, la expresión para las intensidades del campo $\boldsymbol{E} = \operatorname{Re} \dot{\boldsymbol{E}}_m e^{i\omega t}$ y $\boldsymbol{H} = \operatorname{Re} \dot{\boldsymbol{H}}_m e^{i\omega t}$,

al no haber absorción ($\dot{k} = k$)

$$\boldsymbol{E} = \alpha_0 \frac{m_m \omega}{4\pi} \frac{k}{r} \left| \frac{1}{kr} \operatorname{sen}(\omega t - kr + \varphi) + \cos(\omega t - kr + \varphi) \right| \operatorname{sen} \vartheta, \quad (45.8a)$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{m_m}{4\pi\mu} \frac{k^2}{r} \left\{ \boldsymbol{r}_0 2 \left[\frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr + \varphi) - \operatorname{sen}(\omega t - kr + \varphi) \right] \frac{1}{kr} \cos \vartheta + \right.$$
$$\left. + \boldsymbol{\vartheta}_0 \left[\left(\frac{1}{k^2 r^2} - 1 \right) \cos(\omega t - kr + \varphi) - \frac{1}{kr} \operatorname{sen}(\omega t - kr + \varphi) \right] \operatorname{sen} \vartheta \right\} \quad (45.8b)$$

$$(\dot{m}_m = m_m e^{i\varphi}).$$

3. **Propiedades de un radiador magnético elemental. Dipolo magnético de Hertz.** La comparación de los resultados, obtenidos anteriormente con las respectivas fórmulas del § 44, nos muestra que la estructura del campo electromagnético repite, en determinado sentido, una representación ya conocida, pero, al parecer, los campos eléctrico y magnético han cambiado sus papeles. Así, en particular, en la zona cercana ($r \ll \lambda$)

$$\boldsymbol{E} \approx \alpha_0 \frac{m_m \omega}{4\pi r^2} \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen}(\omega t + \varphi),$$
$$\boldsymbol{H} = \frac{m_m}{4\pi\mu r^3} (\boldsymbol{r}_0 2 \cos \vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0 \operatorname{sen} \vartheta) \cos(\omega t + \varphi). \quad (45.9)$$

En la zona lejana ($r \gg \lambda$)

$$\boldsymbol{E} \approx \alpha_0 \frac{m_m k^2}{4\pi\mu} W \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi),$$
$$\boldsymbol{H} \approx -\boldsymbol{\vartheta}_0 \frac{m_m k^2}{4\pi\mu} \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi). \quad (45.10)$$

Lo mismo que al tratar un radiador eléctrico elemental, en la zona cercana prepondera un campo electromagnético cuasiestacionario y que, en término medio, no transporta energía (los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ están desfasados en 90°). Además, la estructura del campo magnético es tal como si éste hubiera sido creado por un dipolo magnetoestático con momento $\boldsymbol{m}$. En lo que se refiere al campo eléctrico, su caracter será totalmente comprendido después de introducir el concepto de corriente magnética que se estudiará en el § 46.

En relación al campo electromagnético en la zona lejana, podemos repetir casi todo lo dicho sobre el campo de un radiador eléctrico elemental. Sin embargo, la onda esférica de la zona alejada que localmente puede ser considerada como plana, tendrá otra polarización respecto al eje del dipolo.

Al calcular la densidad media del flujo de energía, se tiene

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m, \dot{\boldsymbol{H}}_m^*] = \boldsymbol{r}_0 \frac{m_m^2 k^4 W}{32\pi^2 \mu^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{r^2} \quad (45.11)$$

(fig. 45.2), compárese con la (44.14). La radiación se distribuye en el espacio de modo absolutamente igual a como se efectuaba

en el caso de un radiador eléctrico elemental. La fórmula (44.15) para la curva característica de emisión y el diagrama de radiación en la fig. 44.4, *b*, *c* conserva su validez. También, como anteriormente, $D_{máx} = D(90°) = {}^3/_2$.

La potencia media total de radiación $\overline{P}^{\Sigma}$, calculada como flujo del vector $\overline{\Pi}$ (45.11) que pasa a través de una superficie esférica de coordenadas, será igual a

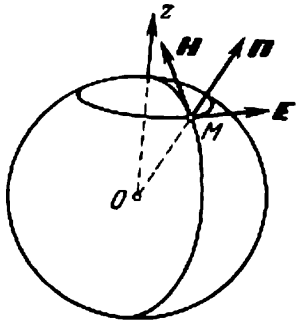


Fig. 45.2.

$$\overline{P}^{\Sigma} = \frac{4\pi^3}{3} m_m^2 \frac{1}{\varepsilon\mu W} \frac{1}{\lambda^4}, \qquad (45.12)$$

compárese con la (44.18) o bien, teniendo en cuenta la (45.5)

$$\overline{P}^{\Sigma} = \frac{4\pi^3}{3} (I_m^{ex})^2 W \frac{S^2}{\lambda^4}. \qquad (45.12a)$$

Escribiendo la (45.12a) en forma de la ley de Joule—Lenz, se obtiene

$$\overline{P}^{\Sigma} = \frac{1}{2} (I_m^{ex})^2 \mathcal{R}^{\Sigma}, \quad \mathcal{R}^{\Sigma} = \frac{8\pi^3}{3} W \frac{S^2}{\lambda^4}. \qquad (45.13)$$

Ahora retornemos a las figs. 44,6, *a*, *b*. En virtud de la absoluta semejanza del campo eléctrico del dipolo de Hertz y el campo magnético del radiador magnético elemental estudiado anteriormente (compárense las fórmulas (44.11a) y (45.8b)), dichas figuras nos dan la representación de las líneas de fuerza magnéticas de este último en su desarrollo. Las líneas de fuerza eléctricas son circunferencias concéntricas en planos perpendiculares al eje del dipolo magnético (paralelamente al plano del contorno de corriente). El radiador magnético elemental también recibe el nombre de *dipolo magnético de Hertz*.

Recordemos, por fin, que cualquier distribución de corriente continua se manifiesta a grandes distancias como un dipolo magnético (§ 23, punto 4) teniendo, además, todo contorno plano del área S un momento $m = z_0 \mu I S$. Podemos presagiar que los resultados obtenidos más arriba son válidos para toda distribución cerrada de corriente alterna I^{ex}, cuyas demensiones sean mucho más pequeñas que la longitud de onda, mientras que la fórmula (45.5) puede ser aplicada también en el caso de un contorno de forma arbitraria con el area S.

En particular, no es difícil apreciar las pérdidas de energía a causa de la radiación para un circuito de corriente alterna del área prefijada (fig. 45.1, *c*). Sea $S = 0{,}01\lambda^2$ (dimensión transversal de un orden de $0{,}1\lambda$). Cuando $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ ($W = 120\pi$) la resistencia de radiación del circuito $\mathcal{R}^{\Sigma}$ resulta ser aproximadamente igual a 3 Ohm. Puede realmente resultar que esta magnitud no sea pequeña en relación con la resistencia óhmica ordinaria del circuito $\mathcal{R}$ o bien, incluso, $\mathcal{R}^{\Sigma} > \mathcal{R}$. En tal caso, la potencia de radiación $\overline{P}^{\Sigma}$ se encuentra en igual correlación respecto a la potencia de pérdidas térmicas $\overline{P}_p$; ésta debe tenerse en cuenta.

La radiación, como efecto dañoso, es una de las causas principales por las que no se emplean contornos abiertos de corriente en las bandas de frecuencias ultraelevadas (ondas decimétricas, centimétricas y más cortas).

§ 46. Corrientes magnéticas. Problema generalizado de la radiación

1. Noción sobre corrientes magnéticas y ecuaciones simétricas de electrodinámica. Recordemos que en la naturaleza no hay cargas magnéticas, lo que se demuestra por la ecuación (3.2): $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$; las líneas de fuerza magnéticas no tienen comienzo ni final. Sin embargo, las nociones sobre las cargas magnéticas ligadas y, respectivamente, sobre los dipolos magnéticos son útiles, ya que en una serie de casos simplifican la descripción de los campos magnéticos. Por ejemplo, en el § 23, puntos 3, 4 se habló de la equivalencia de corrientes continuas a los sistemas de dipolos magnéticos, mientras que en el § 45, el concepto de dipolo magnético fue utilizado al tratar corriente alterna. Ha resultado que un contorno de corriente I^{ex} suficientemente pequeño actúa de forma semejante a un dipolo magnético oscilante que, a su vez, es análogo al dipolo de Hertz. Pero como a este último corresponde un elemento de corriente alterna conductiva (§ 44, punto 1), es natural que a un dipolo magnético oscilante corresponderá un elemento de *corriente magnética* alterna. Después de llegar a tal conclusión podemos, lógicamente, considerar diferentes distribuciones de la corriente magnética caracterizadas por la función $\boldsymbol{j}^m$.

La función llamada *densidad de la corriente magnética* que hemos introducido de tal modo, quedará siendo un concepto formal auxiliar y sería inútil atribuirle cualquier contenido físico. Sin embargo, como más adelante veremos, este concepto es cómodo; por esta razón, vamos a continuar examinando la analogía entre la corriente magnética y la corriente conductiva, escribiendo la ecuación

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{j}}_m^m = -i\omega \dot{\rho}_m^m. \tag{46.1}$$

La función escalar ρ^m, llamada densidad de la carga magnética, es una magnitud igualmente ficticia como $\boldsymbol{j}^m$. La ecuación (46.1), análoga a la (29.13), establece la relación entre $\dot{\rho}_m^m$ y $\dot{\boldsymbol{j}}_m^m$ cuyo evidente prototipo debe ser el movimiento de cargas magnéticas que se conservan al haber oscilaciones armónicas.

La aplicación consecuente de este nuevo concepto nos lleva a continuación, a escribir las ecuaciones de Maxwell (29.11) de tal

modo que éstas resultan ser simétricas:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_m &= i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m + \dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}, \\ \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{E}}_m &= -(i\omega\mu\dot{\boldsymbol{H}}_m + \dot{\boldsymbol{j}}_m^{m}). \end{aligned}\right\} \tag{46.2}$$

Aplicando a la segunda de estas ecuaciones la operación div, en virtud del (S1.32), se obtiene: $0 = -i\omega \operatorname{div} \mu\dot{\boldsymbol{H}}_m - \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{j}}_m^m$, de donde, teniendo en cuenta (46.1),

$$\operatorname{div} \mu\dot{\boldsymbol{H}}_m = \dot{\rho}_m^m. \tag{46.3}$$

es decir, que en los límites de los conceptos que consideramos, las líneas de fuerza magnéticas (las líneas del vector $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$) no son cerradas: ellas comienzan y terminan el las cargas magnéticas.

La indicada circunstancia no debe tomarse como una alteración de las leyes de electromagnetismo. Gracias a ella sólo hemos adquirido cierta flexibilidad al describir campos magnéticos ordinarios. Aclaremos lo expuesto con varios ejemplos. En la fig. 46.1, *a*

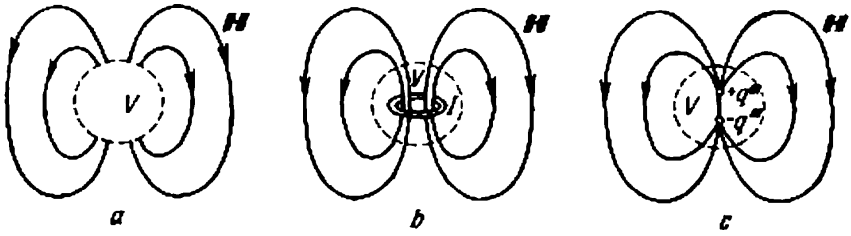


Fig. 46.1.

se muestra esquemáticamente el campo magnético en la zona cercana de un radiador magnético elemental, siendo separada por un círculo una región pequeña V en la que el campo no se estudia. Podemos considerar que el campo dado fue creado por una corriente eléctrica circular y continuar trazando el cuadro de las líneas de fuerza, como representa la fig. 46.1, *b*. Pero al hacer uso del concepto de dipolo magnético, se obtiene la represantación dada en la fig. 46.1, *c*; en este caso las líneas de fuerza no son continuas. Pero al pasar a un manantial infinitamente pequeño (simultáneamente se puede comprimir la región separada: $V \to 0$), los campos que corresponden a las figs. 46.1, *b* y 46.1, *c* coinciden en todo lugar, salvo en un único punto. Dicha coincidencia es realmente total, ya que el punto singular del manantial en el que el campo crece infinitamente, no puede ser examinado. Otro ejemplo, puede ser un campo magnético arbitrario que se radia a cierta región acotada, digamos, a un semiespacio (fig. 46.2, *a*). Es natural que el campo se prolonga en el segundo semiespacio de forma que las líneas de fuerza magnéticas son continuas (fig. 46.2, *b*). Sin embargo, si no es indiferente lo que sucede por debajo de la línea de trazos, podemos representarnos que allí no hay campo, pero

por la superficie de separación está distribuida una carga magnética superficial y en ella comienzan las líneas de fuerza magnéticas (fig. 46.2, *c*).

En virtud del último ejemplo, se plantea el problema sobre la revisión de las condiciones límites obtenidas en el § 7 con objeto de que éstas correspondan a la noción sobre las cargas y corrientes magnéticas. De modo análogo a las magnitudes ξ (7.1)

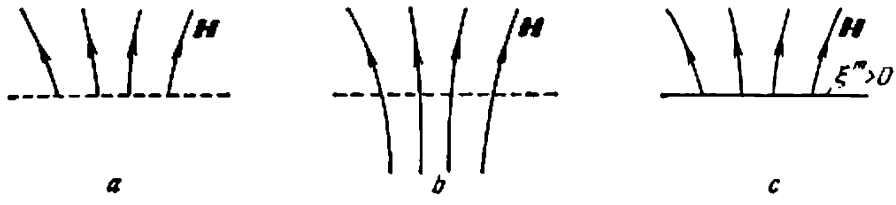


Fig. 46.2.

y η (7.9) introduciremos la densidad de carga magnética superficial ξ^m y la densidad de corriente magnética superficial η^m. Entonces, podemos fácilmente demostrar que en lugar de (7.4a) debe obtenerse una correlación del tipo (7.2a), es decir, en amplitudes complejas

$$\mu_1 \dot{H}_{m\nu 1} - \mu_2 \dot{H}_{m\nu 2} = \dot{\xi}^m_m. \tag{46.4}$$

Del mismo modo, en lugar de la (7.7b) tendrá lugar una correlación semejante a (7.10b); a causa de esto, escribamos:

$$[\nu_0, (\dot{E}_{m1} - \dot{E}_{m2})] = -\dot{\eta}^m_m. \tag{46.5}$$

Las igualdades (46.4) y (46.5) se deducen directamente de las formas integrales de las ecuaciones (46.3) y (46.2) (se trata de la segunda ecuación de Maxwell) por medio del método expuesto en el § 7. Sea el lector el que haga dicha deducción en calidad de ejercicio.

2. **Problema generalizado sobre la radiación.** En el § 43 fue considerado el planteamiento principal del problema sobre la radiación que se desprende al prefijar la función j^{ex} en la zona del manantial. Diferentes ecuaciones de Helmholtz, cuyas soluciones fueron escritas en el § 43, puntos 2—4, se basan en las ecuaciones de Maxwell (29.11). Pero como los manantiales pueden también describirse por medio de las corrientes magnéticas, debe considerarse más general (por lo menos desde un punto de vista formal) el planteamiento del problema haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell (46.2), cuando han sido dadas j^{ex}_m y j^m_m prefijadas, o sea, como suele decirse, al actuar simultáneamente los manantiales eléctrico y magnético. Este problema puede dividirse en dos. Efectivamente, cuando las ecuaciones de Maxwell (46.2) son lineales (¡el medio es lineal!), su solución respecto a $\dot{E}_m$ y $\dot{H}_m$ puede

expresarse en la forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2}, \\ \dot{H}_m &= \dot{H}_{m1} + \dot{H}_{m2}, \end{aligned}\right\} \tag{46.6}$$

donde se suman las soluciones de dos problemas sobre la radiación, basados en las ecuaciones de Maxwell

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{H}_{m1} &= i\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{m1} + \dot{j}_m^{ex}, \\ \operatorname{rot} \dot{E}_{m1} &= -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{m1}, \end{aligned}\right\} \quad (1) \quad \text{y} \quad \left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{H}_{m2} &= i\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{m2}, \\ \operatorname{rot} \dot{E}_{m2} &= -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{m2} - \dot{j}_m^{m}. \end{aligned}\right\} \quad (2) \tag{46.7}$$

Por consiguiente, es posible resolver independientemente el problema "eléctrico" (1) y el "magnético" (2) y de sus soluciones confeccionar la solución del problema general aplicando la (46.6).

La solución del problema (1) al ser constantes $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\mu}$ fue investigado detalladamente en el § 43, puntos 2—4. Escribimos, a continuación, su solución en las dos siguientes formas:

$$\dot{H}_{m1} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|} \right) [\dot{j}_m^{ex}(r'),\ r_{0q}]\, e^{-ik|r-r'|}\, dv', \tag{46.8a}$$

$$\dot{E}_{m1} = -\frac{1}{\omega\dot{\varepsilon}} \operatorname{rot} \dot{H}_{m1} \text{ fuera de } V$$

($\dot{j}_m^{ex} \neq 0$ en V): la (46.8a) se desprende de la (43.14) y entonces

$$\dot{A}_m = \frac{\dot{\mu}}{4\pi} \int_V \frac{\dot{j}_m^{ex}(r')\, e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|}\, dv',$$

$$\dot{H}_{m1} = \frac{1}{\dot{\mu}} \operatorname{rot} \dot{A}_m, \tag{46.8b}$$

$$\dot{E}_{m1} = -\frac{i\omega}{k^2} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{A}_m + \dot{k}^2 \dot{A}_m),$$

lo que se desprende de las (43.11), (29.22) y (29.27).

3. Problema magnético sobre la radiación y principio de dualidad. Comparando los sistemas de ecuaciones de Maxwell (1) y (2) (46.7), señalemos que la primera de las ecuaciones (1) y la segunda de las ecuaciones (2) son idénticas *por su forma*, lo que también podemos decir sobre la segunda de las ecuaciones (1) y la primera de las ecuaciones (2). Además, al sustituir

$$\dot{\varepsilon} \rightleftarrows -\dot{\mu}, \qquad \dot{j}_m^{ex} \rightleftarrows -\dot{j}_m^{m} \tag{46.9a}$$

las indicadas ecuaciones cambian sus papeles. Efectivamente, cambiando también de lugar $\dot{E}_{m1}$, $\dot{H}_{m1}$ y $\dot{E}_{m2}$, $\dot{H}_{m2}$ según el esquema

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{m1} &\rightleftarrows \dot{H}_{m2}, \\ \dot{H}_{m1} &\rightleftarrows \dot{E}_{m2}, \end{aligned}\right\} \tag{46.9b}$$

transformaremos el par de ecuaciones (1) en el par de ecuaciones (2) y viceversa.

El razonamiento efectuado nos muestra que el problema eléctrico (1) y el magnético (2) *son formalmente equivalentes* y, además, como las soluciones (46.8a) o bien (46.8b) del primer problema se determinan totalmente expresando la corriente exterior en forma de la función $\dot{j}_m^{ex}$, existe una solución *formalmente análoga* del segundo problema que también se determina totalmente prefijando $\dot{j}_m^m$.

¿*Cómo hallar la solución del problema magnético?* Con este objeto hay que verificar las sustituciones según las (46.9a), (46.9b) en las fórmulas (46.8a) ó (46.8b); para evitar equivocaciones, en el segundo caso escribiremos $\dot{F}_m$ en lugar de $\dot{A}_m$ (*potencial vectorial magnético*). De esta manera, la solución del problema magnético (2) tiene la siguiente forma:

$$\dot{E}_{m2} = \frac{-1}{4\pi} \int_{\dot{V}} \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|} \right) [\dot{j}_m^m(r'),\ r_{0q}]\, e^{-ik|r-r'|}\, dv',$$

$$\dot{H}_{m2} = \frac{i}{\omega\mu} \operatorname{rot} \dot{E}_{m2} \text{ fuera de } V \qquad (46.10a)$$

($\dot{j}_m^m \neq 0$ en V) o bien,

$$\left.\begin{aligned} \dot{F}_m &= \frac{\dot{\varepsilon}}{4\pi} \int_{\dot{V}} \frac{\dot{j}_m^m(r')\, e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|}\, dv', \\ \dot{E}_{m2} &= -\frac{1}{\dot{\varepsilon}} \operatorname{rot} \dot{F}_m, \\ \dot{H}_{m2} &= -\frac{i\omega}{\dot{k}^2} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{F}_m + \dot{k}^2 \dot{F}_m). \end{aligned}\right\} \qquad (46.10b)$$

La correspondencia mutua de los problemas eléctrico y magnético considerada anteriormente se basa, como suele decirse, en el *principio de dualidad de permutación* de las ecuaciones de Maxwell.

Es extremadamente importante que el principio de dualidad no sólo nos permite obtener la solución general del problema magnético partiendo de la ya obtenida solución general del problema eléctrico (como lo efectuamos anteriormente), sino que también, en cualquier caso concreto, determinar $\dot{E}_{m2}$, $\dot{H}_{m2}$ para una distribución prefijada de $\dot{j}_m^m$, si ya fue resuelto el problema sobre el campo $\dot{E}_{m1}$, $\dot{H}_{m1}$ excitado por una distribución *análoga* de $\dot{j}_m^{ex}$ ($\dot{j}_m^m$ y $\dot{j}_m^{ex}$ son funciones iguales de las coordenadas). Para obtener $\dot{E}_{m2}$, $\dot{H}_{m2}$ es *suficiente efectuar en la solución* acabada la sustitución de (46.9a), (46.9b). Del mismo modo, en cualquier caso concreto se halla la solución para $\dot{E}_{m1}$, $\dot{H}_{m1}$ si son conocidas $\dot{E}_{m2}$, $\dot{H}_{m2}$.

De esta manera, todas las fórmulas que caracterizan el campo de un radiador magnético elemental (§ 45) podrían ser obtenidas en virtud del principio de dualidad de las respectivas expresiones para el radiador eléctrico elemental (§ 44). Indiquemos primeramente que como para este último tenemos la fórmula (44.4), la amplitud compleja del momento del radiador magnético se expresa de modo absolutamente igual por medio de la corriente magnética I^m y la longitud l del dipolo

$$\dot{m}_m = -i\frac{\dot{I}^m_m l}{\omega} z_0. \qquad (46.11)$$

Aplicando el principio de dualidad, de acuerdo con la (46.9a), en las expresiones del campo de un radiador eléctrico conviene sustituir $\dot{I}^{ex}_m$ por $-\dot{I}^m_m$. Al comparar las (44.4) y (46.11), vemos que esto es equivalente a la sustitución

$$\dot{p}_m \rightarrow -\dot{m}_m. \qquad (46.12)$$

Tomando la fórmula (44.7) que expresa la amplitud compleja $\dot{H}_m = \dot{H}_{m1}$ del campo de un radiador eléctrico y sustituyendo $\varepsilon \rightleftarrows -\mu$ y $\dot{p}_m \rightarrow -\dot{m}_m$, se obtiene la amplitud compleja $\dot{E}_m = \dot{E}_{m2}$ del campo de un radiador magnético en forma de la fórmula (45.7). Señalemos que en tal caso, el número de onda k se convierte en sí mismo. Igualmente, de la fórmula (44.8) si $\dot{E}_m = \dot{E}_{m1}$ obtenemos la fórmula (45.6) para $\dot{H}_m = \dot{H}_{m2}$.

§ 47. Manantiales superficiales equivalentes. Principio de Huygens

1. Principio de equivalencia. Las corrientes magnéticas estudiadas anteriormente nos dan un ejemplo de *manantiales equivalentes*. Cualquier distribución de la corriente magnética siempre se confecciona con objeto de reflejar lo más sencillamente posible las condiciones reales de excitación del campo electromagnético; en este caso no es importante que el concepto de corriente magnética no tiene sentido físico.

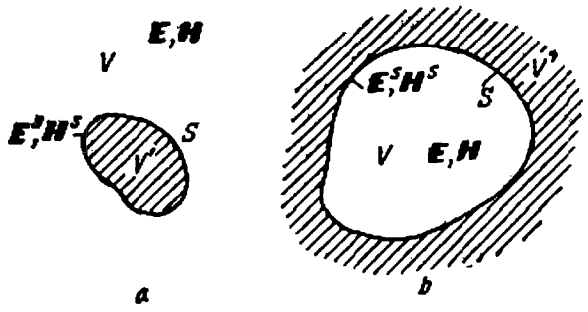


Fig. 47.1.

Pasemos a un método de confección de manantiales equivalentes muy general y que se emplea frecuentemente.

Dado que los manantiales reales de radiación están ubicados en el interior de una región acotada V' (en la fig. 47.1, *a* está rayada) y que debemos hallar el campo en su exterioridad infini-

ta V. Junto con este problema exterior de electrodinámica consideramos también el interior: los manantiales están situados en la exterioridad infinita V' (rayada en la fig. 47.1, *b*), mientras que debemos hallar el campo en la región acotada V. En ambos casos no haremos uso de la información directa sobre los manantiales. Las funciones j_m^{ex} y j_m^m pueden quedar siendo incógnitas, pero suponemos que es conocido el campo en la superficie S que acota V':

$$\vec{E} = \vec{E}^S, \quad \vec{H} = \vec{H}^S. \tag{47.1}$$

Los datos de que disponemos (con ciertas restricciones, véase el § 31) son de antemano suficientes para determinar el campo electromagnético en V. Esto significa que tenemos información que nos permite confeccionar los manantiales equivalentes y sólo debemos hallar el método para resolver el problema.

Señalemos que en virtud de lo dicho puede no interesarnos lo que realmente sucede en V'. En lugar del cuadro real del proceso que transcurre en V', podemos escoger otro cualquiera, ficticio, que simplifique el análisis. Lo más sencillo, es suponer que en esta región *no hay* campo, es decir, como si en S el campo desapareciera:

$$\begin{aligned} &E = E^S, \quad H = H^S \text{ por } V, \\ &E = 0, \quad\ H = 0 \quad \text{por } V'. \end{aligned} \tag{47.2}$$

Es natural que las discontinuidades *de todas* las componentes del campo introducidas artificialmente, exigirán ahora investigaciones especiales. Con este motivo, hagamos uso de las condiciones límites estudiadas en el § 7 y halladas también en el § 46, punto 1. En virtud de (47.2), las fórmulas (7.2a), (7.10b), (46.4) y (46.5) nos dan [1])

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_m = \varepsilon \dot{E}^S_{mv}, \quad \dot{\eta}_m = [\nu_0, \dot{H}^S_m], \\ &\dot{\xi}^m_m = \mu \dot{H}^S_{mv}, \quad \dot{\eta}^m_m = -[\nu_0, \dot{E}^S_m] \end{aligned} \tag{47.3}$$

(ν_0 es la normal exterior respecto a V'). De acuerdo con estas correlaciones a las discontinuidades de los vectores del campo en S, acompañarán corrientes y cargas superficiales tanto eléctricas como magnéticas, cuyas densidades se determinan por medio de las condiciones iniciales (47.1).

El sentido del resultado obtenido es evidente. Considerando en lugar de los manantiales reales ("primarios") ubicados en V' el campo dispuesto en la superficie S que acota V', hemos llegado a la noción de las corrientes y cargas *equivalentes* ("secundarias") distribuidas por S.

2. Determinación del campo de radiación. Principio de Huygens. Así, basándonos en lo expuesto anteriormente y conociendo el campo electromagnético en alguna superficie S que abarca los manantiales reales (región V'), podemos examinar el campo fuera

[1]) En el primer renglón se halla la constante dieléctrica real (véase el § 29, punto 2) si $\alpha = 0$ (§ 29, punto 2); para $\alpha \neq 0$ se efectúa la sustitución $\varepsilon \longrightarrow \varepsilon\, e^{-i\alpha}$.

de ella (región V) considerándolo creado por ciertos manantiales equivalentes ubicados en S.

La propia idea de la introducción de manantiales superficiales equivalentes es cercana al conocido *principio de Huygens*. Recordemos (véase el curso general de física) que debido a este principio, cada punto del frente de onda se toma como manantial de una onda esférica y la posición del frente en el siguiente intervalo de tiempo se halla al confeccionar la superposición de todas las ondas esféricas elementales. En esta enunciación sencillísima y evidente, el principio de Huygens no es exacto. En particular, al sumar las ondas elementales, además del frente que nos es necesario, debe aparecer otro más "por detrás" del inicial, a lo que de forma puramente artificial no prestamos atención. Más adelante (punto 3) retornaremos al principio de Huygens.

Fijemos nuestra atención en el campo electromagnético excitado por los manantiales equivalentes. Vemos con facilidad que el problema electromagnético exterior (véase la fig. 47.1, *a*) tiene, después de introducir estos manantiales, la forma del problema generalizado sobre la radiación (§ 46, punto 2). De este modo, el campo de radiación se representa por medio de las fórmulas (46.6) como la superposición de dos campos $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$, el primero de los cuales se determina por los manantiales eléctricos y el segundo, por los magnéticos. Cada uno de dichos campos se halla según los manantiales, en virtud de las fórmulas (46.8a), (46.10a) o bien (46.8b), (46.10b).

Para poder hacer uso de las indicadas fórmulas, nos son necesarias las funciones j_m^{ex} y j_m^{in}. Su papel lo jugarán las magnitudes $\dot{\eta}_m$ y $\dot{\eta}_m^{in}$ de la fórmula (47.3); como región del manantial tomamos la superficie S. En virtud del (S2.8), $\dot{\eta}_m$ y $\dot{\eta}_m^{in}$ pueden ser expresadas como funciones definidas en volumen, lo que nos permite introducirlas directamente en las integrales de las (46.8a), (46.8b) y (46.10a), (46.10b). Al mismo tiempo, estas últimas se transformarán en superficiales:

$$\dot{\boldsymbol{H}}_{m1} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|}\right)[\dot{\eta}_m(r'), r_{0q}]\, e^{-ik|r-r'|}\, ds' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|}\right) e^{-ik|r-r'|}[[ds', \dot{\boldsymbol{H}}_m^S], r_{0q}], \qquad (47.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}_m = \frac{\mu}{4\pi}\int\limits_S \frac{\dot{\eta}_m(r')\, e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|}\, ds' = \frac{\mu}{4\pi}\int\limits_S \frac{e^{-ik|r-r'|}\,[ds', \dot{\boldsymbol{H}}_m^S]}{|r-r'|}, \qquad (47.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{m2} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|}\right)[\dot{\eta}_m^{in}(r'), r_{0q}]\, e^{-ik|r-r'|}\, ds' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|}\right) e^{-ik|r-r'|}[[ds', \dot{\boldsymbol{E}}_m^S]\, r_{0q}], \qquad (47.6)$$

$$\dot{\boldsymbol{F}}_m = \frac{\dot{\varepsilon}}{4\pi}\int\limits_S \frac{\dot{\eta}_m^{in}(r')\, e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|}\, ds' = \frac{\dot{\varepsilon}}{4\pi}\int\limits_S \frac{e^{-ik|r-r'|}\,[\dot{\boldsymbol{E}}_m^S, ds']}{|r-r'|}. \qquad (47.7)$$

De este modo hemos obtenido todas las fórmulas necesarias para hallar el campo de radiación por medio de los manantiales superficiales equivalentes.

Aquí no nos han hecho falta las cargas superficiales equivalentes, cuyas densidades se prefijan por las fórmulas (47.3). Sin embargo, *hubiéramos podido recurrir a tal método para expresar el campo* de radiación con objeto de tomar en cuenta estas magnitudes que se definen mediante las componentes normales del campo en la *superficie S*. Por *ejemplo*, empleando para determinar $\dot{E}_m$ la fórmula (29.23) en lugar del tercer renglón de la (46.8b), deberíamos haber expresado $\dot{\varphi}_m$ en forma de una integral que contenga $\dot{E}^S_{mv}$.

Además, señalemos que como $\dot{E}^S_m$, $\dot{H}^S_m$ son las soluciones de las ecuaciones de Maxwell (29.11), cuando $\dot{j}^{ex}_m = 0$ en S (en *esta superficie no hay manantiales*), *entonces en las fórmulas* (47.4)—(47.7) se puede eliminar la función $\dot{E}^S_m$, sustituyéndola por $\frac{i}{\omega\varepsilon}\operatorname{rot}\dot{H}^S_m$ o bien, de manera semejante eliminar $\dot{H}^S_m$.

3. Elemento de Huygens. Retornemos al principio de Huygens con objeto de establecer qué debemos entender por manantial elemental en la superficie del frente de una onda electromagnética.

Destaquemos en el plano xOy que es el frente de una onda plana homogénea, el elemento $\Delta S = \Delta x\,\Delta y$ (fig. 47.2, *a*). Reduciendo

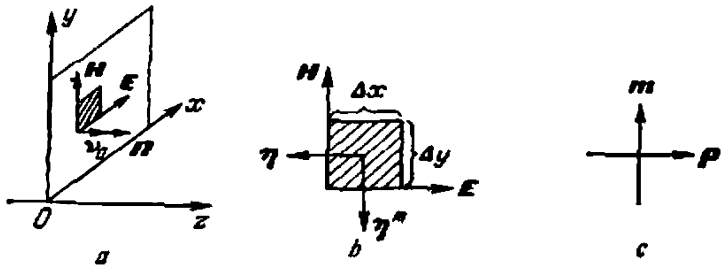


Fig. 47.2.

mentalmente a cero el campo situado tras el frente, de acuerdo con lo expuesto anteriormente llegamos a la deducción de que el campo en el semiespacio delantero puede considerarse creado por las corrientes I^{ex} e I^m distribuidas por xOy y cuya densidad se calcula por las fórmulas (47.3):

$$\dot{\eta}_m = [z_0, \dot{H}^S_m] = -x_0\dot{H}^S_m, \quad \dot{\eta}^m_m = [\dot{E}^S_m, z_0] = -y_0\dot{E}^S_m. \qquad (47.8)$$

Por el *elemento* ΔS *pasan corrientes con amplitudes complejas*

$$\dot{I}^{ex}_m = \dot{\eta}_m\Delta y = -\dot{H}^S_m\Delta y, \quad \dot{I}^m_m = \dot{\eta}^m_m\Delta x = -\dot{E}^S_m\Delta x. \qquad (47.9)$$

Vemos con facilidad que el pequeño elemento del frente de onda que consideramos (para el que por lo menos $\Delta x \ll \lambda$ y $\Delta y \ll \lambda$) debe manifestarse como un conjunto de radiadores elementales

eléctrico y magnético orientados de modo ortogonal (fig. 47.2, *b*,*c*). Las amplitudes complejas de los momentos de los dipolos se determinan por medio de las fórmulas (44.4) y (46.11) colocando las expresiones de las corrientes (47.9) y las longitudes Δx (en la (44.4) y Δy en la (46.11)), así como sustituyendo $\boldsymbol{z}_0$ por $\boldsymbol{x}_0$ en la (44.4) y por $\boldsymbol{y}_0$ en la (46.11):

$$\dot{\boldsymbol{p}}_m = i\frac{\dot{H}_m^S \Delta S}{\omega}\boldsymbol{x}_0 \quad \text{y} \quad \dot{\boldsymbol{m}}_m = i\frac{\dot{E}_m^S \Delta S}{\omega}\boldsymbol{y}_0 \tag{47.10}$$

($\Delta S = \Delta x \Delta y$). Para hallar el campo de radiación de un elemento del frente de onda que llamaremos *elemento de Huygens*, se pueden sumar los campos creados por dos radiadores elementales, cuyos momentos ahora ya conocemos. Sin embargo, si deseamos hacer uso de los resultados obtenidos en los §§ 44, 45, deberíamos expresar los campos en un sistema único de coordenadas, lo que está relacionado con dificultosas transformaciones. El camino más corto es el empleo directo de las fórmulas (47.4) y (47.6).

Sólo tiene real interés el campo lejano (§ 43, punto 3) del elemento de Huygens. En virtud de la (47.4) y teniendo en cuenta la (43.14 a), la amplitud compleja del vector $\boldsymbol{H}$ del campo alejado, creado por la corriente eléctrica del elemento de Huygens, es igual a

$$\dot{\boldsymbol{H}}_{m1}^{l} = \frac{ik}{4\pi}\int\limits_{\Delta S}\frac{[\dot{\boldsymbol{\eta}}_m(\boldsymbol{r}'),\ \boldsymbol{r}_{0q}]\, e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,ds'. \tag{47.11}$$

De forma análoga al § 44, punto 2, $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \approx \frac{1}{r}$, $\boldsymbol{r}_{0q} \approx \boldsymbol{r}_0$ cuando $r \gg \Delta x$, $r \gg \Delta y$ y $e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \approx e^{-ikr}$ para $\Delta x \ll \lambda$, $\Delta y \ll \lambda$. Por esto

$$\dot{\boldsymbol{H}}_{m1}^{l} \approx \frac{ik}{4\pi}[\dot{\boldsymbol{\eta}}_m,\ \boldsymbol{r}_0]\frac{e^{-ikr}}{r}\Delta S. \tag{47.12}$$

Como vemos en la fig. 47.3, $\dot{\boldsymbol{\eta}}_m = -\boldsymbol{x}_0 \dot{H}_m^S = \dot{H}_m^S(-\boldsymbol{R}_0\cos\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\operatorname{sen}\alpha) = \dot{H}_m^S[-(\boldsymbol{r}_0\operatorname{sen}\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0\cos\vartheta)\cos\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\operatorname{sen}\alpha]$. Introduciendo estas expresiones en la (47.12), se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{H}}_{m1}^{l} \approx \frac{ikH_m^S \Delta S}{4\pi}(\boldsymbol{\vartheta}_0\operatorname{sen}\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\cos\vartheta\cos\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{47.13}$$

La amplitud correspondiente del vector $\boldsymbol{E}$ se halla ahora por medio de la primera ecuación de Maxwell, como nos obliga hacerlo el *segundo renglón de la (46.8 a)*. Aplicando la fórmula (S1.23) eliminemos en el resultado obtenido los términos que decrecen con mayor rapidez que $1/r$ (buscamos el campo lejano). Se tiene

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{m1}^{l} \approx \frac{ikH_m^S W \Delta S}{4\pi}(\boldsymbol{\vartheta}_0\cos\vartheta\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\operatorname{sen}\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{47.14}$$

Hallemos, a continuación, el campo lejano creado por la corriente magnética del elemento de Huygens. En virtud de la (47.6)

$$\dot{E}^{1}_{m2} = -\frac{ik}{4\pi}\int\limits_{\Delta S}\frac{[\dot{\eta}^{m}_{m}(r'),\ r_{0Q}]\,e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|}\,ds' \qquad (47.15)$$

y debido a la pequeñez del elemento ΔS (véase más arriba)

$$\dot{E}^{1}_{m2} \approx -\frac{ik}{4\pi}[\dot{\eta}^{m}_{m},\ r_0]\frac{e^{-ikr}}{r}\Delta S. \qquad (47.16)$$

De la fig. 47.3 se desprende que $\dot{\eta}^{m}_{m} = -\boldsymbol{y}_0\,\dot{E}^{S}_{m} = \dot{E}^{S}_{m}\times$ $\times(-\boldsymbol{R}_0\operatorname{sen}\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\cos\alpha) = \dot{E}^{S}_{m}[-(\boldsymbol{r}_0\operatorname{sen}\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}_0\cos\vartheta)\operatorname{sen}\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\cos\alpha]$,

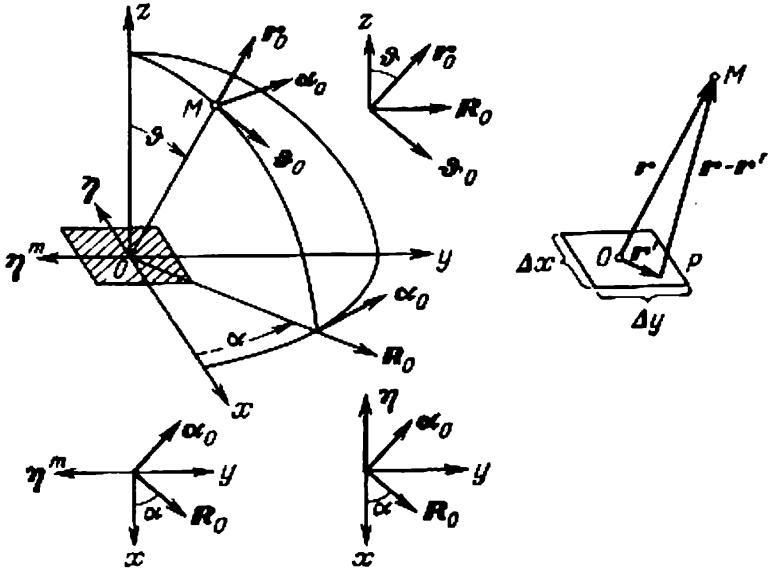


Fig. 47.3.

de modo que la expresión (47.15) nos da

$$\dot{E}^{1}_{m2} \approx \frac{ik\dot{E}^{S}_{m}\Delta S}{4\pi}(\boldsymbol{\vartheta}\cos\alpha - \boldsymbol{\alpha}_0\cos\vartheta\operatorname{sen}\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (47.17)$$

Después de determinar $\dot{E}^{1}_{m2}$, partiendo de la segunda ecuación de Maxwell, hallamos $\dot{H}^{1}_{m2}$ (véase el segundo renglón de la (46.10 a)). Despreciando la componente radial que decrece como $1/r^2$, se halla

$$\dot{H}^{1}_{m2} \approx \frac{ik\dot{E}^{S}_{m}\Delta S}{4\pi\dot{W}}(\boldsymbol{\vartheta}_0\cos\vartheta\operatorname{sen}\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\cos\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (47.18)$$

Las fórmulas (47.13), (47.14), (47.17) y (47.18) contienen todos los datos para determinar el campo de radiación lejano completo del elemento de Huygens mediante la (46.6). Tomando en consideración que en una onda plana homogénea $\dot{E}_m = \dot{W}\dot{H}_m$ y, por con-

siguiente,

$$\dot{E}_m^S = \dot{W}\, \dot{H}_m^S, \tag{47.19}$$

se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m^1 &\approx \frac{ik\dot{E}_m^S\,\Delta S}{4\pi}(1+\cos\vartheta)(\vartheta_0\cos\alpha-\alpha_0\operatorname{sen}\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{H}_m^1 &\approx \frac{ik\dot{E}_m^S\,\Delta S}{4\pi\dot{W}}(1+\cos\vartheta)(\vartheta_0\operatorname{sen}\alpha+\alpha_0\cos\alpha)\frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{47.20}$$

De la (47.20) se desprende que

$$E_m^1 = H_m^1 |\dot{W}| = \frac{|k|\,E_m^S\,\Delta S}{4\pi r} e^{-k''r}(1+\cos\vartheta),$$

y al no haber absorción

$$\overline{\Pi} = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}[\dot{E}_m,\ \dot{H}_m^*] = r_0\,\frac{k^2(E_m^S)^2\,\Delta S^2}{32\pi^2 W}\,\frac{(1+\cos\vartheta)^2}{r^2}, \tag{47.21}$$

por lo que la curva característica de emisión del elemento de Huygens

$$F(\vartheta,\ \alpha) = \frac{\sqrt{\overline{\Pi}(\vartheta)}}{\sqrt{\overline{\Pi}(0)}} = \frac{1+\cos\vartheta}{2}. \tag{47.22}$$

La radiación no varía en dependencia del ángulo α y no existe en dirección inversa ($\vartheta = 180°$). El diagrama de radiación en cualquier plano meridional es una *cardioide* (fig. 47.4, *a*); el diagrama cúbico correspondiente se representa en la fig. 47.4, *b*.

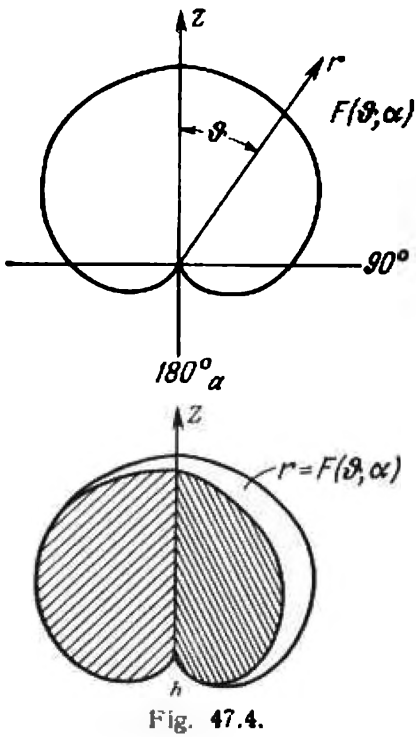


Fig. 47.4.

En conclusión señalemos que al emplear la noción sobre las corrientes equivalentes, en particular en la teoría de las antenas, con frecuencia se introduce el concepto del "elemento de Huygens generalizado". Sea en cierta superficie

$$\dot{E}_m^S = \dot{Z}\,[\dot{H}_m^S,\ \nu_0]. \tag{47.23}$$

Introduciendo un sistema local de coordenadas de forma que $\nu_0 = z_0$, consideremos un pequeño elemento de superficie ΔS de la misma manera que lo hicimos anteriormente al estudiar un elemento del plano del frente de una onda plana homogénea. En tal caso obtendremos de nuevo las fórmulas (47.13), (47.14), (47.17) y (47.18), pero en lugar de (47.19), en virtud

de la (47.23), tendremos: $\dot{E}_m^S = Z\dot{H}_m^S$. De este modo, basándonos en la (46.6), en lugar de las (47.20), obtenemos

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_m^1 &\approx \frac{ikE^S\,\Delta S}{4\pi}\left|\vartheta_0\left(\frac{\dot{W}}{\dot{Z}}\cos\vartheta+1\right)\cos\alpha-\right.\\
&\left.-\alpha_0\left(\frac{\dot{W}}{\dot{Z}}+\cos\vartheta\right)\operatorname{sen}\alpha\right|\frac{e^{-ikr}}{r},\\
\dot{H}_m^1 &\approx \frac{ikE^S\,\Delta S}{4\pi\dot{Z}}\left|\vartheta_0\left(1+\frac{\dot{Z}}{\dot{W}}\cos\vartheta\right)\operatorname{sen}\alpha+\right.\\
&\left.+\alpha_0\left(\cos\vartheta+\frac{\dot{Z}}{\dot{W}}\right)\cos\alpha\right|\frac{e^{-ikr}}{r}.
\end{aligned}\right\} \qquad (47.24)$$

De este modo se expresa el campo lejano de radiación del elemento de Huygens generalizado.

§ 48. Principio de reciprocidad

1. Lema de Lorentz. Obtengamos primeramente una importante correlación que surge al investigar los campos de dos manantiales.

Supongamos que en cierto medio prefijado hay un manantial caracterizado por la función de la densidad de la corriente ajena $\dot{j}_1^{ex}$ que excita un campo $\dot{E}_1$, $\dot{H}_1$. Al mismo tiempo, en virtud de (29.11),

$$\operatorname{rot}\dot{H}_{m1} = i\omega\varepsilon\dot{E}_{m1} + \dot{j}_{m1}^{ex}, \quad \operatorname{rot}\dot{E}_{m1} = -i\omega\mu\dot{H}_{m1}. \qquad (48.1)$$

Para este mismo medio con otro manantial (densidad de la corriente exterior $\dot{j}_2^{ex}$), se tiene

$$\operatorname{rot}\dot{H}_{m2} = i\omega\varepsilon\dot{E}_{m2} + \dot{j}_2^{ex}, \quad \operatorname{rot}\dot{E}_{m2} = -i\omega\mu\dot{H}_{m2}. \qquad (48.2)$$

Sin reflexionar, por el momento, sobre el contenido físico de las operaciones a realizar, multipliquemos la primera igualdad de las (48.1) por $\dot{E}_{m2}$ y la segunda, por $\dot{H}_{m2}$ y, de modo análogo, la primera igualdad (48.2), por $\dot{E}_{m1}$ y la segunda, por $\dot{H}_{m1}$. Considerando a pares las ecuaciones primera y cuarta, segunda y tercera, después de sustraer los términos correspondientes y aplicando las fórmulas del (S1.31), se obtiene

$$\operatorname{div}[\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m1}] = -i\omega\mu\dot{H}_{m2}\dot{H}_{m1} - i\omega\varepsilon\dot{E}_{m1}\dot{E}_{m2} - \dot{j}_{m1}^{ex}\dot{E}_{m2} \qquad (48.3)$$

y

$$\operatorname{div}[\dot{E}_{m1}, \dot{H}_{m2}] = -i\omega\mu\dot{H}_{m1}\dot{H}_{m2} - i\omega\varepsilon\dot{E}_{m2}\dot{E}_{m1} - \dot{j}_{m2}^{ex}\dot{E}_{m1}. \qquad (48.4)$$

Como anteriormente en este capítulo, vamos a tener sólo en cuenta los medios isótropos y lineales; y como en este caso ε y μ son coeficientes escalares que no dependen del campo, entonces no habrá diferencia entre $\mu\dot{H}_{m2}\dot{H}_{m1}$ y $\mu\dot{H}_{m1}\dot{H}_{m2}$, $\varepsilon\dot{E}_{m2}\dot{E}_{m1}$ y $\varepsilon\dot{E}_{m1}\dot{E}_{m2}$.

Por esta razón, de las (48.3) y (48.4) se desprende que

$$\operatorname{div}\{[\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m1}]-[\dot{E}_{m1}\dot{H}_{m2}]\} = j^{ex}_{m2}\dot{E}_{m1} - j^{ex}_{m1}\dot{E}_{m2}. \qquad (48.5)$$

Esta es la enunciación diferencial del *lema de Lorentz*. Integrando este resultado respecto a cierto volumen V que abarca los manantiales ($j^{ex}_1 = 0$ y $j^{ex}_2 = 0$ fuera de V) y aplicando el teorema de Ostrogradski—Gauss, obtenemos la enunciación integral del lema de Lorentz

$$\oint_S \{[\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m1}]-[\dot{E}_{m1}, \dot{H}_{m2}]\}\, ds = \int_V (j^{ex}_{m2}\dot{E}_{m1} - j^{ex}_{m1}\dot{E}_{m2})\, dv. \qquad (48.6)$$

Hasta el momento no hemos precisado el carácter de la región espacial en la que se encuentran los manantiales y existen los campos descritos por las ecuaciones (48.1) y (48.2); en caso particular, podemos decir que se trata de una región energéticamente aislada. Si se estudia un espacio infinito, entonces en la (48.6) podemos pasar al límite para $V \to \infty$ reduciendo, respectivamente, al infinito la superficie de separación S. Con todo, la integral de superficie se elimina. Efectivamente, esto se ve de inmediato si hay absorción y los campos decrecen más rápidamente que $1/r$ (§ 31). Pero sin absorción, la integral también se reduce a cero para aquellos campos que satisfacen la condición de radiación (Suplemento 5, punto 3, § 43, punto 3). En este caso, cuando $r \to \infty$, los campos tienen el carácter de ondas esféricas divergentes

$$\dot{H}_{m1} = A_1 \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \dot{E}_{m1} = W[A_1, r_0]\frac{e^{-ikr}}{r},$$
$$\dot{H}_{m2} = A_2 \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \dot{E}_{m2} = W[A_2, r_0]\frac{e^{-ikr}}{r},$$

donde A_1 y A_2 no dependen de r y son ortogonales a r_0. La expresión subintegral que toma la forma

$$W\{[[A_2, r_0], A_1]-[[A_1, r_0], A_2]\}\frac{e^{-i2kr}}{r^2}\, ds,$$

es igual a cero, lo que se comprueba con facilidad aplicando la fórmula (S1.5).

De este modo, cuando el espacio es infinito, la integral de volumen en la (48.6) resulta ser nula y, por consiguiente,

$$\int_V j^{ex}_{m2}\dot{E}_{m1}\, dv = \int_V j^{ex}_{m1}\dot{E}_{m2}\, dv, \qquad (48.7)$$

además, la integración se divulga prácticamente a la región de los manantiales. A continuación, como la integral de volumen en la (48.6) queda invariable para cualquier región que abarca los manantiales, al ser igual a cero, entonces, la integral de superficie también será nula a condiciones análogas; de aquí

$$\oint_S [\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m1}]\, ds = \oint_S [\dot{E}_{m1}, \dot{H}_{m2}]\, ds \qquad (48.8)$$

para toda superficie S que abarca los manantiales situados en un espacio infinito.

Señalemos por fin que en lugar de las ecuaciones iniciales (48.1) y (48.2), hubiéramos podido tomar las ecuaciones generalizadas de Maxwell (46.2) que contienen las corrientes magnéticas. Es fácil comprobar (lo que se recomienda al lector) que la correspondiente forma generalizada del lema de Lorentz (48.5) tiene la forma

$$\operatorname{div}\{[\dot{\boldsymbol{E}}_{m2}, \dot{\boldsymbol{H}}_{m1}]-[\dot{\boldsymbol{E}}_{m1}, \dot{\boldsymbol{H}}_{m2}]\} = \\ = j^{\text{ex}}_{m2}\dot{\boldsymbol{E}}_{m1} - j^{\text{ex}}_{m1}\dot{\boldsymbol{E}}_{m2} - j^{\text{m}}_{m2}\dot{\boldsymbol{H}}_{m1} + j^{\text{m}}_{m1}\dot{\boldsymbol{H}}_{m2}. \qquad (48.9)$$

Al integrar respecto a cierta región V, tenemos

$$\oint_S \{[\dot{\boldsymbol{E}}_{m2}, \dot{\boldsymbol{H}}_{m1}]-[\dot{\boldsymbol{E}}_{m1}, \dot{\boldsymbol{H}}_{m2}]\}\, d\boldsymbol{s} = \\ = \int_V (j^{\text{ex}}_{m2}\dot{\boldsymbol{E}}_{m1} - j^{\text{ex}}_{m1}\dot{\boldsymbol{E}}_{m2} - j^{\text{m}}_{m2}\dot{\boldsymbol{H}}_{m1} + j^{\text{m}}_{m1}\dot{\boldsymbol{H}}_{m2})\, dv. \qquad (48.10)$$

En el caso de un espacio infinito

$$\int_V (j^{\text{ex}}_{m2}\dot{\boldsymbol{E}}_{m1} - j^{\text{ex}}_{m1}\dot{\boldsymbol{E}}_{m2} - j^{\text{m}}_{m2}\dot{\boldsymbol{H}}_{m1} + j^{\text{m}}_{m1}\dot{\boldsymbol{H}}_{m2})\, dv = 0, \qquad (48.11)$$

lo que no exige una deducción especial, ya que la integral de superficie en la (48.10) es la misma que en la (48.6) y ya fue establecido que esta última se reduce a cero.

2. **Principio de reciprocidad.** El sentido de diferentes enunciaciones del lema de Lorentz se reduce al *principio de reciprocidad* que juega importante papel en la electrodinámica aplicada y, principalmente, en la teoría de las antenas.

La singularidad general de las correlaciones obtenidas anteriormente (48.5)—(48.8), consiste en su *simetría* respecto a las magnitudes $\dot{\boldsymbol{E}}_{m1}$, $\dot{\boldsymbol{H}}_{m1}$ y j^{ex}_{m1} por un lado y las magnitudes $\dot{\boldsymbol{E}}_{m2}$, $\dot{\boldsymbol{H}}_{m2}$ y j^{ex}_{m2}, por otro. Señalemos que las fórmulas (48.5)—(48.11) son justas independientemente de si consideramos los campos $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ en dos problemas no relacionados mutuamente o bien que existen simultáneamente, de tal forma que el campo resultante es igual a $\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2$.

Sea que las regiones de distribución de los manantiales están espacialmente separadas, o sea, que $j^{\text{ex}}_1 \neq 0$ en V_1 y $j^{\text{ex}}_2 \neq 0$ en V_2 (fig. 48.1, *a*). En tal caso, la igualdad (48.7) toma la forma

$$\int_{V_1} j^{\text{ex}}_{m1}\dot{\boldsymbol{E}}_{m2}\, dv = \int_{V_2} j^{\text{ex}}_{m2}\dot{\boldsymbol{E}}_{m1}\, dv. \qquad (48.12)$$

La integral izquierda puede ser considerada como cierta característica de la interacción del campo de primer manantial con el del segundo manantial, mientras que la integral derecha, como la misma característica de la interacción del campo del segundo manantial

con el del primero. Como vemos, para cualesquiera dos manantiales tales características son iguales.

Tomemos los manantiales en forma de corrientes rectilíneas (fig. 48.1, *b*), cuyas densidades tienen el aspecto (S2.9)

$$j^{ex}_{m1} = \tau_{01} I^{ex}_{m1} \delta(r - r_1), \quad j^{ex}_{m2} = \tau_{02} I^{ex}_{m2} \delta(r - r_2). \qquad (48.13)$$

siendo las funciones-delta bidimensionales. La igualdad (48.12) nos da al mismo tiempo

$$\int_{l_1} I^{ex}_{m1} \dot{E}_{m2}\, dl = \int_{l_2} I^{ex}_{m2} \dot{E}_{m1}\, dl. \qquad (48.14)$$

Si a lo largo de los segmentos l_1 y l_2 las corrientes no varían (por su amplitud y fase), como tiene lugar en el caso de los radiadores elementales, entonces

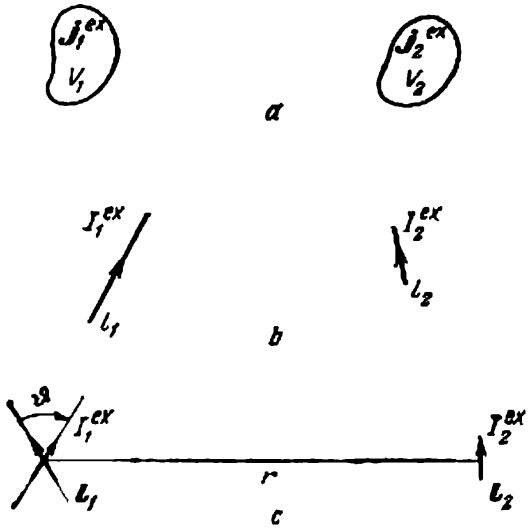


Fig. 48.1.

$$I^{ex}_{m1} \int_{l_1} \dot{E}_{m2}\, dl = I^{ex}_{m2} \int_{l_2} \dot{E}_{m1}\, dl \qquad (48.15)$$

o bien,

$$I^{ex}_{m1} \dot{U}^{(1)}_{m2} = I^{ex}_{m2} \dot{U}^{(2)}_{m1}, \qquad (48.15a)$$

donde las magnitudes $\dot{U}^{(1)}_{m2}$ y $\dot{U}^{(2)}_{m1}$ expresadas por las integrales en la (48.15), pueden ser consideradas como las amplitudes complejas de tensión. Así, $U^{(1)}_{m2}$ es la tensión en el segmento l_1 creada por el campo de la corriente I^{ex}_2, $U^{(2)}_1$ tiene el correspondiente sentido. En el caso de radiadores elementales ($l_1 \ll \lambda$, $l_2 \ll \lambda$)

$$\dot{U}^{(1)}_{m2} = \dot{E}_{m2} l_1 \quad \text{y} \quad \dot{U}^{(2)}_{m1} = \dot{E}_{m1} l_2. \qquad (48.16)$$

El término "tensión" que hemos anteriormente empleado es, en cierto grado, convencional, pero su contenido se comprende fácilmente. Conviene tener en cuenta que la tensión en el segmento l_1 y que hemos llamado $U^{(1)}_2$ está condicionada por el campo del segundo radiador E_2 *sin ninguna relación* con lo que en realidad está ubicado en el segmento l_1. Y no nos planteamos la pregunta de cuál será el campo total en l_1 al haber dos radiadores. Pero a pesar de todo, si en el campo E_2 situar en lugar de l_1 un elemento conductor pasivo, o sea, una "antena receptora", en dicho elemento se creará una corriente proporcional a $U^{(1)}_2$. ¿A qué deducciones nos permite llegar el principio de reciprocidad? En primer lugar, dividiendo los dos miembros de la (48.15a) por $I_{m1} I_{m2}$, se

tiene

$$\frac{\dot{U}_{m2}^{(1)}}{\dot{I}_{m2}^{ex}} = \frac{\dot{U}_{m1}^{(2)}}{\dot{I}_{m1}^{ex}}. \qquad (48.17)$$

Podemos interpretar estas razones como las *resistencias mutuas* de los radiadores y escribir:

$$\dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{12}. \qquad (48.17a)$$

De la (48.15a) o bien la (48.17) se desprende que para iguales corrientes los radiadores excitan, el uno en el otro, iguales tensiones.

A continuación, sean dos radiadores elementales orientados como se muestra en la fig. 48.1, *c*, y que están distanciados a $r \gg \lambda$. Haciendo girar el primer radiador, podemos constatar que la tensión $U_1^{(2)}$ varía de modo proporcional a su característica de directividad $F(\vartheta) = |\operatorname{sen}\vartheta|$. Pero, en virtud de la (48.15a), $\dot{U}_{m2}^{(1)} = \frac{\dot{I}_{m2}^{ex}}{\dot{I}_{m1}^{ex}} \dot{U}_{m1}^{(2)}$, es decir, la tensión $\dot{U}_1^{(1)}$ inducida en el primer elemento como en una antena receptora es proporcional a $\dot{U}_1^{(2)}$ y, por consiguiente, a la función $F(\vartheta) = |\operatorname{sen}\vartheta|$. En la teoría de las antenas esta tesis se divulga a las antenas de todo tipo; se dice que la característica de directividad en los regímenes de transmisión y recepción queda invariable.

En esencia, para generalizar el principio de reciprocidad en la forma expuesta en la (48.15a) respecto a cualquier antena, sólo es necesario renunciar la igualdad (48.12) introduciendo, por uno u otro método, la noción sobre las corrientes y tensiones equivalentes.

Es muy importante que las formas (48.5)—(48.12) del lema de Lorentz son válidas para toda clase de medios isótropos lineales. De esta manera, el principio de reciprocidad conserva su sentido, cuando el medio, siendo isótropo y lineal, *es no homogéneo*. Podemos, por ejemplo, considerar radiadores en el espacio libre, donde hay cuerpos ajenos, cuya acción se tiene en cuenta indirectamente. Este problema se tratará posteriormente, en relación con los fenómenos de difracción.

§ 49. Sistemas de radiadores

1. Planteamiento del problema. Sistemas discretos. Si tenemos un sistema de radiadores cada uno de los cuales ha sido estudiado por separado, su investigación se reduce a la aplicación del principio de superposición (§ 13, punto 3).

En la fig. 49.1, *a*, los radiadores unidos en un sistema, están convencionalmente representados por puntos; podemos primeramente suponer que dichos radiadores son elementales y, en general, distintos. El punto de observación $M(r)$, en el que se determina el campo,

se prefija alejado a una gran distancia ($r \gg r_p$), de forma que la dirección hacia $M(r)$ que se caracteriza por las coordenadas esféricas angulares ϑ y α es prácticamente igual para todos los radiadores (la elección del origen O es arbitraria).

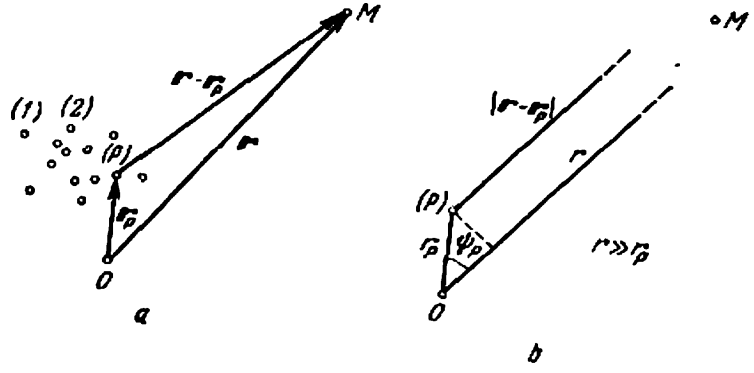


Fig. 49.1.

Cada uno de los radiadores crea una onda esférica y, por esta razón, su campo en el punto $M(r)$ puede caracterizarse por amplitud compleja

$$\dot{E}_{mp}(r) = \dot{A}_{mp}\dot{F}_p(\vartheta, \alpha)\frac{e^{-ik|r-r_p|}}{|r-r_p|}, \qquad (49.1)$$

siendo $\dot{A}_{mp} = A_{mp}e^{i\varphi_p}$ un factor escalar constante que determina amplitud y fase de oscilaciones del radiador dado (p-ésimo) mientras que la función $\dot{F}_p(\vartheta, \alpha)$ no sólo indica la dirección de E, sino que nos da la curva característica de emisión normalizada (§ 41, punto 1) $F_p(\vartheta, \alpha) = |\dot{F}_p(\vartheta, \alpha)|$. Vamos a considerar que el medio no es *absorbente*.

Para hallar el campo de un sistema de radiadores, sumemos todas las $\dot{E}_{mp}$

$$\dot{E}_m = \sum_{p=1}^{N} \dot{A}_{mp}\dot{F}_p(\vartheta, \alpha)\frac{e^{-ik|r-r_p|}}{|r-r_p|}. \qquad (49.2)$$

En el caso más sencillo y más divulgado, los radiadores son idénticos y están orientados de un mismo modo, es decir, $\dot{F}_p(\vartheta, \alpha) = \dot{F}(\vartheta, \alpha)$ para todos los valores de p. Teniendo también en cuenta que $\frac{1}{|r-r'|} \approx \frac{1}{r}$ y $|r-r_p| \approx r - r_p\cos\psi_p$, siendo ψ_p el ángulo entre r y r_p (fig. 49.1, *b*) en tal caso, se obtiene

$$\dot{E}_m \approx \dot{F}(\vartheta, \alpha)\dot{f}(\vartheta, \alpha)\frac{e^{-ikr}}{r}, \qquad (49.3)$$

siendo

$$\dot{f}(\vartheta, \alpha) = \sum_{p=1}^{N} \dot{A}_{mp}e^{-ikr_p\cos\psi_p}, \quad \psi_p = \psi_p(\vartheta, \alpha). \qquad (49.4)$$

La función $f(\vartheta, \alpha)$ tiene un sentido extremadamente sencillo: si los radiadores fuesen isótropos ($\dot{F}(\vartheta, \alpha) = \text{const}$), dicha función describiría totalmente la dependencia entre $\dot{E}_m$ y Π y las coordenadas angulares; entonces la función $\dfrac{|\dot{f}(\vartheta, \alpha)|}{|\dot{f}(\vartheta, \alpha)|_{\text{máx}}} = \dfrac{f(\vartheta, \alpha)}{f(\vartheta, \alpha)_{\text{máx}}}$ sería la curva característica de emisión normalizada del sistema de radiadores. La función $\dot{f}(\vartheta, \alpha)$ se denomina *factor del sistema* o *interferencial*. La curva característica de emisión normalizada del sistema es

$$\Phi(\vartheta, \alpha) = F(\vartheta, \alpha) \frac{f(\vartheta, \alpha)}{f(\vartheta, \alpha)_{\text{máx}}}. \qquad (49.5)$$

2. Sistema de dos radiadores elementales. Consideremos un sistema de dos radiadores eléctricos elementales situándolos como

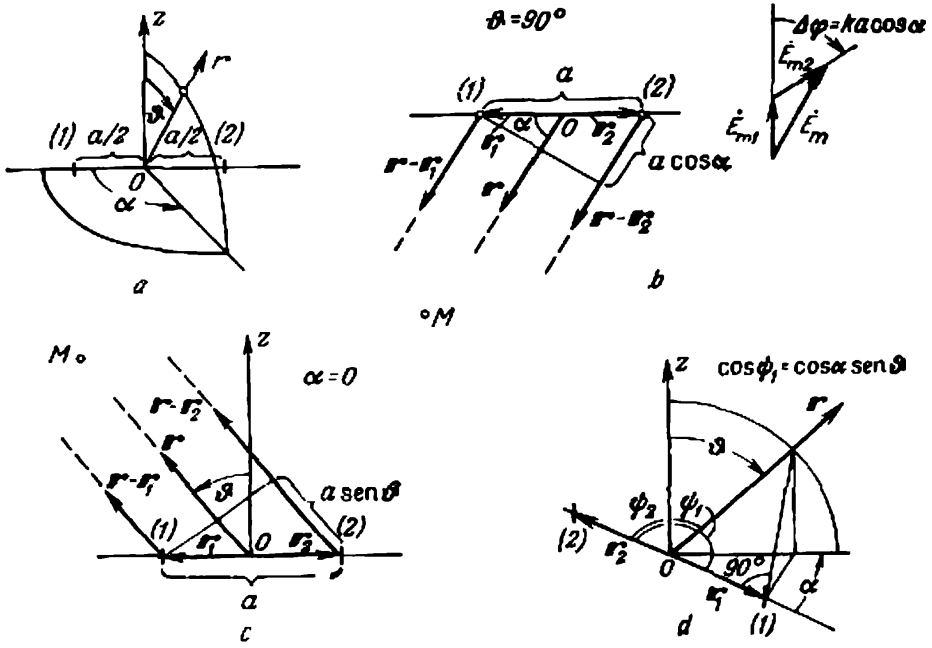


Fig. 49.2.

se muestra en la fig. 49.2, *a*. En virtud de la (44.13), en este caso la fórmula (49.3) nos da

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2} = -\dot{\vartheta}_0 \frac{k^2}{4\pi\varepsilon} \operatorname{sen}\vartheta \frac{e^{-ikr}}{r} (\dot{p}_{m1} e^{ikr_1 \cos\psi_1} + \dot{p}_{m2} e^{ikr_2 \cos\psi_2}). \qquad (49.6)$$

Aquí, $\dot{F}(\vartheta, \alpha) = \dot{\vartheta}_0 \operatorname{sen}\vartheta$; $\dot{A}_{mp} = -\dfrac{k^2 \dot{p}_{mp}}{4\pi\varepsilon}$ $(p = 1,2)$;

$$r_1 = r_2 = \frac{a}{2}.$$

Sean los radiadores cofásicos y tengan iguales amplitudes ($\dot{p}_{m1} = \dot{p}_{m2} = \dot{p}_m$). En el caso general de disposición del punto $M(r)$, como vemos en la construcción de la fig. 49.2, d $\cos\psi_1 = \operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha$ y $\psi_2 = 180° - \psi_1$. Introduciendo estos datos en la (49.6), se obtiene

$$\dot{E}_m = -\dot{\vartheta}_0 \frac{\dot{p}_m k^2}{2\pi\varepsilon} \operatorname{sen}\vartheta \cos\left(\frac{ka}{2}\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha\right)\frac{e^{-ikr}}{r}, \qquad (49.7)$$

de tal manera que $\Phi(\vartheta, \alpha) = \left|\operatorname{sen}\vartheta\cos\left(\frac{ka}{2}\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha\right)\right|$. En caso particular, cuando el punto de observación $M(r)$ está ubicado en un plano horizontal, $\vartheta = 90°$ (fig. 49.2, *b*) y $\Phi(\vartheta, \alpha) = \Phi(90°, \alpha) = \left|\cos\left(\frac{ka}{2}\cos\alpha\right)\right|$. Los diagramas direccionales de radiación que son las gráficas de esta función, se muestran en la fig. 49.3. En el

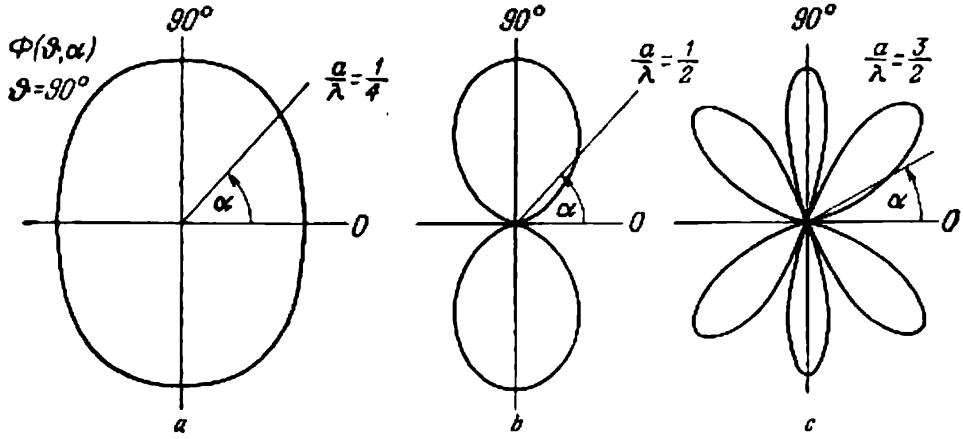


Fig. 49.3.

plano dado, cada radiador actúa como si fuera isótropo ($F(\vartheta, \alpha) = |\operatorname{sen} 90°| = 1$), pero el campo es el resultado de la interferencia de dos ondas que en el punto $M(r)$, en dependencia del ángulo α, tienen uno u otro desfasaje $\Delta\varphi$. La diferencia de fases $\Delta\varphi$ de las intensidades $E_1(r)$ y $E_2(r)$ es proporcional a la diferencia entre las distancias desde los radiadores hasta $M(r)$ y que es igual a $\cos\alpha$ (fig. 49.2, *b*) y a saber, $\Delta\varphi = ka\cos\alpha = 2\pi\frac{a}{\lambda}\cos\alpha$. La suma de las amplitudes complejas se esclarece por el diagrama vectorial en la fig. 49.2, *b*. Cuando $\alpha = 90°$, $\Delta\varphi = 0$; esto quiere decir que en dirección perpendicular a las líneas de los radiadores, la intensidad E del campo se duplica. Al desviarse de dicha dirección, E decrece con una rapidez que depende de la distancia a entre los radiadores. Si $a \geqslant \lambda/2$, la disminución llega hasta cero y, a continuación, al variar α la intensidad del campo aumenta de nuevo. Cuanto mayor sea a, tanto aumentará la cantidad de direcciones en las que no hay radiación $\left(\frac{a}{\lambda}\cos\alpha = \frac{n}{2},\ n = \pm 1,\ \pm 3,\ \ldots\right)$ y,

respectivamente, de direcciones de radiación máxima $\left(\frac{a}{\lambda}\cos\alpha = n,\right.$ $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Estando el punto de observación en el plano $\alpha = 0$ (fig. 49.2, *c*), $\Phi(\vartheta, \alpha) = \Phi(\vartheta, 90°) = \left|\operatorname{sen}\vartheta\cos\left(\frac{ka}{2}\operatorname{sen}\vartheta\right)\right|$. En este caso se manifiesta la directividad de acción de cada radiador.

Seguidamente supongamos que los radiadores son de antifase, es decir, $\dot{p}_{m1} = \dot{p}_m$ y $\dot{p}_{m2} = -\dot{p}_m$. Entonces, en lugar de la (49.7) hallamos

$$\dot{E}_m = -\dot{\vartheta}_0 \frac{i\dot{p}_m k^2}{2\pi\varepsilon} \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\left(\frac{ka}{2}\operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha\right)\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (49.8)$$

El sistema de antifase que consideramos se distingue, en particular, del cofásico porque en cualquier dirección perpendicular a la línea de los radiadores no habrá radiación.

Y por fin, sustituyamos los radiadores eléctricos elementales por magnéticos. De la (49.3) y aplicando la (45.10), se halla

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2} = \alpha_0 \frac{k^2 W}{4\pi\mu} \operatorname{sen}\vartheta \frac{e^{-ikr}}{r}\left(\dot{m}_{m1} e^{ikr_1\cos\psi_1} + \right.$$
$$\left. + \dot{m}_{m2} e^{ikr_2\cos\psi_2}\right), \qquad (49.9)$$

lo que es análogo a la expresión (49.6). De aquí podemos obtener resultados particulares del mismo tipo.

3. **Ejemplo de un sistema de elementos múltiples.** Consideremos un sistema de radiadores eléctricos elementales situados equidistantemente, es decir, a iguales distancias a lo largo de una recta;

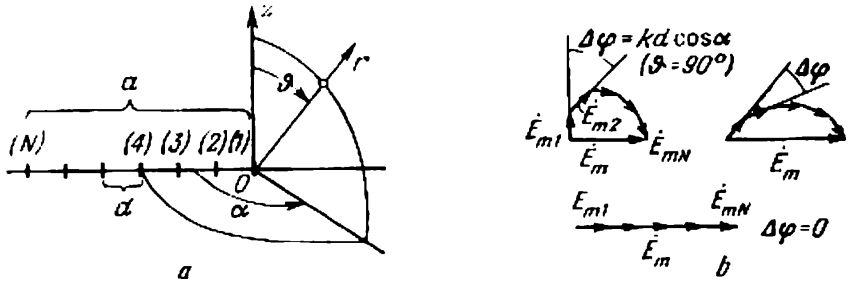


Fig. 49.4.

la disposición del sistema de coordenadas se muestra en la fig. 49.4, *a*. En virtud de las (44.13) y (49.3)

$$\dot{E}_m = \sum_{p=1}^{N} \dot{E}_{mp} = -\dot{\vartheta}_0 \frac{k^2}{4\pi\varepsilon} \operatorname{sen}\vartheta \frac{e^{-ikr}}{r} \sum_{p=1}^{N} \dot{p}_{mp} e^{ikr_p\cos\psi_p}. \qquad (49.10)$$

En este caso $r_p = (p-1)d$, $(p = 1, 2, \ldots, N)$, mientras que el ángulo ψ_p es igual para todos los valores de p, ya que los radios vector $\boldsymbol{r}_p$ son paralelos. Es evidente que ψ_p es idéntico a ψ_1 en la fig. 49.2, *d*; por esto, $\cos\psi_p = \operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha$.

Sea que las amplitudes y fases de todos los radiadores son iguales ($\dot{p}_{mp} = \dot{p}_m$ para todos los valores de p). Además en la (49.10) se suma una *progresión geométrica*

$$\sum_{p=1}^{N} e^{ikr_p \cos \Psi_p} = \frac{e^{iNkd \operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha} - 1}{e^{ikd \operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha} - 1}.$$

Después de realizar evidentes transformaciones, se obtiene

$$\dot{E}_m = -\vartheta_0 \frac{\dot{p}_m}{4\pi\varepsilon} k^2 \frac{e^{-ik\left(r - \frac{N-1}{2} d \operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha\right)}}{r} \operatorname{sen} \vartheta \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N}{2} kd \operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} kd \operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha\right)}. \quad (49.11)$$

Detengámonos en el caso, cuando el punto de observación $M(r)$ está ubicado en el plano $\vartheta = 90°$ (en la (49.11) $\operatorname{sen} \vartheta = 1$); en este caso $\Phi(\vartheta, \alpha) = \frac{1}{N} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{N}{2} kd \cos \alpha\right) / \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} kd \cos \alpha\right) \right|$. En la dirección de la normal a la línea de los radiadores ($\alpha = 90°$), sus campos se suman por fase: $\Delta\varphi = 0$ (véase el diagrama en

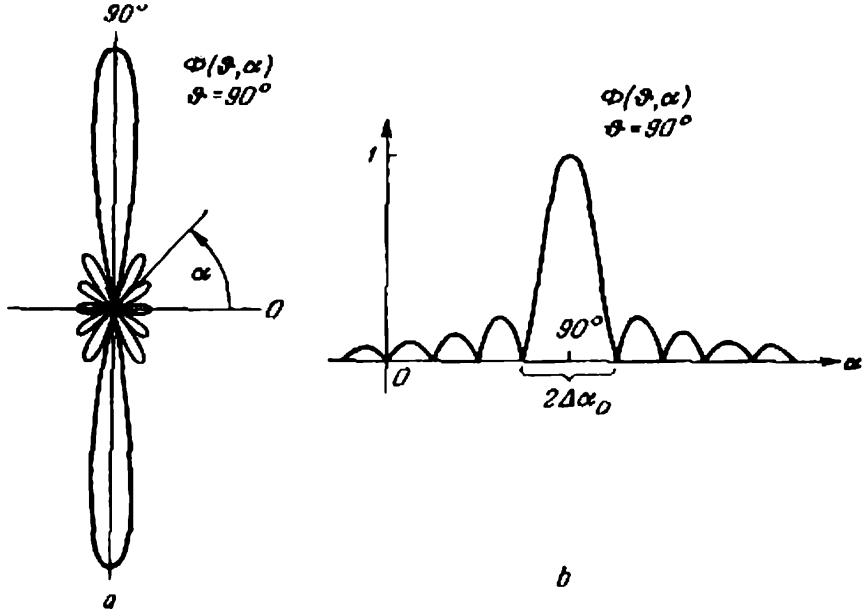


Fig. 49.5.

la fig. 49.4, *b*). La *relación de los senos en la (49.11) resulta ser*, en este caso, una indeterminación del tipo 0/0 que se abre como N: la amplitud del campo crece N veces en comparación con el caso de un radiador unitario. El diagrama típico de directividad del sistema para $Nd \gg \lambda$ y $d < \lambda$ se muestra en la fig. 49.5, *a*, así como en la fig. 49.5, *b*, en forma de una gráfica rectangular.

Tras el máximo principal de radiación que se repite cada 180°, sigue la serie de los "lóbulos laterales" del diagrama.

Determinemos la anchura del máximo de radiación principal, es decir, la distancia angular $2\Delta\alpha_0$ (fig. 49.5, *b*) entre las direcciones más próximas a él, en las que no hay radiación. Es evidente, que sen $\left[\frac{N}{2} kd \cos(90° \pm \Delta\alpha_0)\right] = 0$ pero se tomó en cuenta la raíz inferior del seno, así que

$$\frac{N}{2} kd \operatorname{sen} \Delta\alpha_0 = \pi. \tag{49.12}$$

Cuando $Nd \gg \lambda$, la magnitud $\operatorname{sen} \Delta\alpha_0$ que es muy pequeña, puede ser sustituida por $\Delta\alpha_0$. De este modo,

$$2\Delta\alpha_0 \approx 2 \frac{\lambda}{Nd}. \tag{49.13}$$

Es importante que la anchura del máximo principal $2\Delta\alpha_0$ no depende del número de radiadores de un sistema cofásico, sino de su "longitud reducida" Nd. Mientras mayor sea el número de radiadores, más próximo a la longitud real del sistema $a = (N-1)d$ se encontrará Nd.

Si $d \geqslant \lambda$, entonces, salvo $\alpha = 90°$ y $\alpha = 270°$, hay otras direcciones para las que las ondas de todos los radiadores son cofásicas y, sobreponiéndose, crean los máximos de radiación principales ($\dot{E}_m = N\dot{E}_{mp}$). Por lo general, la condición para el máximo principal resulta ser la transformación de $\dot{E}_m$ (49.11) en una indeterminación del tipo 0/0, lo que tendrá lugar cuando el argumento del seno en el denominador toma valores iguales a $n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

4. Observaciones conclusivas. El concepto del sistema de radiadores se emplea extensamente en la teoría de las antenas. Junto con sistemas discretos, también se consideran sistemas continuos. Por ejemplo, supongamos que hay que determinar el campo de

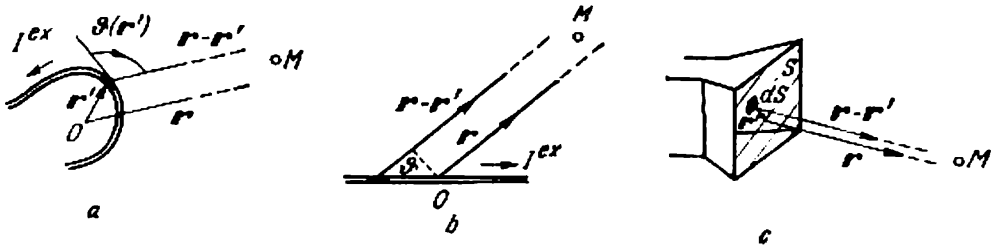


Fig. 49.6.

radiación creado por la corriente $I^{ex}(l)$ en un conductor l de forma arbitraria (fig. 49.6, *a*). Admitamos que cada elemento del conductor es un radiador eléctrico elemental, cuya amplitud compleja de su momento se determina a base de la (44.4): $d\dot{p}_m = -i \frac{I^{ex}_m(l)}{\omega} dl$. Intro-

duciendo $d\dot{p}_m$ en la (44.13), hallamos la amplitud compleja $d\dot{E}_m$ de su campo en la zona alejada. El conductor aparece como un sistema continuo de tales radiadores y su campo, como la superposición de todos los campos elementales $d\dot{E}_m$, es decir, como la integral: $\dot{E}_m = \int_l d\dot{E}_m\, dl$. De este modo podemos obtener, en particular, la expresión del campo de radiación de un conductor rectilíneo (fig. 49.6, *b*) (compárese con el § 44, punto 5). El análisis de una serie de antenas, por ejemplo, de la antena llamada en cono invertido, (fig. 49.6, *c*) se reduce a que destacando cierta "superficie de abertura" S, ésta se toma como un sistema continuo de radiadores del tipo del elemento de Huygens generalizado (§ 47, punto 3, al final). Tal enfoque se aplicará más adelante (§ 53) respecto a ciertos problemas de difracción.

Por fin, consideremos la acción de los radiadores en un semiespacio limitado por una superficie conductora ideal. ¿Cómo se comportará, por ejemplo, un radiador eléctrico elemental perpendicular a la superficie conductora (fig. 49.7, *a*)? Fácilmente

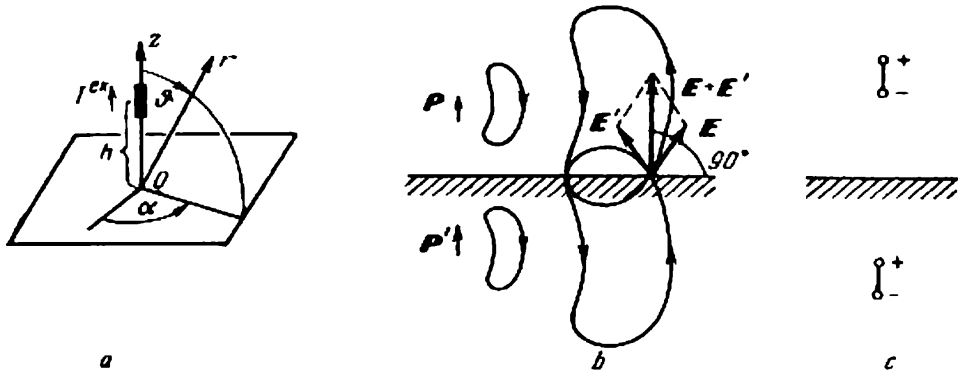


Fig. 49.7.

nos convencemos de que el campo de radiación resulta ser tal, como si tuviéramos un *sistema* de dos radiadores iguales, uno el que consideramos y el segundo, ficticio, situado por el lado opuesto de la superficie de separación, como se muestra en la fig. 49.7, *b*. Esto se ve en el cuadro dado de las líneas de fuerza: el campo eléctrico resultante no tiene componente tangencial en la superficie del conductor, y, de este modo, satisface la condición límite obligatoria. Señalemos que el dipolo ficticio de Hertz podría ser construido como la "imagen especular" (compárese con el § 17, punto 4) del radiador real, fig. 49.7, *c*. Haciendo uso de las fórmulas (49.3) y (44.13), hallamos la amplitud compleja del vector del campo de radiación de un dipolo de Hertz ubicado perpendicularmente sobre el plano a una altura h:

$$\dot{E}_m = -\vartheta_0 \frac{\dot{p}_m k^2}{2\pi\varepsilon} \operatorname{sen}\vartheta \cos(kh\cos\vartheta) \frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (49.14)$$

Si el radiador eléctrico elemental está orientado paralelamente a una superficie de separación conductora ideal, entonces, el radiador ficticio complementario debe estar dirigido en dirección inversa (fig. 49.8, *a*, *b*, *c*), es decir, es de antifase. Al determinar

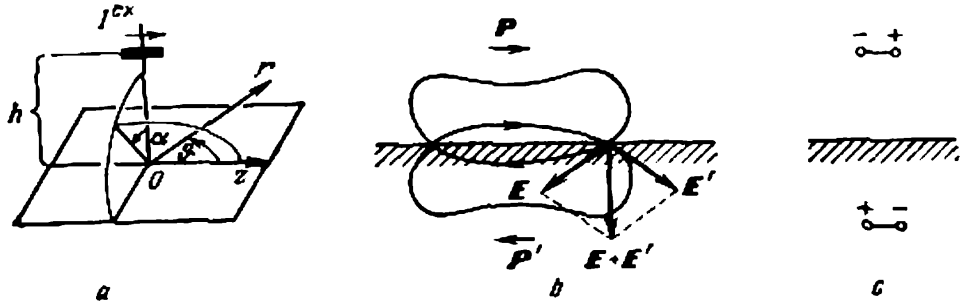


Fig. 49.8.

el campo de radiación como resultado de la acción de un sistema de dos elementos, en virtud de (49.8), se halla

$$\dot{E}_m = -\dot{\vartheta}_0 \frac{i\dot{p}_m}{2\pi\varepsilon} k^2 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}(kh \operatorname{sen}\vartheta \cos\alpha) \frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (49.15)$$

Análogamente se investiga la influencia de una superficie conductora ideal sobre un radiador magnético elemental. En este caso, el dipolo ficticio se elige de tal forma que en la superficie conductora se liquide la componente magnética normal. Por esta razón, para un radiador perpendicular a dicha superficie (fig. 49.9, *a*), el dipolo complementario resulta ser de antifase (fig. 49.9, *b*, *c*),

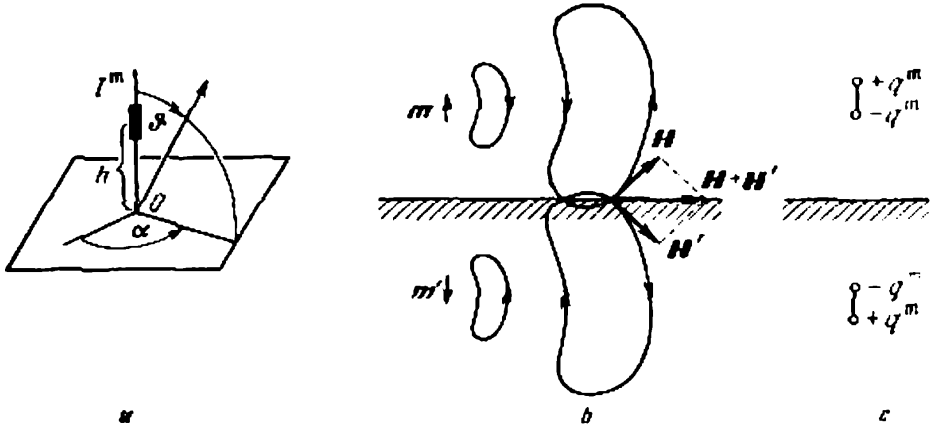


Fig. 49.9.

mientras que al ser paralelo (fig. 49.10, *a*), cofásico (fig. 49.10, *b*, *c*). En comparación con el caso de radiadores eléctricos, la respectiva *regla para confeccionar la imagen especular varía* (fig. 49.9, *c* y fig. 49.10, *c*). La obtención de las expresiones para amplitudes complejas de los vectores del campo se la dejamos al lector.

La acción de una superficie conductora ideal para una orientación *arbitraria* de los radiadores elementales, se reduce a los casos examinados, puesto que los momentos $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{m}$ pueden ser descompuestos en las componentes perpendiculares y paralelas a

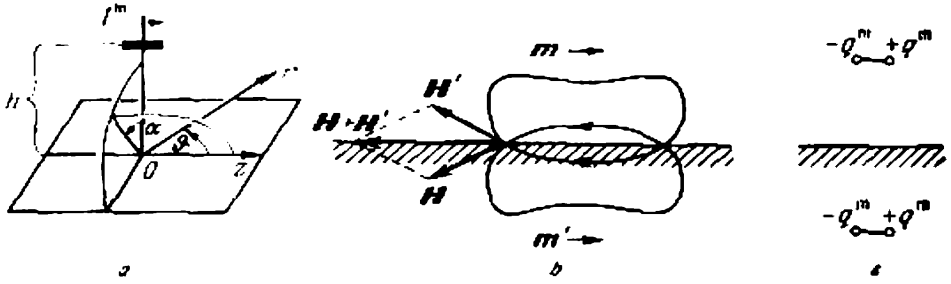


Fig. 49.10.

la superficie conductora (fig. 49.11, *a*, *b*). No es difícil difundir los resultados obtenidos a distribuciones arbitrarias de corrientes, ya que en calidad de radiadores elementales pueden considerarse sus elementos (fig. 49.11, *c*).

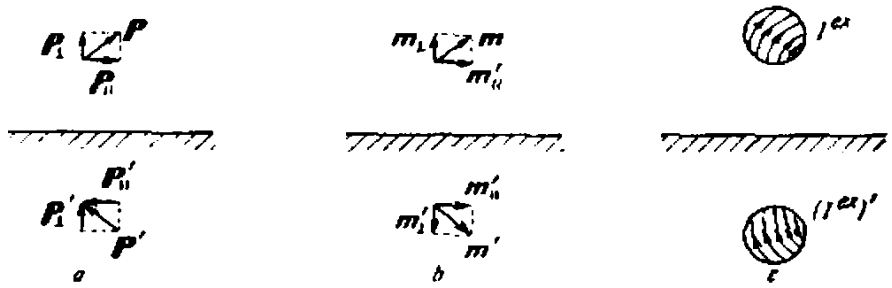


Fig. 49.11.

II. Difracción

La procedencia del término difracción está relacionada con la óptica ondulatoria que apareció mucho antes que la teoría electromagnética de la luz y la electrodinámica contemporánea. Al estudiar la luz, los fenómenos de difracción se consideran aquellos en los que se advierten alteraciones de las reglas de la óptica geométrica.

Remarquemos que en mayor o menor grado, tales alteraciones *siempre tienen lugar, puesto que los conceptos de óptica geométrica* son aproximados. Efectivamente, la noción sobre los rayos subordinados a las leyes de Snell (§ 37, punto 2), hablando en rigor, es sólo justa para el caso idealizado de la incidencia de una onda plana homogénea sobre una superficie de separación plana de dos semiespacios heterogéneos. En la óptica geométrica, las leyes de Snell se aplican al considerar cuerpos reales de dimensiones limi-

tadas. En tal caso, particularmente, resulta que un cuerpo opaco, „obstáculo", en el que inciden los rayos de luz, debe dar una sombra ostensible (es decir, en la frontera de la sombra la intensidad de la luz, o sea, la intensidad del campo, disminuye a saltos hasta cero). En realidad, no hay sombras ostensibles; en mayor o menor grado, la luz "circunda al obstáculo" y penetra a la supuesta frontera de la sombra, en las proximidades de la cual se observan oscilaciones especiales de la intensidad. Este *fenómeno de difracción adquiere tanto mayor importancia para el* proceso de propagación de la luz en su total, mientras en más alto grado se altere la condición característica de la óptica geométrica de que todas las dimensiones de los objetos que se consideran son mucho mayores que la longitud de onda ($d \gg \lambda$).

En la práctica de radiotecnia, las dimensiones relativas de los objetos d/λ son, por lo general, mucho menores que en óptica; por esta razón, con frecuencia, los conceptos de la óptica geométrica no pueden ser empleados y hablar de la difracción como de las desviaciones de la norma, ya no es lógico. Sin embargo, el propio término de *difracción*, sigue empleándose muy extensamente. Más adelante, se explicará qué entendemos, en tal caso, por fenómenos y problemas de difracción.

§ 50. Fenómenos y problemas de difracción. Casos límites

1. Contenido de los problemas de difracción. Ante todo, hay que destacar la clase de procesos electromagnéticos que deben ser estudiados. Recordemos que en los §§ 36—39 fueron descritos los procesos ondulatorios más sencillos que transcurren al ser los medios distintos. Su aspecto general se abarca en el esquema representado en la fig. 50.1, *a*. La onda plana homogénea $\boldsymbol{E}^0$, $\boldsymbol{H}^0$ que incide sobre la superficie de separación de los medios *1* y *2*, pasa parcialmente a través de ella y continúa propagándose en forma de la onda $\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{H}^+$ variando su dirección, es decir, *refractándose*, y parcialmente *reflejándose* en forma de la onda $\boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{H}^-$; en este caso, la superficie de separación sirve, al parecer, de manantial de la onda inversa. Desde el punto de vista de la óptica geométrica el proceso descrito se caracteriza totalmente por los tres rayos mostrados en la fig. 50.1, *a*; las flechas nos indican simultáneamente la dirección del vector de Poynting para las tres ondas planas indicadas.

A continuación, tomemos en lugar del semiespacio un cuerpo acotado *V* relleno del medio *2* (fig. 50.1, *b*). La onda incidente $\boldsymbol{E}^0$, $\boldsymbol{H}^0$ que puede ser plana y homogénea como en el caso anterior, excitará dentro del cuerpo *V* un campo $\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{H}^+$ y fuera de él, complementariamente, se creará el campo $\boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{H}^-$. El esquema del proceso ondulatorio es, según parece, el mismo: la energía de

la onda incidente penetra parcialmente al medio *2*, y en el medio *1* surge un movimiento de la energía a partir de la superficie de separación. Sin embargo, los campos E^+, H^+ y E^-, H^- ya no son ondas planas; por esta razón, el problema electrodinámico se hace mucho más complicado. Este es un *problema de difracción*.

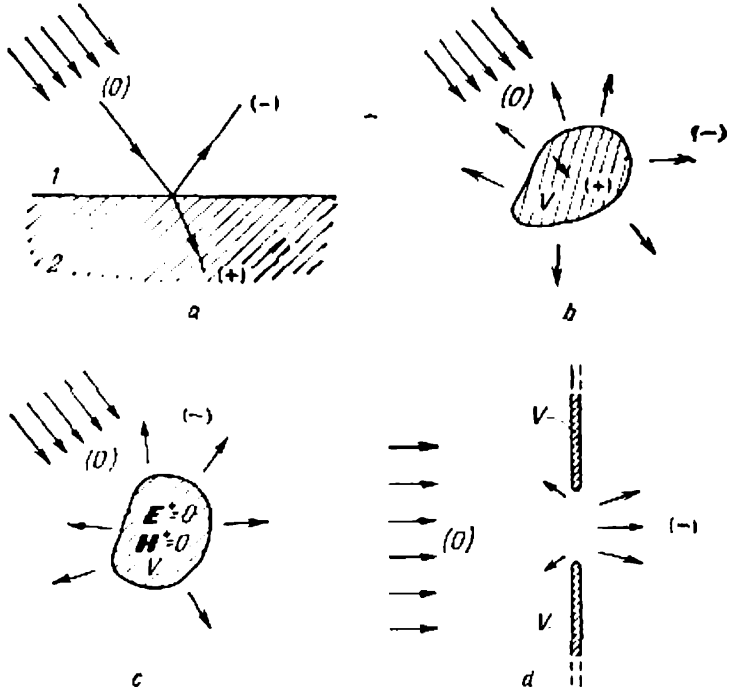


Fig. 50.1.

Vamos a llamar E^+, H^+ *campo interior de difracción* y E^-, H^-, *campo exterior de difracción*, así como *campo de dispersión*. Como es natural, las ondas refractada y reflejada en el caso de una superficie de separación plana, pueden ser consideradas como las *formas más sencillas de dichos campos*.

La fig. 50.1, *b* nos da una representación muy general del problema de difracción; señalemos que el medio en V puede incluso ser heterogéneo. Bien es verdad que son más generales las *condiciones cuando no existe el cuerpo V localizado en el espacio* que es la causa de la difracción y que todo el medio es heterogéneo. Pero en este caso, generalmente, es ya imposible o bien infructuoso dividir el campo electromagnético en sus componentes E^0, H^0, E^+, H^+, E^-, H^- así que no se hace uso del mismo concepto de difracción.

Como los objetos reales de la difracción son con frecuencia metálicos, singular interés tiene una clase particular de problemas de difracción en que el cuerpo V se toma como un conductor ideal. Con todo, el campo interior no existe (efecto Kelvin ideal,

§ 40) y debe ser determinado sólo el campo de dispersión que se crea por la acción de una u otra onda incidente (fig. 50.1, *c*). El cuerpo V puede, en caso particular, tener la forma de una pantalla infinita idealmente conductora con un orificio; aquí se habla sobre la *difracción en el orificio* (fig. 50.1, *d*).

La esencia del proceso ondulatorio en el problema de difracción (lo mismo que en el caso de la incidencia de una onda sobre una superficie de separación plana de los medios) consiste en que el objeto V al excitarse bajo la acción de la onda incidente se comporta como un radiador de un campo ondulatorio complementario, o, como también suele decirse, un "reradiador" (con relación a la onda incidente primaria). Señalemos aquí que la diferencia entre los problemas de difracción y de radiación ("de antena"), en una serie de casos, es puramente convencional. Por ejemplo, la antena puede constar de cierto manantial primario y de un cuerpo pasivo irradiado por él y que es el objeto de difracción.

Así, el problema de difracción consiste en hallar los campos exterior e interior de difracción para uno u otro objeto V, siendo prefijada una onda incidente. Es evidente que deberíamos llamar "fenómeno de difracción" el propio proceso electromagnético que transcurre, pero no debemos olvidar que el sentido tradicional de este término es más estricto (véase la pág. 306).

Los problemas de difracción, cuyo esquema general es muy sencillo, generalmente son, desde el punto de vista matemático, complicados y en la mayoría de los casos se estudian empleando diferentes suposiciones simplificativas.

2. **Límite de la óptica geométrica.** Al crecer la frecuencia infinitamente ($\omega \to \infty$, $\lambda \to 0$), para cualquier superficie de separación de los medios

$$R_{mín}/\lambda \to \infty, \tag{50.1}$$

donde $R_{mín}$ es el radio mínimo de curvatura (está claro que en este caso se toma de antemano $d/\lambda \to \infty$, siendo d cualquiera de las dimensiones del cuerpo). Podemos decir que la superficie de separación es localmente plana y en cada uno de sus puntos pueden ser aplicadas las leyes de Snell, o sea, que, trazando un plano tangencial, podemos considerar el cuadro de los rayos incidente, reflejado y refractado (fig. 50.2, *a*). La correlación (50.1) determina la clase límite de los problemas de difracción: nosotros emplearemos *la expresión límite de la óptica geométrica*.

Supongamos que el objetivo de difracción V es un cuerpo homogéneo con superficie llana y pulida, además, en cualquiera de sus puntos

$$R_{mín}/\lambda_{máx} \gg 1, \tag{50.2}$$

donde $\lambda_{máx}$ es la longitud de onda para aquel de los medios (cuerpo V o bien su exterioridad) donde ella es mayor. Mientras

esta desigualdad se satisfaga en grado más elevado, nos encontraremos más próximos al límite de la óptica geométrica. Sea que sobre el cuerpo a considerar incide una onda plana homogénea que aquí va a describirse como un haz de rayos paralelos. En virtud de las leyes de Snell podemos, de principio, seguir el recorrido de cada

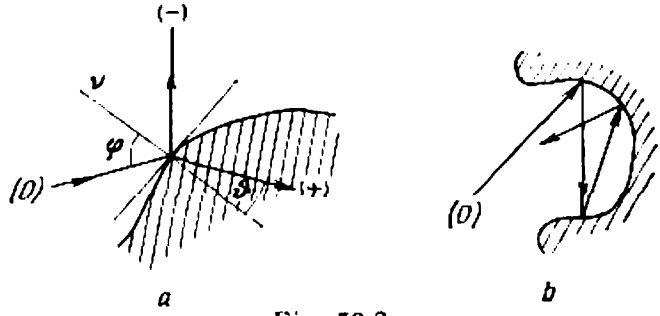


Fig. 50.2.

uno de los rayos. Es verdad que tener en cuenta las múltiples reflexiones cuando el cuerpo es transparente o bien, cóncavo y opaco (fig. 50.2, *b*) puede ser una tarea complicada. Pero tales construcciones pueden, con frecuencia, realizarse hasta el fin.

Como ejemplo[1] de la incidencia de una onda plana sobre un *cuerpo opaco convexo, tomemos el caso de un cilindro conductor* ideal; la onda se propaga perpendicularmente a su eje (fig. 50,3, *a*).

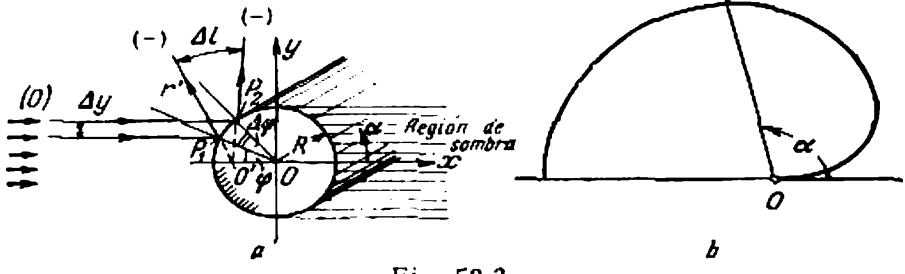


Fig. 50.3.

Fijemos nuestra atención en dos rayos que corresponden a la onda incidente y entre los cuales hay una distancia igual a Δy. Uno de ellos se refleja en el punto P_1 que desde el origen de coordenadas O se ve bajo un ángulo φ (respecto a la dirección $-x$) y que, por consiguiente, desde este momento estará dirigido bajo un ángulo 2φ. El segundo rayo se refleja en el punto P_2. Como el $\angle P_1OP_2 = \Delta\varphi$, esto quiere decir que este rayo se propagará más adelante bajo un ángulo $2(\varphi + \Delta\varphi)$. Si se estudia el recorrido de los rayos, podremos advertir con facilidad que después de la reflexión el haz que

[1] Apropiado de [D. 1].

ellos limiten será divergente. Pero, puesto que el flujo de energía apropiado a este haz no varía, la densidad del último Π disminuye. Se puede considerar que en las secciones del haz con dimensiones transversales Δy y Δl (a causa de la pequeñez de $\Delta\varphi$ podemos suponer que el arco Δl es un elemento de una recta) los valores absolutos del vector medio de Poynting $\overline{\Pi}|_{\Delta l} = \overline{\Pi}^-(2\varphi)$ y $\overline{\Pi}|_{\Delta y} = \overline{\Pi}^0$ *se relacionan entre sí como* Δy *y* Δl, *siendo, además,* $\Delta y \approx R\Delta\varphi\cos\varphi$ y $\Delta l \approx r' 2\Delta\varphi$ (r' es la distancia desde O' hasta la sección Δl), de este modo

$$\frac{\overline{\Pi}^-(2\varphi)}{\overline{\Pi}^0} \approx \frac{R}{2r'}\cos\varphi. \qquad (50.3)$$

Sustituyamos el ángulo 2φ, que indica la dirección del rayo reflejado, por el ángulo de coordenadas α que se cuenta desde el eje positivo ($\alpha = 180° - 2\varphi$) y consideremos que para grandes distancias $r' \approx r$. De esta forma, cuando $r \to \infty$

$$\frac{\overline{\Pi}^-(\alpha)}{\overline{\Pi}^0} = \frac{R}{2r}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}. \qquad (50.4)$$

Ya que $\overline{\Pi}^-(180°) = \overline{\Pi}^-_{\text{máx}}$, la función $F(\alpha) = \sqrt{\overline{\Pi}^-(\alpha)}/\sqrt{\overline{\Pi}^-(180°)} = \sqrt{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$ puede ser considerada como *la curva característica de* emisión normalizada del campo de dispersión. Esta función está representada en la fig. 50.3, *b* en forma del correspondiente diagrama direccional.

La anchura angular de la zona de sombra es $\tau = \operatorname{arctg} 2R/r \approx \approx 2R/r$. Este es el ángulo bajo el cual, a una distancia r, se ve el diámetro del cilindro. A medida que el punto de observación *se aleja,* τ *disminuye ilimitadamente de modo que en virtud de la* (50.4), se tiene que $\tau = 0$.

3. Espejos y lentes. Una lámina plana conductora, cuyas dimensiones superan considerablemente la longitud de onda, bajo la acción de la difracción se comporta como un espejo. El esquema de la reflexión de una onda plana al incidir en dicha lámina se muestra en la fig. 50.7, *b*. En virtud de la primera ley de Snell, el recorrido del haz reflejado de rayos es simétrico al que incide; la zona de sombra se halla por medio de sencillas consideraciones geométricas. Hay, sin embargo, que tener en cuenta que la condición de aplicación de la óptica geométrica $R \gg \lambda$ no se cumple en los bordes de la lámina. El cuadro representado resulta, de esta manera, ser justo con una precisión de hasta el efecto de bordes de la difracción.

En la técnica de antenas se utilizan con bastante frecuencia *espejos enfocadores. Podemos representarnos un espejo de tal forma* que un haz paralelo de rayos después de su reflexión converge en un punto, es decir, que al incidir una onda plana se convierte (en cierta zona limitada) en onda esférica (fig. 50.4, *a*). Si ubicamos

en este punto que llamaremos *foco* un manantial de onda esférica, entonces, al reflejarse ésta en el espejo se transforma en onda plana (fig. 50.4, *b*). ¿Cómo determinar la forma necesaria del espejo? Para que la onda esférica emitida desde el punto O (fig. 50.4, *c*) se

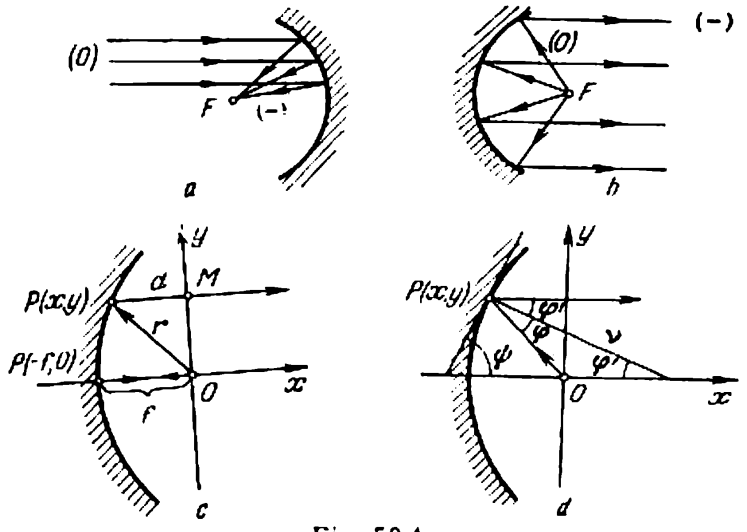


Fig. 50.4.

transforme después de reflejarse en onda plana, hay que cumplir la condición de la constancia de fase en el supuesto plano de su frente; este último cruza bajo un ángulo recto el haz de rayos reflejado paralelo. Esto significa que la variación de fase a lo largo del recorrido $OP(x, y)M$ debe ser igual a la que se produce a lo largo del $OP(-f, 0)O$: $k(r+d)=2kf$ o bien, $\sqrt{x^2+y^2}-x=2f$. De aquí, por medio de sencillas transformaciones, se obtiene

$$y^2=2p(x-x_0), \tag{50.5}$$

siendo $p=2f$ y $x_0=-f$. Esta es la ecuación de una *parábola*; la magnitud f es su distancia focal. Por consiguiente, el espejo debe tener perfil parabólico, es decir, el paraboloide de revolución.

Nos queda comprobar que la reflexión de los rayos transcurre de acuerdo con la primera ley de Snell. En el punto de reflexión $P(x, y)$ (fig. 50.4, *d*), tracemos la normal ν y demostremos que el ángulo de incidencia φ y el de reflexión φ' son realmente iguales. En virtud de la (50.5), para la parábola que consideramos $y'=2f/y$. Puesto que $y'=\operatorname{tg}\psi=\operatorname{ctg}\varphi'$, entonces $\operatorname{tg}\varphi'=y/2f$. Es suficiente demostrar que $\varphi+\varphi'=2\varphi'$. Evidentemente, $\operatorname{tg}(\varphi+\varphi')=-y/x$. Pero $\operatorname{tg}2\varphi'=2\operatorname{tg}\varphi'/(1-\operatorname{tg}^2\varphi')=(y/f)/[1-(y/2f)]^2$. Introduciendo en el denominador la expresión y^2 de (50.5), nos convenceremos de que $\operatorname{tg}2\varphi'=-y/x$.

Una lente que sea cuerpo dieléctrico transforma (en cierta zona) la onda plana incidente en onda esférica transmitida que converge

en el foco, mientras que por el contrario la onda esférica incidente, en la plana, fig. 50.5, *a*, *b*.

Sea que una lente está acotada por un plano y una superficie convexa; determinemos la forma de esta última. Para que la onda esférica que se radia desde el punto *O* (fig. 50.5, *c*) se transforme en onda plana, el plano representado a trazos debe ser cofásico. Por esta razón, tenemos que exigir que la variación de fase a lo

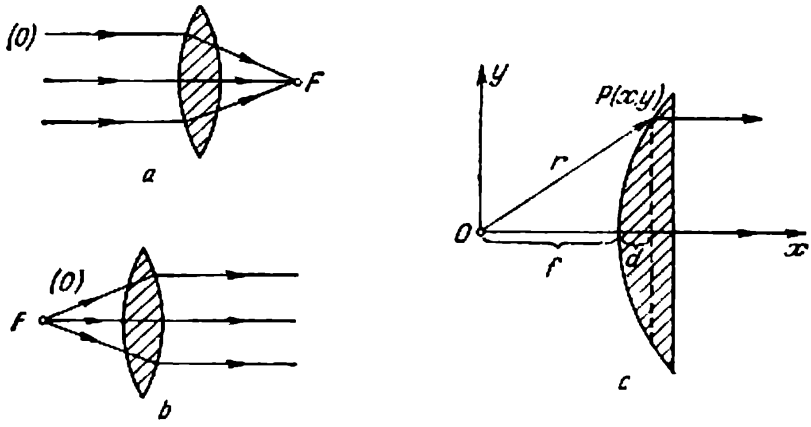


Fig. 50.5.

largo de los recorridos r y $f+d$ sea la misma, es decir, $k_1 r = k_1 f + k_2 d$, siendo k_1 y k_2 los números de onda para el medio exterior y el dieléctrico de la lente. Introduzcamos el índice de refracción relativo $k_2/k_1 = n_{21} = n$; ahora $\sqrt{x^2+y^2} = f + n(x-f)$. De aquí obtenemos la ecuación de una *hipérbola*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (50.6)$$

siendo $x_0 = \frac{nf}{n+1}$, $a^2 = \frac{f^2}{(n+1)^2}$ y $b^2 = f^2 \frac{n-1}{n-1}$. Así que la lente está acotada por un hiperboloide de revolución.

Del mismo modo que lo hicimos al considerar un espejo, podemos comprobar que las reglas de la óptica geométrica se cumplen; en el caso dado se trata de la segunda ley de Snell. Al deducir las fórmulas (50.5) y (50.6) sólo se tuvieron en cuenta las variaciones de fase a lo largo de los supuestos rayos. ¿Por qué esto resulta ser suficiente? Responderemos a esta pregunta más adelante (pág. 355).

Remarquemos de nuevo que los espejos y lentes nos proporcionan la acción deseada sólo en un sector del frente de la onda incidente; pero, sin embargo, esta última puede ser tan no homogénea que fuera de la región de acción del espejo o la lente no hay prácticamente campo (el haz de rayos está limitado). También hay que tener en cuenta que los efectos de bordes no pueden ser investigados por medio de las nociones de los rayos: aquí no conserva

su validez $R \gg \lambda$. Por último, hablando de una lente, no hemos considerado la reflexión.

4. Límite cuasiestacionario. En el límite cuando $\omega \to 0$ ($\lambda \to \infty$, $k \to 0$), el campo electromagnético llega a ser estacionario; las ecuaciones homogéneas de Helmholtz (29.20) y (29.21) se transforman, en tal caso, en las ecuaciones de Laplace (14.15) y (21.7).

Sea que el cuerpo V, objeto de difracción, es pequeño respecto a la longitud de onda, es decir,

$$D_{\text{máx}} / \lambda_{\text{mín}} \ll 1, \tag{50.7}$$

siendo $D_{\text{máx}}$ la mayor dimensión del cuerpo y $\lambda_{\text{mín}}$ la longitud de onda en aquel de los medios (el cuerpo V o su exterioridad) en el que ella es menor. Entonces, podemos despreciar la diferencia de fase en diversos puntos del objeto de difracción ($e^{-ikD} \approx 1$) y éste se manifiesta como cuasiestacionario. Por esta razón, está justificado el planteamiento aproximado del problema consistente en que al determinar el campo en V, en lugar de las ecuaciones de Helmholtz (29.20) y (29.21), se hace uso de las ecuaciones de Laplace que se desprenden de aquéllas para $\omega = 0$

$$\nabla^2 \dot{\boldsymbol{E}}_m = 0 \tag{50.8}$$

y

$$\nabla^2 \dot{\boldsymbol{H}}_m = 0. \tag{50.9}$$

Este es el *límite cuasiestacionario* en el problema de difracción.

Consideremos con una aproximación cuasiestacionaria la difracción de una onda plana homogénea en la esfera pequeña V (fig. 50.6, *a*) con permeabilidades ε_i y μ_i (las permeabilidades

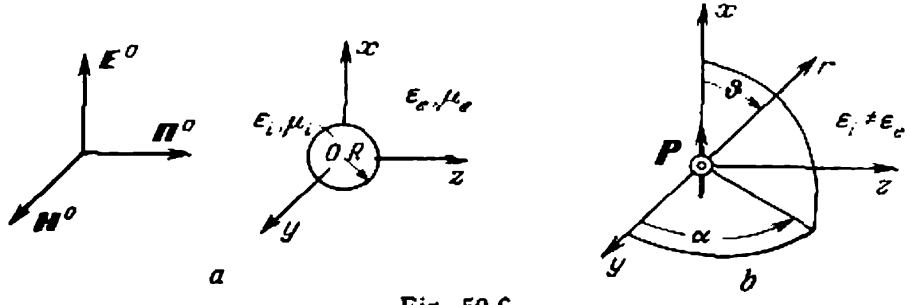


Fig. 50.6.

del medio exterior μ_e y ε_e). Tomando un sistema cartesiano de coordenadas con el origen ubicado en el centro de la esfera, escribamos las amplitudes complejas de los vectores $\boldsymbol{E}^0$ y $\boldsymbol{H}^0$ de onda incidente:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{E}}^0_m = \boldsymbol{x}_0 \dot{A} e^{-ik_e z}, \quad \dot{\boldsymbol{H}}^0_m = \boldsymbol{y}_0 \frac{\dot{A}}{W_e} e^{-ik_e z}, \\ &k_e = \omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}, \qquad W_e = \sqrt{\mu_e / \varepsilon_e}. \end{aligned}\right\} \tag{50.10}$$

Si deseamos hallar el campo interior de difracción $\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{H}^+$, debemos resolver dos problemas de contorno independientes para las ecuaciones de Laplace (50.8) y (50.9). Al mismo tiempo, podemos emplear las ya conocidas soluciones de los respectivos problemas de electrostática y magnetostática (§ 20, punto 3 y § 21, punto 2). Si, en caso particular, $\mu_i = \mu_e$, entonces, en virtud de las (20.28) y (21.9),

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^+ &= \frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}\,\dot{\boldsymbol{E}}_m^0, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^+ &= \dot{\boldsymbol{H}}_m^0, \end{aligned}\right\} \quad z \approx 0 \tag{50.11}$$

(con la aproximación dada, el vector $\boldsymbol{H}^0$ de onda incidente en el interior del cuerpo no sufre variaciones).

En un campo electrostático homogéneo, la esfera dieléctrica se comporta como un dipolo con un momento que se determina por la fórmula (20.29). De este modo, bajo la acción de la onda incidente, la esfera adquiere un momento eléctrico oscilante, cuya amplitud compleja es igual a

$$\dot{\boldsymbol{p}}_m = 4\pi R^3\,\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}\,\varepsilon_e \dot{\boldsymbol{E}}_m^0\Big|_{z=0}. \tag{50.12}$$

Esto significa que la esfera se convierte en un radiador eléctrico elemental y el campo de dispersión de $\boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{H}^-$ puede hallarse por medio de las fórmulas del § 44, introduciendo en ellas la expresión de $\dot{\boldsymbol{p}}_m$ (50.12). Si nos interesa la zona lejana, en virtud de las (44.13), se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^- &= -\,\boldsymbol{\theta}_0 R^3\,\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}\,k_e^2\,\dot{A}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,e^{-ik_e r}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^- &= -\,\alpha_0 R^3\,\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}\,k_e^2\,\frac{\dot{A}}{W_e}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,e^{-ik_e r} \end{aligned}\right\} \tag{50.13}$$

(la orientación del sistema de coordenadas esférico se muestra en la fig. 50.6, *b*).

Una pequeña esfera que es objeto de difracción en la que $\varepsilon_i = \varepsilon_e$ y $\mu_i \neq \mu_e$ es semejante a un radiador magnético elemental. Si, por el contrario, $\varepsilon_i \neq \varepsilon_e$ y $\mu_i \neq \mu_e$, entonces, la dispersión es análoga a la radiación del elemento de Huygens (§ 47, punto 3). Recomendamos al lector que, en calidad de ejercicios, considere individualmente estos casos.

5. **Observaciones conclusivas.** Hay múltiples problemas de interés práctico que pueden ser atribuidos a los casos límites de difracción anteriormente considerados. Singular importancia tiene el límite de la óptica geométrica; más adelante (§§ 56, 57) retornaremos a los métodos de dicha óptica. Sin embargo, los procesos límites ideales están privados de los rasgos característicos de los fenómenos de difracción. Realmente, a dichos fenómenos sólo podemos, en mayor o menor grado, aproximarnos y siempre se obser-

varán ciertas alteraciones; estas últimas serán interesantes, incluso cuando son muy pequeñas.

Como característica del objeto de difracción se hace con frecuencia uso del concepto de *sección transversal de dispersión*. Este concepto representa la relación entre el flujo total de la energía de dispersión, es decir, el flujo del vector $\overline{\Pi}^-$ que pasa a través

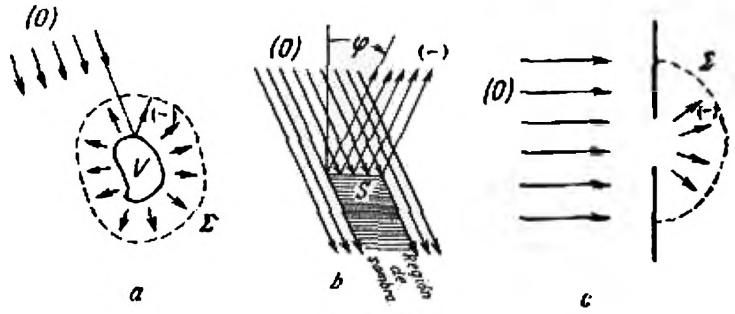


Fig. 50.7.

de cualquier superficie que abarca el objeto de difracción (fig. 50.7, *a*) y el valor absoluto del vector $\overline{\Pi}^0$ de la onda incidente:

$$S_\perp = \frac{\overline{P}}{\overline{\Pi}} = \frac{1}{\overline{\Pi}^0} \oint_\Sigma \overline{\Pi}\, ds. \qquad (50.14)$$

Tomemos el caso más sencillo, cuando en el recorrido de la onda electromagnética se encuentra una lámina metálica de grandes dimensiones y el área S. Suponiendo que la lámina es un conductor ideal, vamos a calcular el flujo de energía de la onda reflejada con la aproximación de la óptica geométrica (fig. 50.7, *a*):

$$\overline{P}_{ref} = \overline{\Pi}^- S \cos\varphi = \overline{\Pi}^0 S \cos\varphi. \qquad (50.15)$$

No obstante, la fórmula deducida no expresa todavía el flujo total de la energía de dispersión: la existencia de la zona de sombra debe considerarse como el resultado de la superposición del campo de dispersión $-\boldsymbol{E}^0$, $-\boldsymbol{H}^0$ sobre la onda incidente $\boldsymbol{E}^0$, $\boldsymbol{H}^0$; dicho campo crea un flujo de energía igual al de la onda reflejada. Por lo tanto, el flujo total de la energía de dispersión es dos veces mayor que $\overline{P}_{ref}$:

$$\overline{P}^- = 2\overline{P}_{ref}$$

y la sección transversal de dispersión es igual a

$$S_\perp = \frac{\overline{P}^-}{\overline{\Pi}^0} = 2S\cos\varphi. \qquad (50.16)$$

Cuando la incidencia es normal, la indicada sección es dos veces mayor que el área de la lámina reflectora.

En el caso de difracción en el orificio (fig. 50.7, *c*), se introduce el concepto de *sección transversal de transmisión*

$$T_{\perp} = \frac{\overline{P}^{-}}{\overline{\Pi}^{0}} = \frac{1}{\overline{\Pi}^{0}} \int_{\Sigma'} \overline{\Pi}^{0}\, ds. \qquad (50.17)$$

El sentido de la magnitud $T_{\perp}$ es muy sencillo: es el área de un orificio en la pantalla que en las condiciones, cuando puede aplicarse la óptica geométrica, deja pasar un flujo de energía igual al que dejaría pasar el orificio a las condiciones prefijadas.

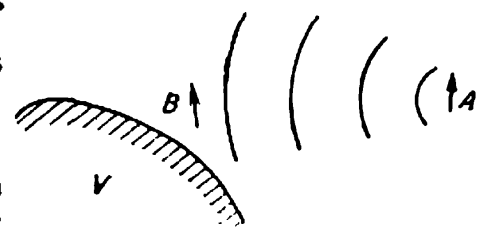


Fig. 50.8.

Hagamos una observación más respecto a la aplicación del principio de reprocidad (§ 48, punto 2). Supongamos que hemos resuelto el problema sobre la difracción de la *onda del radiador elemental A* alejado en el cuerpo V (fig. 50.8). Esto, en particular, significa que su campo total $\boldsymbol{E}_A$, $\boldsymbol{H}_A$ en las cercanías de V está definido y ubicando allí otro radiador elemental B, podemos calcular la magnitud $\dot{I}^{ex}_{mB}\dot{\boldsymbol{E}}_{mA}\boldsymbol{l}_B$. Sin embargo, debido al principio de reprocidad en la forma (48.15a), (48.16)

$$\dot{I}^{ex}_{mB}\dot{\boldsymbol{E}}_{mA}\boldsymbol{l}_B = \dot{I}^{ex}_{mA}\dot{\boldsymbol{E}}_{mB}\boldsymbol{l}_A. \qquad (50.18)$$

De aquí podemos determinar la intensidad del campo $\boldsymbol{E}_B$ del radiador B en el punto de localización del radiador A; hablando con mayor precisión, se calcula una de las proyecciones del vector $\dot{\boldsymbol{E}}_{mB}$, pero del mismo modo podemos también calcular las dos restantes proyecciones. Así, conociendo la solución del problema de difracción en el cuerpo V, obtenemos la posibilidad de tener en cuenta su influencia sobre la acción de un radiador situado más cerca. Este método nos permite, por ejemplo, investigar antenas situadas en las cercanías de la Tierra, en aeronaves o en otras condiciones.

§ 51. Difracción en un cilindro: ejemplo de la solución rigurosa del problema

1. Sobre las soluciones rigurosas de los problemas de difracción. Retornemos al esquema general del problema de difracción mostrado en la fig. 50.1, *b*. Al plantear uno u otro problema concreto de difracción, se prefijan las características geométricas y electrodinámicas del cuerpo V y la onda incidente $\boldsymbol{E}^0$, $\boldsymbol{H}^0$; por lo general, el medio exterior es el vacío. Es preciso hallar tal solución de las ecuaciones de Maxwell para $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, en la que $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^+$ en el

interior del V y $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^0 + \boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^0 + \boldsymbol{H}^-$ fuera del V. Además, en este caso deben observarse en la superficie de separación S del V las condiciones ya conocidas del § 7. La continuidad de las componentes tangenciales de los vectores $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ y de las componentes normales de los vectores $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ significa en el caso que consideramos, el *cumplimiento de las igualdades*: $E_\tau^0 + E_\tau^- = E_\tau^+$, $H_\tau^0 + H_\tau^- = H_\tau^+$, $D_\nu^0 + D_\nu^- = D_\nu^+$, $B_\nu^0 + B_\nu^- = B_\nu^+$. Cuando el cuerpo V es un conductor ideal, las condiciones de contorno tienen el aspecto

$$E_\tau^0 + E_\tau^- = 0, \quad [\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{H}^0 + \boldsymbol{H}] = \eta, \quad D_\nu^0 + D_\nu^- = \xi, \quad B_\nu^0 + B_\nu^- = 0.$$

El *campo exterior de difracción* $\boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{H}^-$ también debe satisfacer las exigencias que se presentan a las soluciones de los problemas exteriores de electrodinámica (§ 31, punto 2, (S5.24), § 43, punto 3).

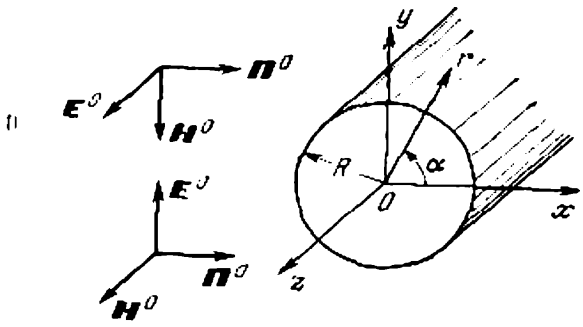


Fig. 51.1.

De esta manera, para hallar el campo de difracción $\boldsymbol{E}^\pm$, $\boldsymbol{H}^\pm$ es necesario resolver un *problema de contorno de las ecuaciones* de electrodinámica. Las expresiones para el campo $\boldsymbol{E}^\pm$, $\boldsymbol{H}^\pm$ halladas de este modo, denominaremos "solución rigurosa" del problema de difracción.

Las soluciones rigurosas de los problemas de difracción no pueden, generalmente, obtenerse en forma analítica limitada. Para *ciertos casos geométricos sencillos, estas soluciones se expresan en* forma de series funcionales [1]. Un ejemplo característico será el problema de difracción de onda plana en un cilindro que vamos a examinar más adelante.

2. Difracción en un cilindro; obtención de la solución. Pues, en calidad del objeto de difracción, vamos a tomar un cilindro circular infinito en el vacío (fig. 51.1). De tal manera, la permeabilidad del medio puede ser representada como la función continua a trozos de la coordenada radial: $\dot{\varepsilon}(r) = \dot{\varepsilon}$, $\dot{\mu}(r) = \dot{\mu}$ para $r < R$ (dentro del cilindro); $\dot{\varepsilon}(r) = \varepsilon_0$, $\dot{\mu}(r) = \mu_0$ si $r > R$ (fuera del cilindro). Dado que una onda plana homogénea incide en el cilindro perpendicularmente a su eje z y está polarizada paralelamente a dicho eje: $\boldsymbol{E}^0 = \boldsymbol{z}_0 E^0$ (el símbolo $\parallel$ en la fig. 51.1). Escribimos:

$$\dot{E}_m^0 = z_0 \dot{A} e^{-ik_0 x}, \qquad \dot{H}_m^0 = -y_0 \frac{\dot{A}}{W_0} e^{-ik_0 x}, \tag{51.1}$$

[1] De forma muy intensa se confeccionan los métodos matemáticos para resolver los problemas de difracción para cuerpos de forma arbitraria que llevan a algoritmos que se resuelven en calculadoras de alta velocidad.

siendo $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $W_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. Expresando $\dot{E}^0_m$ en coordenadas cilíndricas, se tiene $\dot{E}^0_m = z_0 A e^{-ik_0 r\cos\alpha}$. Empleando la fórmula (S6.24), representemos $\dot{E}^0_m$ en forma del siguiente desarrollo:

$$\dot{E}^0_m = z_0 \dot{A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_0 r)\, e^{in\alpha}, \quad r > R. \tag{51.2}$$

Como por la coordenada z el campo E^0, H^0 no varía y el vector E^0 es paralelo al eje del cilindro, entonces, debe tener estas mismas propiedades el campo de difracción: $\partial/\partial z = 0$, $E^{\pm} = z_0 E^{\pm}$, es decir, el problema es bidimensional. De la (29.21) se desprende la ecuación escalar de Helmholtz, a la que satisfacen las funciones $\dot{E}^0_m$, $\dot{E}^+_m$ y $\dot{E}^-_m$:

$$\nabla^2_\perp \dot{E}_m + k^2_{(0)} \dot{E}_m = 0, \tag{51.3}$$

siendo $k^2_{(0)} = \dot{k}^2 = \omega^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu}$ si $r < R$ y $k^2_{(0)} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ para $r > R$. Las soluciones de este problema en coordenadas cilíndricas fueron halladas en el Suplemento 7, punto 3. Nosotros expresaremos $\dot{E}^+_m$ y $\dot{E}^-_m$ en forma de combinaciones lineales de la solución del tipo $\mathcal{R}_l$ (S7.17). Al escoger $\mathcal{R}$, tendremos en cuenta que las soluciones limitadas para la región $r < R$ se expresan, en virtud del (S6.4), por las funciones de Bessel ($B = 0$ en el (S7.17)), mientras que las soluciones para la región $r > R$ que tienen carácter de ondas divergentes, como funciones de Jankell de segundo orden, de acuerdo con el (S6.9) ($P = 0$ en el (S7.17)); escogemos las mismas dependencias azimutales ($\sim l$) que en la representación (51.2). De este modo, podemos escribir las siguientes series con coeficientes incógnitos:

$$\dot{E}^+_m = z_0 \dot{A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n b_n J_n(\dot{k}r)\, e^{in\alpha}, \quad r < R, \tag{51.4}$$

y

$$\dot{E}^-_m = z_0 \dot{A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n H^{(2)}_n(k_0 r)\, e^{in\alpha}, \quad r > R. \tag{51.5}$$

Luego, escribimos iguales desarrollos para el campo magnético. Puesto que a base de la segunda ecuación de Maxwell

$$\dot{H}_m = \frac{i}{\omega\dot{\mu}} \operatorname{rot} \dot{E}_m = \frac{i}{\omega\dot{\mu}} \left(r_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial \alpha} - \alpha_0 \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial r} \right)$$

para

$$\dot{E}_m = z_0 \dot{E}_m,$$

a las series (51.2), (51.4) y (51.5) corresponden las siguientes:

$$\dot{H}^+_m = \frac{i\dot{A}}{\omega\dot{\mu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n b_n \left[r_0 \frac{in}{r} J_n(\dot{k}r) - \alpha_0 \dot{k} J'_n(\dot{k}r) \right] e^{in\alpha}, \; r < R, \tag{51.6}$$

$$\dot{H}^-_m = \frac{i\dot{A}}{\omega\dot{\mu}_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n \left[r_0 \frac{in}{r} H^{(2)}_n(k_0 r) - \alpha_0 k_0 H^{(2)\prime}_n(k_0 r) \right] e^{in\alpha}, \quad r > R, \tag{51.7}$$

y

$$\dot{H}^0_m = \frac{i\dot{A}}{\omega\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \left[r_0 \frac{in}{r} J_n(k_0 r) - \alpha_0 k_0 J'_n(k_0 r) \right] e^{in\alpha}, \quad r > R. \tag{51.8}$$

Después de escribir todas estas expresiones, la solución del problema se reduce a hallar los coeficientes b_n y c_n por medio de la superposición de las condiciones límites. La exigencia de continuidad de las componentes tangenciales de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, toma la forma

$$\dot{E}^0_m + \dot{E}^-_m = \dot{E}^+_m, \quad \dot{H}^0_{m\alpha} + \dot{H}^-_{m\alpha} = \dot{H}^+_{m\alpha}, \quad r = R. \tag{51.9}$$

Al comparar las series (51.2), (51.4) y (51.5) término a término, la primera de las condiciones que hemos escrito, nos da

$$-b_n J_n(kR) + c_n H^{(2)}_n(k_0 R) = -J_n(k_0 R). \tag{51.10}$$

De manera idéntica, en virtud de los desarrollos (51.6)—(51.8), partiendo de la segunda condición, se halla

$$b_n \frac{k}{\mu} J'_n(kR) - c_n \frac{k_0}{\mu_0} H^{(2)\prime}_n(k_0 R) = \frac{k_0}{\mu_0} J'_n(k_0 R). \tag{51.11}$$

Ahora b_n y c_n se determinan como la solución del sistema de ecuaciones (51.10) y (51.11)

$$b_n = \frac{J_n(k_0 R)\, H^{(2)\prime}_n(k_0 R) - J'_n(k_0 R)\, H^{(2)}_n(k_0 R)}{J_n(kR)\, H^{(2)\prime}_n(k_0 R) - \frac{\dot{W}_0}{\dot{W}} J'_n(kR)\, H^{(2)}_n(k_0 R)}, \tag{51.12}$$

$$c_n = \frac{-J_n(kR)\, J'_n(k_0 R) + \frac{\dot{W}_0}{\dot{W}} J'_n(kR)\, J_n(k_0 R)}{J_n(kR)\, H^{(2)\prime}_n(k_0 R) - \frac{\dot{W}_0}{\dot{W}} J'_n(kR)\, H^{(2)}_n(k_0 R)}, \quad \dot{W} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}}{\dot{e}}}.$$

Así, los coeficientes de los desarrollos (51.4)—(51.7) han sido hallados y el campo de difracción está determinado.

Hace falta señalar que las series obtenidas convergen con suficiente rapidez sólo para los cilindros de diámetros no muy grandes.

3. Análisis de los resultados. Cilindro de conducción ideal. Pasemos al análisis de los resultados obtenidos tomando primeramente un cilindro de conducción ideal. Consideremos que el caso dado es límite cuando $\dot{e} \to -i\infty$. Puesto que simultáneamente $\dot{W} \to 0$, las expresiones límites de los coeficientes b_n y c_n (51.12), tienen la forma

$$b_n = 0, \quad c_n = -\frac{J_n(k_0 R)}{H^{(2)}_n(k_0 R)}. \tag{51.13}$$

Como era de esperar, el campo interior $\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{H}^+$ no existe. Claro está que la condición límite (51.9) no se satisface para H_α

en la superficie de un cilindro de conducción ideal. Dicha condición se sustituye por la correspondiente condición límite expuesta en el punto 1.

$$[\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{H}}_m^0 + \dot{\boldsymbol{H}}_m^-] = \dot{\eta}_m \text{ para } r = R, \tag{51.14}$$

que nos permite hallar la densidad de corriente superficial excitada por la onda incidente. En virtud de la (51.14)

$$\dot{\eta}_m = \boldsymbol{z}_0 (\dot{H}_{m\alpha}^0 + \dot{H}_{m\alpha}^-)|_{r=R}. \tag{51.15}$$

Deseando hallar el campo exterior de difracción $\boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{H}^-$ en la zona alejada, haremos uso de la expresión asintótica de la función de Hankel (S6.8), según la cual

$$H_n^{(2)}(k_0 r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\, e^{-i\left|k_0 r - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|} \text{ y } H_n^{(2)\prime}(k_0 r) \approx -i H_n^{(2)}(k_0 r). \tag{51.16}$$

Teniendo en cuenta las (51.13), de las (51.5) y (51.7) se obtienen las siguientes series para el campo de dispersión alejado

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m^- = -\boldsymbol{z}_0 \dot{A} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\, e^{-i\left(k_0 r - \frac{\pi}{4}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k_0 R)}{H_n^{(2)}(k_0 R)} e^{in\alpha} \tag{51.17}$$

y

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m^- = \alpha_0 \frac{\dot{A}}{W_0} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}}\, e^{-i\left(k_0 r - \frac{\pi}{4}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k_0 R)}{H_n^{(2)}(k_0 R)} e^{in\alpha} \tag{51.18}$$

(a causa del factor complementario $1/r$, la componente radial del vector $\boldsymbol{H}$ es, en comparación con la azimutal, despreciable en la zona lejana). Las fórmulas (51.17) y (51.18) definen la onda *cilíndrica* que de modo local puede considerarse como onda plana homogénea corriente (§ 32) con una impedancia de onda W_0.

La suma de las series (51.17), (51.18) es prácticamente difícil cuando $k_0 R > 10$, es decir, cuando el radio del cilindro es mayor que una magnitud de orden de $3\lambda/2$. Por los resultados de la suma se halla la densidad del flujo de energía de dispersión $\boldsymbol{\Pi}^-$; respecto a la sección transversal de dispersión $S_\perp$ (§ 50, punto 5), en virtud de que el problema es bidimensional, podemos referirnos como a una magnitud reducida a la unidad de longitud del cilindro. La curva característica de dispersión se expresa por la magnitud

$$F(\alpha) = \frac{\sqrt{\Pi^-(\alpha)}}{\sqrt{\Pi_{\max}^-}} = \frac{E_m^-(\alpha)}{E_{m\max}^-} = \frac{H_m^-(\alpha)}{H_{m\max}^-}, \tag{51.19}$$

donde se sobreentienden las amplitudes de los vectores del campo definidas por las correlaciones (51.17), (51.18). En la fig. 51.2, en escala convencional, se representan las gráficas de la función $\sqrt{\Pi(\alpha)}$ para cilindros de diferentes diámetros [D.4]: allí mismo se muestra a trazos la curva para el caso límite $R/\lambda \to \infty$, obte-

nida según las reglas de la óptica geométrica (§ 50, punto 2). Como vemos, en la "zona de sombra" se tiene, en realidad, el máximo de radiación dispersa que se agudiza a medida de la disminución relativa de la longitud de onda. Con los valores del parámetro R/λ que hemos considerado, está aún muy lejana la región de las dimensiones relativas del cilindro, para las que podemos esperar resultados satisfactorios al aproximarnos a la óptica

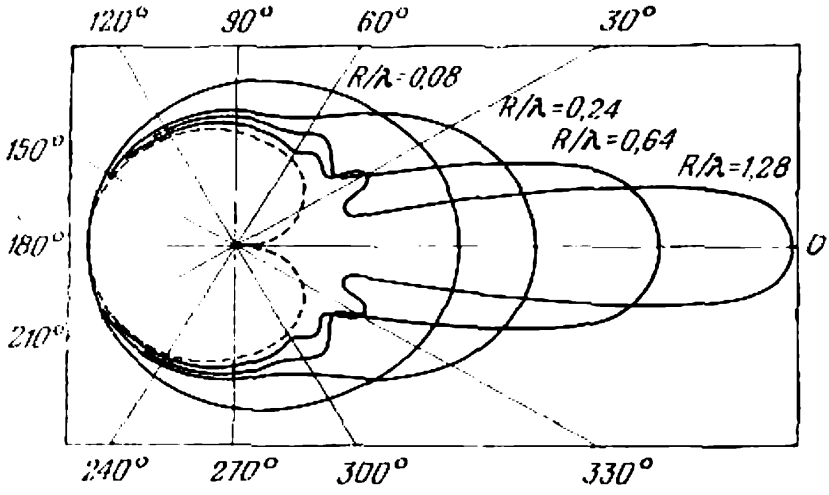


Fig. 51.2.

geométrica. No obstante, al crecer R/λ las curvas en la fig. 51.2 se aproximan en mayor grado a la curva límite a trazos, fuera de la "zona de sombra".

La solución para $\dot{\boldsymbol{E}}_m^-$, $\dot{\boldsymbol{H}}_m^-$ (51.17), (51.18) satisface las exigencias que garantizan su unicidad. Hay que tomar en cuenta que en este caso no se puede aplicar directamente el criterio del § 31, punto 2, ya que el problema es bidimensional (y en este sentido, artificial). Para poder aplicar los razonamientos del § 31, punto 2 a los problemas bidimensionales, hay que considerar la construcción *en la fig. 31.1, b como la sección transversal de un cilindro* infinito. Al reducir la superficie S'' al infinito, ésta crecerá no como r^2, lo que tenía lugar en el caso tridimensional, sino como r. Por esta razón, al deducir definitivamente la ley tolerable de decrecimiento de los campos, en lugar de $1/r$, conviene introducir la función $1/\sqrt{r}$. En otras palabras, la unicidad de la solución del problema bidimensional de electrodinámica (en la clase respectiva) se garantiza si, al introducir absorción, los vectores del campo decrecen con mayor rapidez que $1/\sqrt{r}$. Y precisamente de las (51.17), (51.18) se desprende que $\dot{\boldsymbol{E}}_m^-$, $\dot{\boldsymbol{H}}_m^-$ decrecen más rápidamente que $1/\sqrt{r}$, al sustituir k_0 por el número complejo de onda

Un carácter absolutamente idéntico de variación también se introduce en la condición de radiación (S5.24). Las funciones $\dot{\boldsymbol{E}}_m^-$, $\dot{\boldsymbol{H}}_m^-$ (51.17), (51.18) satisfacen a la condición de radiación

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left[\frac{\partial \dot{\boldsymbol{F}}_m}{\partial r} + ik_0\dot{\boldsymbol{F}}_m\right] = 0 \tag{51.20}$$

(compárese con el (S5.24)).

4. **Aplicación del principio de dualidad.** Más adelante consideremos la difracción en un cilindro de una onda con diferente polarización (fig. 51.1, símbolo $\perp$), de modo que

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^0 &= \boldsymbol{y}_0 \dot{A} W_0 e^{-ik_0 x}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^0 &= \boldsymbol{z}_0 \dot{A} e^{-ik_0 x}. \end{aligned}\right\} \tag{51.21}$$

Si anteriormente (punto 2), de momento inicial nos servía el desarrollo (51.2) de la amplitud compleja $\dot{\boldsymbol{E}}_m^0$, ahora el papel de $\dot{\boldsymbol{E}}_m^0$ lo hace el vector $\dot{\boldsymbol{H}}_m^0$ paralelo al eje del cilindro. Para hallar la solución hay que efectuar operaciones análogas a las anteriores, tomando $\dot{\boldsymbol{H}}_m^0$ en lugar de $\dot{\boldsymbol{E}}_m^0$; esto nos deberá exigir el mismo volumen de cálculos. Sin embargo, podemos obtener la solución con mayor rapidez aplicando el principio de dualidad (§ 46, punto 3). De la comparación efectuada anteriormente, se desprende que los campos difractados también deben sustituirse mutuamente. Precisamente las expresiones $\dot{\boldsymbol{E}}_m^+$ (51.4) y $\dot{\boldsymbol{H}}_m^+$ (51.6) nos darán $\dot{\boldsymbol{H}}_m^+$ y $\dot{\boldsymbol{E}}_m^+$, respectivamente, al realizar la sustitución (incluyendo, naturalmente, la fórmula para b_n) de ε por $-\mu$ y viceversa, como debe suceder de acuerdo con las (46.9a), (46.9b). Así, ahora

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m^+ = -\frac{i\dot{A}}{\omega\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n b_n\left[\boldsymbol{r}_0\,\frac{in}{r}J_n(kr) - \boldsymbol{\alpha}_0 k J_n'(kr)\right]e^{in\alpha}, \quad r < R \tag{51.22}$$

y

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m^+ = \boldsymbol{z}_0\dot{A}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n b_n J_n(kr)\,e^{in\alpha}, \quad r < R. \tag{51.23}$$

Exactamente, las expresiones para $\dot{\boldsymbol{E}}_m^-$ (51.5) y $\dot{\boldsymbol{H}}_m^-$ (51.7) al sustituir ε_0 por $-\mu_0$ y viceversa (incluyendo la fórmula para c_n), se convierten, respectivamente, en $\dot{\boldsymbol{H}}_m^-$ y $\dot{\boldsymbol{E}}_m^-$:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m^- = -\frac{i\dot{A}}{\omega\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n c_n\left[\boldsymbol{r}_0\,\frac{in}{r}H_n^{(2)}(k_0 r) - \boldsymbol{\alpha}_0 k_0 H_n^{(2)\prime}(k_0 r)\right]e^{in\alpha}, \quad r > R, \tag{51.24}$$

y

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m^- = \boldsymbol{z}_0 A\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n c_n H_n^{(2)}(k_0 r)\,e^{in\alpha}, \quad r > R. \tag{51.25}$$

En las (51.22)—(51.25)

$$b_n \quad \frac{J_n(k_0R)\,H_n^{(2)'}(k_0R) - J_n'(k_0R)\,H_n^{(2)}(k_0R)}{J_n(\dot{k}R)\,H_n^{(2)'}(k_0R) - \frac{\dot{W}}{W_0}\,J_n'(\dot{k}R)\,H_n^{(2)}(k_0R)}\,,$$

$$c_n \quad \frac{-J_n(\dot{k}R)\,J_n'(k_0R) + \frac{\dot{W}}{W_0}\,J_n'(\dot{k}R)\,J_n(k_0R)}{J_n(\dot{k}R)\,H_n^{(2)'}(k_0R) - \frac{\dot{W}}{W_0}\,J_n'(\dot{k}R)\,H_n^{(2)}(k_0R)}\,, \qquad (51.26)$$

lo que se desprende de la (51.12).

De esta manera, la solución de un nuevo problema de difracción se ha obtenido a base de la ya conocida solución, realizando sencillas transformaciones.

Hablando en rigor, el problema del cilindro de conducción ideal con la polarización dada de la onda incidente, debe resolverse independientemente. Pero cuando $\dot{\varepsilon} \to -i\infty$, de la (51.26) se obtienen valores correctos de c_n y, por consiguiente, las fórmulas (51.24), (51.25) pueden ser empleadas. El campo interior de difracción desaparece.

5. **Límite cuasiestacionario.** Retornemos a las fórmulas (51.4), (51.6) y (51.12) y, suponiendo que el diámetro del cilindro es muy pequeño en comparación con la longitud de la onda, hallemos la expresión para el campo interior de difracción.

Haciendo uso de las fórmulas (S6.11)—(S6.12), de las (51.12), hallamos que para $R/\lambda \to 0$

$$b_0 = 1 \quad y \quad b_1 = b_{-1} = \frac{2}{\dot{k}/k_0 + W_0/\dot{W}}\,. \qquad (51.27)$$

Cuando $R/\lambda \to 0$, en la (51.4) sólo queda un término con $n = 0$, en el que $J_n(\dot{k}r) \to 1$. Como resultado, $\dot{\boldsymbol{E}}_m^+ = \boldsymbol{z}_0\dot{A}$, es decir,

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m^+ = \dot{\boldsymbol{E}}_m^0 \quad (x = 0). \qquad (51.28)$$

Por esto podemos considerar que el campo eléctrico interior de difracción, cuando el cilindro es de muy pequeño grosor para la polarización dada de la onda incidente, no se diferencia del campo de esta última. Esta deducción nos parece extremadamente natural, en virtud de la continuidad de la componente tangencial del vector $\boldsymbol{E}$.

Para determinar $\dot{\boldsymbol{H}}_m^+$ es suficiente tomar en la (51.6) sólo los términos con $n = 1$ y $n = -1$, ya que todos los demás (e incluso el nulo), desaparecen cuando $R/\lambda \to 0$. En este caso, tenemos

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m^+ = \frac{\dot{A}}{\dot{W}}\,\frac{2}{\dot{k}/k_0 + W_0/\dot{W}}\left[\left(\boldsymbol{r}_0\,\frac{i}{2} - \boldsymbol{\alpha}_0\,\frac{1}{2}\right)e^{i\alpha} - \left(\boldsymbol{r}_0\,\frac{i}{2} + \boldsymbol{\alpha}_0\,\frac{1}{2}\right)e^{-i\alpha}\right] =$$

$$= -\frac{\dot{A}}{\dot{W}}\,\frac{2}{\dot{k}/k_0 + W_0/\dot{W}}\,(\boldsymbol{r}_0 \operatorname{sen}\alpha + \boldsymbol{\alpha}_0\cos\alpha) = -\boldsymbol{y}_0\,\frac{\dot{A}}{\dot{W}}\,\frac{2}{\dot{k}/k_0 + W_0/\dot{W}}.$$

De acuerdo con las (51.1), $\dot{H}_m^0 = -y_0 A/W_0$ si $x=0$ y por esta razón

$$\dot{H}_m^+ = \frac{2\mu_0}{\dot{\mu}+\mu_0}\dot{H}_m^0 \quad (x=0). \tag{51.29}$$

Para otra polarización de la onda incidente (punto 4), cuando $R/\lambda \to 0$ y de las (51.26), se obtiene

$$b_0 = 1 \quad \text{y} \quad b_1 = b_{-1} = \frac{2}{\dot{k}/k_0 + \dot{W}/W_0} \tag{51.30}$$

y, a continuación, por medio de las (51.22), (51.23), hallamos

$$\dot{E}_m^+ = \frac{2\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}+\varepsilon_0}\dot{E}_m^0 \quad (x=0) \tag{51.31}$$

y

$$\dot{H}_m^+ = \dot{H}_m^0 \quad (x=0) \tag{51.32}$$

(todas las operaciones son análogas).

Las fórmulas del límite cuasiestacionario (51.28), (51.29) y (51.31), (51.32) pueden emplearse al cumplirse la condición (50.7).

Finalmente, señalemos que los resultados obtenidos coinciden, en sustancia, con las correspondientes soluciones de los problemas de electrostática y magnetostática: compárense (51.29) con (21.8) y (51.31) con (20.19).

§ 52. Difracción en una esfera

1. Solución del problema. Sea que una onda plana homogénea, cuyos vectores tienen las siguientes amplitudes complejas

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m^0 &= x_0 \dot{A} e^{-ik_0 z}, \\ \dot{H}_m^0 &= y_0 \frac{\dot{A}}{W_0} e^{-ik_0 z} \end{aligned}\right\} \tag{52.1}$$

(la permitividad y permeabilidad magnética del medio son ε_0 y μ_0), incide sobre un cuerpo esférico (fig. 52.1) con permeabilidades $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\mu}$.

Es posible obtener la solución del problema del mismo modo que en el caso de difracción en un cilindro, es decir, descompo-

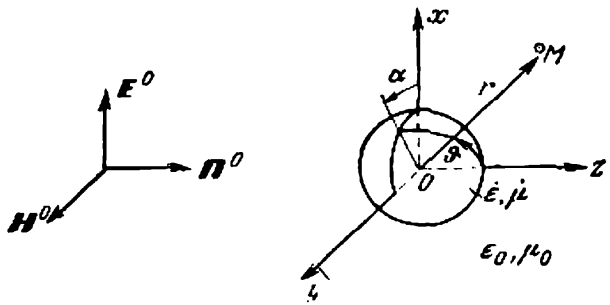


Fig. 52.1

niendo la onda incidente según las funciones convenientes y confeccionando desarrollos análogos con coeficientes indeterminados para el campo de difracción; estos últimos se hallan superponiendo las condiciones límites. Sin embargo, la realización de este método resulta ser más complicada. En lugar de los "armónicos cilíndricos" $\mathcal{AR}$ (S7.17), ahora tenemos que emplear los "armónicos esféricos" $\mathcal{R\Theta A}$ (S7.35), además, no directamente sino que mediante la construcción de sus funciones vectoriales. Recomendando al lector, que se interesa por detalles, la correspondiente literatura (por ejemplo, [A.2], pág. 542), nos limitaremos a escribir la solución acabada.

Campo interior de difracción:

$$\dot{E}_m^+ = \dot{A} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n^M M_{on}^+ + i b_n^N N_{en}^+), \quad r < R, \tag{52.2}$$

$$\dot{H}_m^+ = -\frac{\dot{A}}{W} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n^N M_{en}^+ - i b_n^M N_{on}^+), \quad r < R, \tag{52.3}$$

siendo

$$M_{e^o_n}^+ = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \left| \pm \vartheta_0 \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta} P_n^{(1)}(\cos\vartheta)_{\operatorname{sen}}^{\cos} \alpha - \right.$$
$$\left. - \alpha_0 \frac{d}{d\vartheta} P_n^{(1)}(\cos\vartheta)_{\cos}^{\operatorname{sen}} \alpha \right| \tag{52.4a}$$

y

$$N_{e^o_n}^+ = \frac{1}{kr} \left\{ r_0 n(n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n^{(1)}(\cos\vartheta)_{\cos}^{\operatorname{sen}} \alpha + \right.$$
$$+ \vartheta_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{kr}\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right]' \frac{d}{d\vartheta} P_n^{(1)}(\cos\vartheta)_{\cos}^{\operatorname{sen}} \alpha \pm$$
$$\left. \pm \alpha_0 \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{kr}\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right]' P_n^{(1)}(\cos\vartheta)_{\operatorname{sen}}^{\cos} \alpha \right\}, \tag{52.4b}$$

indicando el índice $o(e)$ la elección de la variante superior (inferior) del signo doble y de la función trigonométrica; las fórmulas para los coeficientes b_n^M y b_n^N se darán más adelante.

Campo exterior de difracción:

$$\dot{E}_m^- = \dot{A} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (c_n^M M_{on}^- + i c_n^N N_{en}^-), \quad r > R, \tag{52.5}$$

$$\dot{H}_m^- = -\frac{\dot{A}}{W_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (c_n^N M_{en}^- - i c_n^M N_{on}^-), \quad r > R. \tag{52.6}$$

Las funciones $M_{e^o_n}^-$ y $N_{e^o_n}^-$ que vemos en las anteriores fórmulas se obtienen sustituyendo en $M_{e^o_n}^+$ y $N_{e^o_n}^+$ (52.4) k por k_0 y $J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ por $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0 r)$.

En las (52.5), (52.6) y (52.2), (52.3)

$$c_n^M = \left\{ -\frac{\dot{\mu}}{\mu_0}\sqrt{\frac{k_0}{k}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)\left[\sqrt{k_0 R}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)\right]' + \right.$$

$$\left. + J_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R)\left[\sqrt{\dot{k}R}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)\right]' \right\} \left\{ \frac{\dot{\mu}}{\mu_0}\sqrt{\frac{k_0}{k}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\sqrt{k_0 R}\, H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R)\right]' - H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R)\left[\sqrt{\dot{k}R}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)\right]' \right\}^{-1},$$

$$c_n^N = \left\{ -J_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R)\left[\sqrt{\dot{k}R}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)\right]' + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{k_0}{k}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\sqrt{k_0 R}\, J_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R)\right]' \right\} \left\{ H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R)\left[\sqrt{\dot{k}R}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)\right]' - \right.$$

$$\left. - \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{k_0}{k}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)\left[\sqrt{k_0 R}\, H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R)\right]' \right\}^{-1} \qquad (52.7a)$$

y

$$b_n^M = \sqrt{\frac{k}{k_0}}\, \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R) - c_n^M H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)},$$

$$b_n^N = -\frac{\dot{\mu}}{\mu_0}\sqrt{\frac{k_0}{k}}\, \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R) + c_n^N H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)}. \qquad (52.7b)$$

2. Ciertas deducciones. Recordemos que en el § 50, punto 4 ya se consideró el problema de difracción en una esfera transparente con una aproximación cuasiestacionaria. Fue establecido que la dispersión de una esfera dieléctrica suficientemente pequeña, es semejante a la radiación de un dipolo de Hertz y en caso más general, la esfera se comporta como un conjunto de radiadores eléctrico y magnético. Esta misma deducción es también justa al tratar una esfera de conducción ideal. Señalemos que las fórmulas (50.11), (50.13) pueden obtenerse para el límite de la solución escrita anteriormente, cuando $R/\lambda \to 0$ (empleando también la transformación de las coordenadas); un paso límite semejante fue realizado en el caso del cilindro (§ 51, punto 5).

A medida que $k_0 R$ aumenta, la radiación dispersa se hace más complicada. Consideremos ciertos datos [D.5] obtenidos para una esfera de conducción ideal para los límites de $k_0 R = 0{,}5 \div 10$ sumando las series. Los resultados están representados gráficamente en la fig. 52.2; las funciones $\dot{A}_{\parallel}(\vartheta)$ y $\dot{A}_{\perp}(\vartheta)$ tienen el sentido de coeficientes en las expresiones de las componentes de los sectores $\dot{\boldsymbol{E}}_m^-$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m^-$ en la zona lejana. Es decir, estos vectores tienen

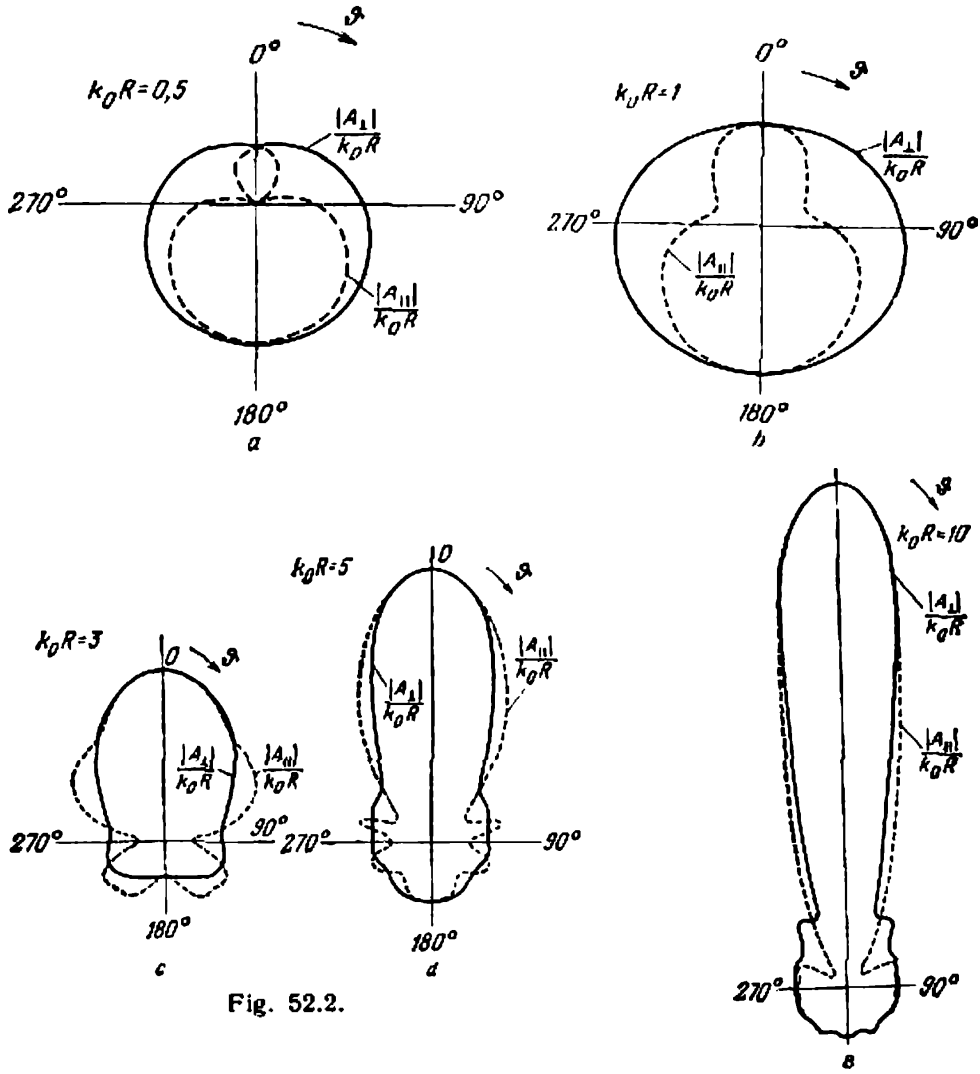


Fig. 52.2.

el aspecto

$$\dot{\vec{E}}_m^- = -i\dot{A}\,\frac{e^{-ik_0r}}{k_0r}\,[\vartheta_0\dot{A}_\parallel(\vartheta)\cos\alpha - \alpha_0\dot{A}_\perp(\vartheta)\operatorname{sen}\alpha], \qquad (52.8)$$

$$\dot{\vec{H}}_m^- = -i\,\frac{\dot{A}}{W_0}\,\frac{e^{-ik_0r}}{k_0r}\,[\vartheta_0\dot{A}_\perp(\vartheta)\operatorname{sen}\alpha + \alpha_0\dot{A}_\parallel(\vartheta)\cos\alpha], \qquad (52.9)$$

de forma que

$$\overline{\Pi}^- = \frac{r_0A^2}{2W_0k_0^2r^2}\,[|\dot{A}_\parallel(\vartheta)|^2\cos^2\alpha + |\dot{A}_\perp(\vartheta)|^2\operatorname{sen}^2\alpha]. \qquad (52.10)$$

En la fig. 52.2 se muestra un cuadro que nos recuerda el proceso, anteriormente considerado, de la dispersión en un cilindro de conducción ideal (§ 51, punto 3). Al crecer el parámetro k_0R el

máximo de la radiación dispersa en la "zona de sombra" se agudiza en mayor grado.

Podemos demostrar que la sección transversal de la dispersión de una esfera se expresa mediante los coeficientes c_n^M y c_n^N (52.7a) de la forma siguiente:

$$S_\perp = \frac{2\pi}{k_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(|c_n^M|^2 + |c_n^N|^2). \tag{52.11}$$

Representa gran interés la zona donde los valores del parámetro $k_0 R$ son muy grandes, ya que esta cuestión está relacionada con la propagación de ondas de radio sobre la superficie de la esfera terrestre (véase también la observación en el § 50, punto 5). Sin embargo, no podemos detenernos en los métodos de transformación de las soluciones aplicadas para efectuar apreciaciones en esta región a causa de su singularidad matemática.

Con aproximación de la óptica geométrica para una esfera de conducción ideal, es fácil obtener la fórmula

$$\frac{\overline{\Pi}^-}{\overline{\Pi}^0} = \frac{R^2}{4r^2} \tag{52.12}$$

que caracteriza la dispersión de la zona lejana de la región iluminada (la dimensión angular de la zona de sombra si $r \to \infty$ es despreciable): recomendamos que el lector la deduzca independientemente del mismo modo que se empleó para hallar la fórmula (50.4). Remarquemos que la dispersión que describimos es *isótropa*: $\overline{\Pi}^-$ no depende de las coordenadas angulares. Calculando el flujo del vector $\overline{\Pi}^-$ por la superficie que comprende el objeto de difracción (sea éste una esfera de radio r), se tiene

$$\overline{P}_{\text{ref}} = 4\pi r^2 \overline{\Pi}^- = \pi R^2 \overline{\Pi}^0. \tag{52.13}$$

También sería igual el flujo reflejado de energía, al sustituir un objeto esférico por un disco de un mismo diámetro orientado normalmente (§ 50, punto 5). El flujo total de la energía de dispersión, teniendo en cuenta la zona de sombra, es dos veces mayor (§ 50, punto 5): $\overline{P}^- = 2\overline{P}_{\text{ref}}$ y la sección transversal de la dispersión de una esfera de conducción ideal, en aproximación de la óptica geométrica, resulta ser igual a

$$S_\perp = \frac{\overline{P}^-}{\overline{\Pi}^0} = 2\pi R^2. \tag{52.14}$$

§ 53. Método de Huygens — Kirchhoff. Difracción de Fraunhofer en un orificio.

1. Método de Huygens — Kirchhoff y planteamiento del problema. En la fig. 53.1 se muestran esquemáticamente varios casos de la difracción de ondas esférica (*a*, *c*) y plana (*b*, *d*) en cuerpos opa-

cos, por ejemplo, de conducción ideal; en particular, el cuerpo puede tener la forma de una pantalla con orificio (*c*, *d*).

Desde el punto de vista de la óptica geométrica, un cuerpo opaco cubre el manantial dejando tras de sí la zona de sombra.

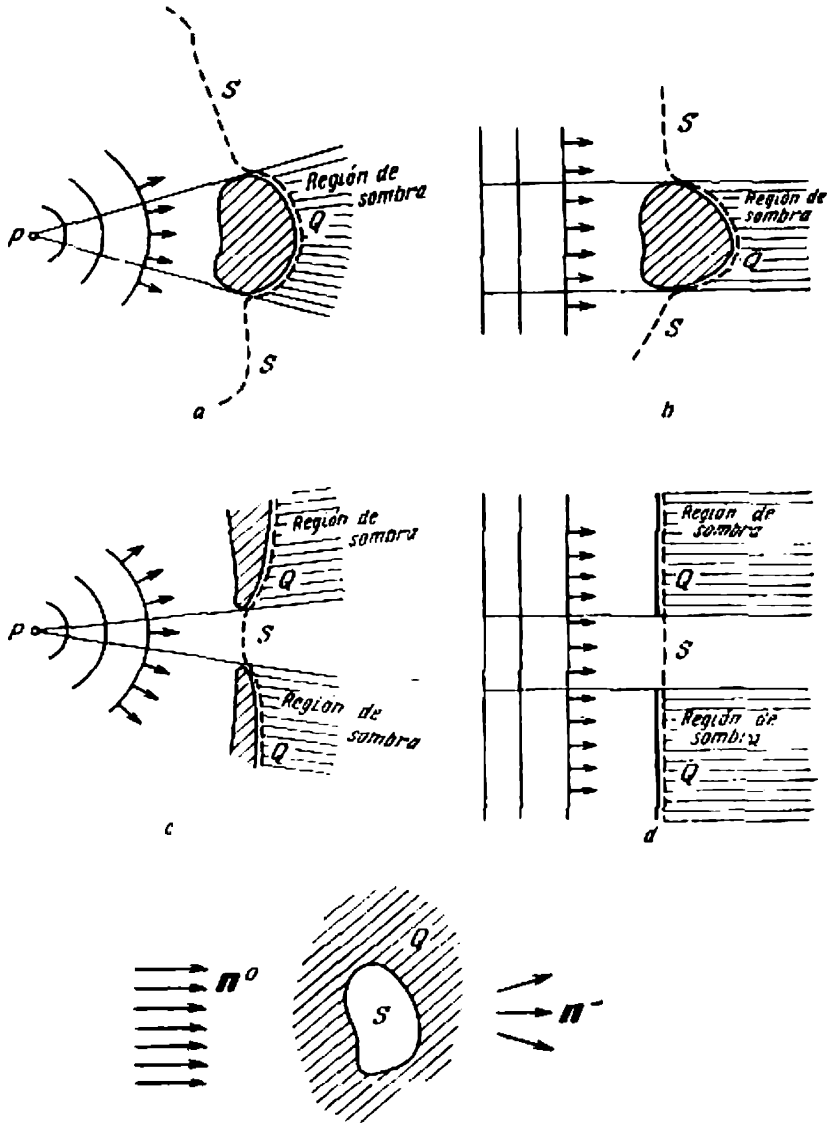


Fig 53 1.

Puede constituirse una superficie que conste de las partes Q y S, por uno de cuyos lados queda el manantial de la onda incidente (la línea $Q+S$ se muestra en la fig. 53.1 a trazos), encontrándose

Q totalmente en la región de la sombra imaginada y uniéndose con S en su frontera. Planteemos la tarea de hallar el campo fuera de la superficie $Q+S$. En virtud del § 47, su existencia puede ser atribuida a la radiación de manantiales equivalentes, es decir, las corrientes eléctrica y magnética superficiales, cuyas densidades, a base de las (47.3), se determinan por completo mediante las componentes tangenciales $\boldsymbol{E}^S$ y $\boldsymbol{H}^S$ de los vectores del campo en $Q+S$. En esencia, esto significa el uso del *principio de Huygens*.

No obstante, al plantear el problema los valores exactos de $\boldsymbol{E}^S$ y $\boldsymbol{H}^S$ no pueden ser conocidos; por dicha razón nos valemos de las representaciones aproximadas de estas funciones. Ya Kirchhoff (para el problema escalar de la óptica ondulatoria) propuso el método que aun hoy día se emplea extensamente para la solución de diferentes problemas de difracción y en la teoría de las antenas. *La aproximación de Kirchhoff* se determina en electrodinámica por la superposición de las condiciones

$$\boldsymbol{E}^S = \begin{cases} \boldsymbol{E}^0 \text{ en } S, \\ 0 \quad \text{en } Q. \end{cases} \qquad \boldsymbol{H}^S = \begin{cases} \boldsymbol{H}^0 \text{ en } S, \\ 0 \quad \text{en } Q. \end{cases} \tag{53.1}$$

De este modo, se supone que por el lado ensombrecido de un cuerpo opaco, las intensidades del campo se reducen a cero, mientras que fuera del cuerpo la onda incidente no se deforma.

Sea que examinamos el problema de difracción en un orificio (fig. 53.1, *c*, *d*, *e*). En este caso, el campo que se crea por los manantiales equivalentes distribuidos en $S+Q$ será, ni más ni menos, que el campo exterior de difracción. Definiéndolo por medio del principio de Huygens (§ 47, punto 2), según las (46.6), se escribe

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m^- = \dot{\boldsymbol{E}}_{m1} + \dot{\boldsymbol{E}}_{m2}, \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m^- = \dot{\boldsymbol{H}}_{m1} + \dot{\boldsymbol{H}}_{m2}, \tag{53.2}$$

donde los sumandos se hallan en la aproximación de Kirchhoff (53.1) según las fórmulas (47.4), (47.6) tomando en cuenta las igualdades $\dot{\boldsymbol{E}}_{m1} \quad \frac{i}{\omega\varepsilon}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}}_{m1}$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_{m2} = \frac{i}{\omega\mu}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{E}}_{m2}$ que se desprenden de las (46.8), (46.10) o bien, por medio de los potenciales vectoriales. En tal caso, en las (47.4)—(47.7), de acuerdo con las (53.1),

$$\dot{\eta}_m \quad [\mathbf{v}_0, \dot{\boldsymbol{H}}_m^0] \text{ y } \dot{\eta}_m^M = [\dot{\boldsymbol{E}}_m^0, \mathbf{v}_0].$$

Si el problema de difracción del tipo mostrado en la fig. 53.1, *a*, *b* se resuelve, entonces el campo de radiación total de los manantiales equivalentes también contiene la onda incidente; en este caso las fórmulas (53.2) se sustituyen por las siguientes:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m^- + \dot{\boldsymbol{E}}_m^0 = \dot{\boldsymbol{E}}_{m1} + \dot{\boldsymbol{E}}_{m2}, \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m^- + \dot{\boldsymbol{H}}_m^0 = \dot{\boldsymbol{H}}_{m1} + \dot{\boldsymbol{H}}_{m2}. \tag{53.2a}$$

Los sumandos de los segundos miembros se hallan como lo hicimos anteriormente.

Señalemos, por fin, que al hacer uso de las fórmulas (47.4), (47.6) tiene, en la mayoría de los casos, sentido despreciar el sumando $|r-r'|^2$ (campo cercano) entre paréntesis, como lo hicimos en el § 47, punto 3.

El enfoque escrito se denominan el *método de Huygens — Kirchhoff*.

2. **Definición del campo de difracción en la zona lejana.** Prestemos nuestra atención al problema de la incidencia normal de la onda E^0, H^0 en el vacío sobre una pantalla de conducción ideal con orificio (fig. 53.1, *d*, *e*); en este caso

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m^0 &= x_0 \dot{A} e^{-ik_0 z}, \\ \dot{H}_m^0 &= y_0 \frac{\dot{A}}{W_0} e^{-ik_0 z}. \end{aligned}\right\} \tag{53.3}$$

Podemos decir que el orificio S "corta" un sector del frente de onda incidente y cada elemento de S en la aproximación de Kirchhoff es un elemento corriente de Huygens. De hecho, parte de trabajo necesario para hallar el campo de difracción por el método indicado anteriormente (punto 1), fue ya realizado en el § 47, punto 3 al obtener las expresiones (47.20). Conociendo el campo de radiación del elemento de Huygens podemos considerar el orificio como un sistema de radiadores de dicho tipo distribuidos continuamente que crean el campo de dirfacción E^-, H^- (véase también el § 49, punto 4).

Expresemos el campo, de difracción en el punto $M(r)$ (es decir, $M(r, \vartheta, \alpha)$ o bien $M(x, y, z)$ creado por un elemento arbitrario de Huygens ubicado cerca del punto $P(r')$ (la pantalla se encuentra en el plano $z=0$, de modo que el punto $P(x', y', 0)$). En virtud del primer renglón de las (47.20), la amplitud compleja del vector E^- es igual a

$$d\dot{E}_m^- = \frac{ik_0 \dot{E}_m^0(0)}{4\pi} (1+\cos\vartheta_q)(\vartheta_{0q}\cos\alpha_q - \alpha_{0q}\operatorname{sen}\alpha_q) \frac{e^{-ik_0|r-r'|}}{|r-r'|} dx'\,dy' \tag{53.4}$$

y a base del segundo renglón de las (47.20), de forma análoga se escribe $d\dot{H}_m^-$. Aquí, llevan el índice q las coordenadas angulares y sus versores para la dirección $r-r'$.

El campo completo de difracción se determina integrando las funciones $d\dot{E}_m^-$ y $d\dot{H}_m^-$ respecto a las coordenadas del orificio. Teniendo en cuenta que la distancia hasta el punto de observación supera considerablemente las dimensiones del orificio, podemos suponer que: $|r-r'|^{-1} \approx r^{-1}$, $\vartheta_q \approx \vartheta$ y $\alpha_q \approx \alpha$, es decir, que las amplitudes de todos los campos elementales en el punto $M(r)$ y las direcciones de todos los radiadores en $M(r)$, pueden suponerse

iguales. Entonces

$$\dot{E}_m^- = \frac{ik_0 \dot{E}_m^0(0)}{4\pi r}(1+\cos\vartheta)(\vartheta_0\cos\alpha - \alpha_0 \operatorname{sen}\alpha)\int_S e^{-ik_0|r-r'|}\,dx'\,dy'. \tag{53.5}$$

Sea que el orificio tiene forma rectangular (fig. 53.2). Ya que $|r-r'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2} = \sqrt{r^2 - 2(xx'+yy')+x'^2+y'^2}$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y, además, x' e y' son muy pequeños en comparación con r, entonces por medio del desarrollo de $|r-r'|$

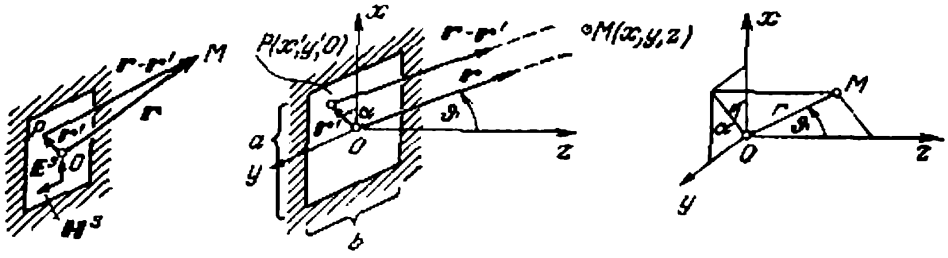


Fig. 53.2.

en una serie binomia, salvo los infinitésimos de segundo orden, se tiene:

$|r-r'| = r - \frac{1}{r}(xx'+yy') + \ldots$ La igualdad (53.5) toma el aspecto

$$\dot{E}_m^- = \frac{ik_0\dot{A}}{4\pi}\frac{e^{-ik_0 r}}{r}(1+\cos\vartheta)(\vartheta_0\cos\alpha - \alpha_0\operatorname{sen}\alpha)\times$$
$$\times \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_0\frac{xx'+yy'}{r}}\,dx'\,dy' \tag{53.6}$$

Según el (53.3) $\dot{E}_m^0(0) = \dot{A}$) y como resultado de la integración se obtiene

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_0\frac{xx'+yy'}{r}}\,dx'\,dy' = ab\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k_0 a}{2r}x\right)}{\frac{k_0 a}{2r}x}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k_0 b}{2r}y\right)}{\frac{k_0 b}{2r}y}.$$

Pasando aquí a coordenadas esféricas, de acuerdo con las correlaciones $x = r\cos\alpha\operatorname{sen}\vartheta$ e $y = r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\vartheta$ (fig. 53.2), en virtud de (53.6), se obtiene definitivamente

$$\dot{E}_m^- = \frac{ik_0\dot{A}ab}{4\pi}\frac{e^{-ik_0 r}}{r}(\vartheta_0\cos\alpha - \alpha_0\operatorname{sen}\alpha)\times$$
$$\times \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k_0 a}{2}\cos\alpha\operatorname{sen}\vartheta\right)}{\frac{k_0 a}{2}\cos\alpha\operatorname{sen}\vartheta}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k_0 b}{2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\vartheta\right)}{\frac{k_0 b}{2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\vartheta}\,(1+\cos\vartheta) \tag{53.7}$$

De modo exactamente igual, partiendo de la expresión $d\dot{\vec{H}}_m$, podemos hallar $\dot{\vec{H}}_m$. Por esto, resulta que

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{W_0}[\vec{r}_0, \dot{\vec{E}}_m]. \qquad (53.8)$$

3. Investigación del campo de difracción. Escribamos las expresiones de la curva característica de radiación de un orificio que se desprenden de las (53.7), (53.8):

$$F(\vartheta, \alpha) = \frac{\sqrt{\Pi(\vartheta, \alpha)}}{\sqrt{\Pi(0, \alpha)}} = \frac{1 + \cos\vartheta}{2}\left|\frac{\operatorname{sen} u}{u}\frac{\operatorname{sen} v}{v}\right|, \qquad (53.9)$$

siendo $u = \frac{k_0 a}{2}\cos\alpha \operatorname{sen}\vartheta$ y $v = \frac{k_0 b}{2}\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\vartheta$. El resultado obtenido es muy importante. Desde el punto de vista de la teoría de antenas (*el lector estudiará esta teoría en el curso correspondiente*), ésta es la curva característica de emisión de "una antena en disco ideal" que nos sirve de modelo que parcialmente reproduce las propiedades de múltiples antenas reales. Según las tradiciones de la óptica, la difracción de una onda plana mediante un orificio, observada en la zona lejana, se denomina *difracción de Fraunhofer*.

Consideremos con mayor detalle la fórmula (53.9). Como vemos, la función $F(\vartheta, \alpha)$ es el producto de tres factores, uno de los cuales es, ni más ni menos, la curva característica de emisión del elemento de Huygens (47.22), mientras que los dos restantes, son los *factores interferenciales* que reflejan la acción conjunta de todos los elementos (compárese con el concepto de factor del sistema en § 49, punto 1).

Si el punto de observación se encuentra en el plano xOz ($\alpha = 0$), llamado plano E (a él es paralelo el vector $\vec{E}$ en el orificio), entonces $v = 0$ y el factor $\operatorname{sen} v/v$ se reduce a la unidad. Cuando $\alpha = 90°$, el punto de observación se encuentra en el plano H (yOz); *con esto*, $u = 0$ *y* $\operatorname{sen} u/u = 1$. *Designando en estos dos casos la* curva característica de emisión por $F^E(\vartheta)$ y $F^H(\vartheta)$, se tiene

$$F^{E,\,H}(\vartheta) = \frac{1 + \cos\vartheta}{2}\left|\frac{\operatorname{sen}\xi^{E,\,H}}{\xi^{E,\,H}}\right|, \qquad (53.10)$$

siendo $\xi^E = \frac{k_0 a}{2}\operatorname{sen}\vartheta$ y $\xi^H = \frac{k_0 b}{2}\operatorname{sen}\vartheta$. La función $|\operatorname{sen}\xi/\xi|$ está representada gráficamente en la fig. 53.3, *a*. Cuando $a \gg \lambda$ ($b \gg \lambda$), el factor interferencial en la (53.10) varía en dependencia de ϑ con mayor rapidez que $1 + \cos\vartheta$ y, fundamentalmente, determina el carácter de la radiación en la región de pequeños ángulos, en donde se observa el máximo principal ($\vartheta = 0$). La anchura angular del máximo principal $2\Delta\vartheta_0^{E,H}$, es decir, el ángulo entre las direcciones más próximas a él en las que no hay radiación, se determina partiendo de la condición.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{ka}{2}\operatorname{sen}\Delta\vartheta_0^E\right) = 0 \quad \text{o bien,} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{kb}{2}\operatorname{sen}\Delta\vartheta_0^H\right) = 0, \quad (53.11)$$

en donde se toma en cuenta la raiz inferior π (fig. 53.3, *a*):

$$\frac{ka}{2}\operatorname{sen}\Delta\vartheta_0^E=\pi \quad \text{y} \quad \frac{kb}{2}\operatorname{sen}\Delta\vartheta_0^H=\pi, \text{ o sea,}$$

$$\operatorname{sen}\Delta\vartheta_0^E=\frac{\lambda}{a} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\Delta\vartheta_0^H=\frac{\lambda}{b} \tag{53.12}$$

o bien, en virtud de la pequeñez de los ángulos (compárese el § 49, punto 3)

$$2\Delta\vartheta_0^E\approx 2\frac{\lambda}{a} \quad \text{y} \quad 2\Delta\vartheta_0^H\approx 2\frac{\lambda}{b}. \tag{53.12a}$$

La curva característica de emisión típica $F^{E,H}(\vartheta)$ está representada en forma de un diagrama en la fig. 53.3, *b*.

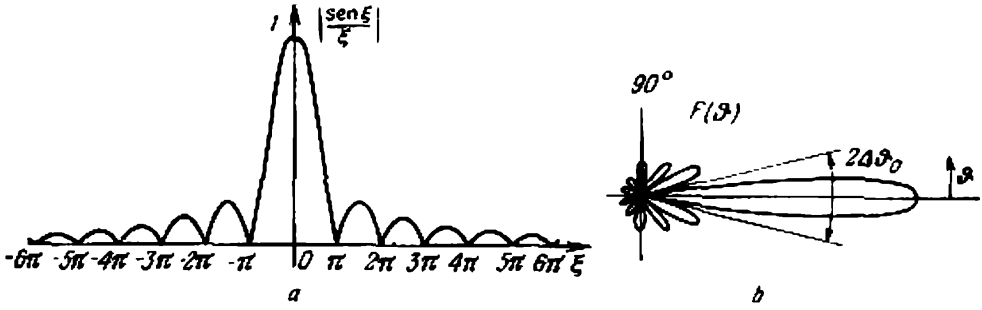


Fig. 53.3.

4. Conclusión. Hagamos ciertas observaciones. Primeramente, hay que tener en cuenta que el carácter general de los resultados obtenidos no depende de la forma del orificio. Por ejemplo, podíamos tomar un orificio circular de $2R$ de diámetro y obtener expresiones semejantes a las halladas de los vectores $\boldsymbol{E}^-$ y $\boldsymbol{H}^-$ de la onda que radia el orificio, una curva característica de emisión análoga y una expresión de la anchura del máximo principal de la radiación en la forma

$$2\Delta\vartheta_0\approx 2{,}44\frac{\lambda}{2R}. \tag{53.13}$$

Segundo, subrayemos que el empleo de la aproximación de Kirchhoff nos da una solución del problema que no podemos llamar rigurosa. Debemos esperar (y esto se confirma por las comparaciones teóricas [B.2]) que los resultados son satisfactorios para grandes orificios; entonces la zona de contorno, para la que la representación (53.1) es de antemano inaplicable, es pequeña.

Al aumentar las dimensiones relativas del orificio, la anchura de máximo principal de radiación tiende a cero, es decir, el canal espacial que a él corresponde resulta ser no extensible. El haz de rayos que pasa por el orificio debe tener tal propiedad; aquí hemos llegado al límite de la óptica geométrica.

Hay que tomar en consideración que en la zona lejana, el propio orificio S se ve bajo un ángulo infinitamente pequeño, mien-

tras que el diámetro del «rayo principal» $r \cdot 2\Delta\vartheta_0$ es mucho mayor que las dimensiones del orificio.

Y por fin, una observación sobre la interpretación del orificio como antena. En la aproximación de Kirchhoff, la potencia total de radiación del orificio es igual al flujo de energía de la onda que incide sobre él, es decir, según el (53.3), $\overline{P}_A = \overline{\Pi}^0 S = abA^2/2W_0$. Calculando la densidad del flujo de energía en la dirección de radiación máxima ($\vartheta = 0$), en virtud de las (53.7) y (53.8), se obtiene: $\overline{\Pi}_{máx}(r, \vartheta, \alpha) = \overline{\Pi}(r, 0, \alpha) = k_0^2 A^2 a^2 b^2 / 8\pi^2 r^2 W_0$. Estos datos nos permiten hacer uso de la fórmula (41.2) y calcular el coeficiente máximo de directividad de la acción del orificio que se toma como una antena en disco perfecta. Una situación sencilla, nos da

$$D_{máx}(\vartheta, \alpha) = D(0, \alpha) = \frac{4\pi S}{\lambda^2} \quad (S = ab). \tag{53.14}$$

Como vemos, con un área S fijada la magnitud $D_{máx}$ aumenta al disminuir la onda $1/\lambda^2$. Es útil comparar las igualdades (53.14) y (41.7). La deducción efectuada, confirma esto último en el sencillo ejemplo, cuando S es simplemente el área de la antena.

En general, se denominan antenas en disco aquellas, cuya acción en el régimen de emisión es cómodo representar como la radiación de manantiales distribuidos en cierta "superficie de abertura" S que, generalmente, es plana; entre ellas, podemos, por ejemplo, indicar las antenas en cono invertido y de reflector (compárese con el § 49, punto 4). Esta radiación se analiza según el método de Huygens—Kirchhoff de modo semejante a como anteriormente se investigó la difracción mediante un orificio. Como el campo en la abertura es considerable no homogéneo, en lugar de la (53.4) se toman las fórmulas confeccionadas basándose en las (47.24), en las que la orientación, amplitudes y fases de los vectores $\boldsymbol{E}^S$ y $\boldsymbol{H}^S$ dependen en general de las coordenadas.

§ 54. Difracción de Fresnel

1. Planteamiento y solución del problema. Retornemos a las condiciones a las que anteriormente, en el § 52, punto 2, hallamos la solución del problema de difracción en un orificio. Considerando el campo en la zona lejana (difracción de Fraunhofer), suponiamos con justeza que la distancia hasta el punto de observación superaba considerablemente no sólo la longitud de onda ($r \gg \lambda$), sino también las dimensiones del orificio ($r \gg a$, $r \gg b$). Al debilitarse estas desigualdades, cuando el ángulo bajo el que se observa el orificio no puede considerarse despreciablemente pequeño, los fenómenos de difracción tienen un carácter que en substancia es diferente y exigen una investigación independiente. En este caso se emplea el término de *difracción de Fresnel* que nos llega de la óptica ondulatoria.

Continuando el estudio de un orificio rectangular, escojamos cierto plano $z = \text{const}$ (fig. 54.1, *a*) en el que va a estar ubicado constantemente el punto de observación $M(r)$. Con esto,

$$|r - r'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = z + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} + \ldots$$

Vamos a suponer que aquí el término cuadrático del desarrollo es tan pequeño que al calcular la amplitud de los vectores $d\dot{E}_m^-$ y $d\dot{H}_m^-$,

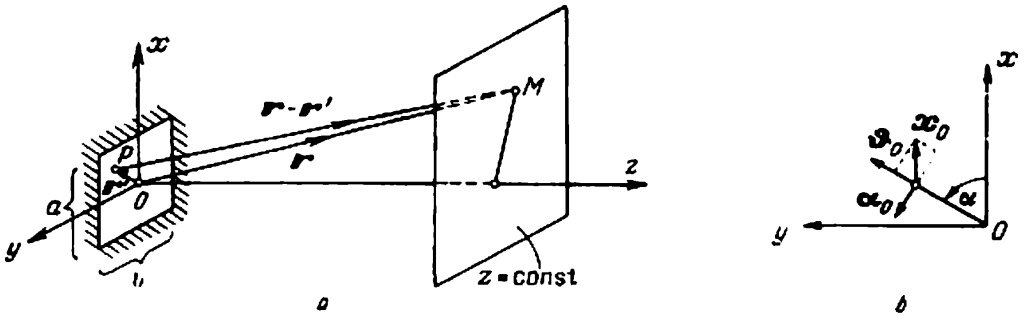


Fig. 54.1.

puede ser despreciado (véase el § 53, punto 2) y debemos tenerlo en cuenta sólo al calcular las fases. De este modo, nos limitamos con la región de pequeños ángulos ϑ, para la que $|r - r'|^{-1} \approx z^{-1}$ y $(1 + \cos\vartheta)(\vartheta_0 \cos\alpha - \alpha_0 \operatorname{sen}\alpha) \approx 2x_0$ (fig. 54.1, *b*). Por esta razon al integrar $d\dot{E}_m^-$ por el orificio rectangular, en lugar del (53.6) tendremos

$$\dot{E}_m^- = x_0 \frac{ik_0 \dot{A}}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 z}}{z} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_0 \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}} dx'\, dy'. \qquad (54.1)$$

De modo semejante a lo visto en la (53.6), la integral doble es el producto de integrales singulares semejantes. Tomando una de ellas, se obtiene

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_0 \frac{(x-x')^2}{2z}} dx' = -\sqrt{\frac{2z}{k_0}} \int_{\sqrt{\frac{k_0}{2z}}\left(x - \frac{a}{2}\right)}^{\sqrt{\frac{k_0}{2z}}\left(x + \frac{a}{2}\right)} e^{-it^2} dt,$$

donde se ha verificado el sencillo cambio de la variable. De manera análoga se transforma la integral respecto a y'. Por lo general se hace uso de la designación

$$\int_0^u e^{-it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [C(u) - iS(u)], \qquad (54.2a)$$

siendo

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u \cos t^2\, dt \quad \text{y} \quad S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u \operatorname{sen} t^2\, dt \qquad (54.2b)$$

las llamadas *integrales de Fresnel* que no se resuelven como funciones elementales. Ellas están reducidas a tablas (por ejemplo, [K.1]) y más adelante (fig. 54.2) se muestran gráficamente; es evidente que $C(-u) = -C(u)$ y $S(-u) = -S(u)$.

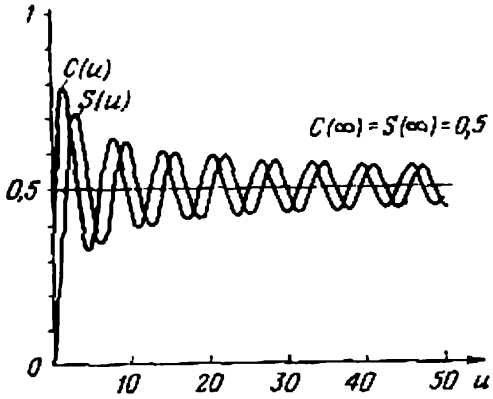


Fig. 54.2.

Así, la expresión de la amplitud compleja del vector $\boldsymbol{E}$ del campo de difracción (54.1) se reduce a la siguiente forma:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \frac{i}{2} \dot{\boldsymbol{E}}_m^0(z) [C(u) - iS(u)]\Big|_{u_1}^{u_2} [C(v) - iS(v)]\Big|_{v_1}^{v_2}, \qquad (54.3)$$

siendo

$$u_{1,2} = \sqrt{\frac{k_0}{2z}} \left(x \pm \frac{a}{2}\right)$$

y

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{k_0}{2z}} \left(y \pm \frac{b}{2}\right). \qquad (54.3a)$$

De manera absolutamente igual, integrando $d\dot{\boldsymbol{H}}_m$, podemos cerciorarnos con facilidad del cumplimiento de la igualdad

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m = \frac{i}{2} \dot{\boldsymbol{H}}_m^0(z) [C(u) - iS(u)]\Big|_{u_1}^{u_2} [C(v) - iS(v)]\Big|_{v_1}^{v_2}. \qquad (54.4)$$

Retornando al planteamiento del problema, señalemos una vez más que para la difracción de Fresnel, en diferencia de la de Fraunhofer (§ 53), no se pueden despreciar los términos cuadráticos en el desarrollo $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ al calcular la fase. Por esta causa, por ejemplo, al determinar el campo en el punto $M(0, 0, z)$ en la expresión subintegral (54.1) se tiene la fase $\Delta\varphi(x', y') = k_0 \frac{x'^2 + y'^2}{2z}$, mientras que en la (53.6), a iguales condiciones, la fase es igual a cero. Evidentemente que si la magnitud máx $\Delta\varphi(x', y')$ es despreciablemente pequeña, debemos hablar de la difracción de Fraunhofer. Tomando $x' = a$ e $y' = b$ y suponiendo que la fase es suficientemente pequeña, si es considerablemente menor que 180°, tenemos la desigualdad

$$\frac{a^2 + b^2}{\lambda z} \ll 1. \qquad (54.5)$$

Esto es la condición de la difracción de Fraunhofer.

2. Investigación del campo de difracción. En primer término es interesante la distribución de la intensidad del campo de difracción en el plano $z = \text{const}$ que consideramos. Para hallar las amplitudes $\bar{E}_m$ y $\bar{H}_m$, así como el vector medio de Poynting

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{4}\bar{\Pi}^0 \left| [C(u) - iS(u)] \right|_{u_1}^{u_2} \left| [C(v) - iS(v)] \right|_{v_1}^{v_2} \Big|^2 \qquad (54.6)$$

es preciso, como vemos en las fórmulas (54.3)—(54.6), calcular el módulo de número complejo $C(w_2) - iS(w_2) - [C(w_1) - iS(w_1)]$,

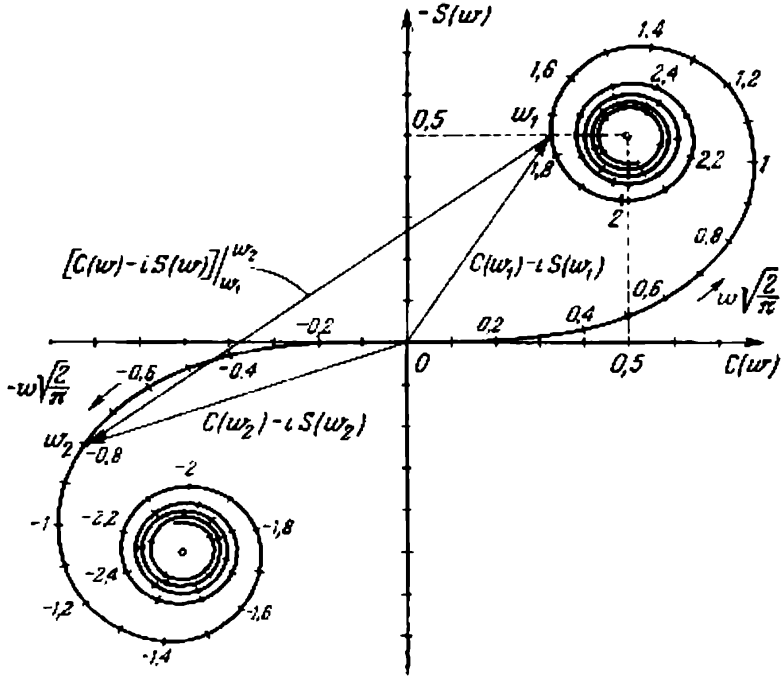


Fig. 54.3.

siendo w bien u o bien, v. En este caso, es cómodo hacer uso de un diagrama especial que permite comprender con rapidez el carácter general de las variaciones de dicha magnitud en dependencia de sus argumentos y, por consiguiente, esclarecer las leyes de la difracción.

En las coordenadas cartesianas $\xi = C(w)$ y $\eta = -S(w)$, confeccionamos una curva cada punto de la cual corresponde a los valores de las funciones $C(w)$ y $-S(w)$ para uno de los argumentos de w; dicha curva será la llamada espiral de Cornu (fig. 54.3). Como los sectores dirigidos que van desde el origen de coordenadas O hacia los puntos de la espiral de Cornu que satisfacen a los argumentos w_1 y w_2 expresan respectivamente los números complejos $C(w_2) - iS(w_2)$ y $C(w_1) - iS(w_1)$, entonces, la diferencia de dichos números complejos se representará por el sector que une los dos puntos de la espiral.

Es evidente que la dependencia de las amplitudes de los vectores del campo $\left(\text{y } \sqrt{\overline{\Pi}^{-}}\right)$ de las coordenadas x se expresa por la *función*

$$\Phi(x) = |C(u_2) - iS(u_2) - [C(u_1) - iS(u_1)]|,$$

mientras que la dependencia de y, por la función

$$\Psi(y) = |C(v_2) - iS(v_2) - [C(v_1) - iS(v_1)]|.$$

Cuando $x = 0$ e $y = 0$, los argumentos intermediarios $u_{1,2}$ e $v_{1,2}$ (54.3a), son iguales a

$$u(0)_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{a}{\sqrt{\lambda z}} \quad \text{y} \quad v(0)_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{b}{\sqrt{\lambda z}}. \tag{54.7}$$

Las magnitudes

$$\tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{\lambda z}} \text{ y } \tilde{b} = \frac{b}{\sqrt{\lambda z}} \tag{54.8}$$

son importantes parámetros del proceso de difracción que consideramos; vamos a llamarlas "dimensiones de onda" del orificio.

Dado que las dimensiones de onda son muy grandes ($\tilde{a} \gg 1$, $\tilde{b} \gg 1$); como las fórmulas (54.3), (54.5) son válidas para pequeños $\frac{a}{z}$ y $\frac{b}{z}$ ($r \approx z$), las desigualdades $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$ deben, además satisfacerse en grado mucho más considerable. Tomemos el punto medio en el plano de observación (de vigilancia) ($x = 0$, $y = 0$). En virtud de las (54.7), los argumentos de todas las integrales de Fresnel en las (54.3), (54.5) y (54.6), es decir, las funciones $C(u_{1,2})$, $S(u_{1,2})$, $C(v_{1,2})$ y $S(v_{1,2})$, *para dicho punto son muy* grandes según sus valores absolutos.

Por esta razón, podemos suponer que todas las integrales enumeradas tienen idénticos valores límites, iguales a $\pm 1/2$ (fig. 54.2 y 54.3). Como resultado, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^{-}(0, 0, z) &= \dot{\boldsymbol{E}}_m^{0}(z) = \boldsymbol{x}_0 \dot{A} e^{-ik_0 z}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^{-}(0, 0, z) &= \dot{\boldsymbol{H}}_m^{0}(z) = \boldsymbol{y}_0 \frac{\dot{A}}{W_0} e^{-ik_0 z}, \\ \overline{\boldsymbol{\Pi}}^{-}(0, 0, z) &= \overline{\boldsymbol{\Pi}}^{0}(z) = \boldsymbol{z}_0 \frac{A^2}{2W_0}, \end{aligned} \tag{54.9}$$

es decir, en el punto $M(0, 0, z)$ a considerar el campo de difracción se entiende como una onda incidente no deformada por el orificio.

Luego, vamos a examinar la distribución del campo de difracción en el plano E, para lo cual haremos uso del diagrama en la fig. 54.3; para mayor evidencia unas posiciones por separado se muestran, además, en la fig. 54.4. En dicho diagrama al punto $M(0, 0, z)$ corresponde el segmento que une los puntos límites de la espiral de Cornu (fig 54.4, *a*); su longitud puede ser tomada como la

magnitud $\sqrt{\overline{\Pi}^-(0, 0, z)}$ (54.9) escogiendo, para esto, una escala convencional y comenzar la construcción de la gráfica de la función $\sqrt{\overline{\Pi}^-(x, 0, z)}$ (fig. 54.5, punto *a*). Por el plano $z = \text{const}$, nos desplazaremos desde el punto medio al borde del orificio en

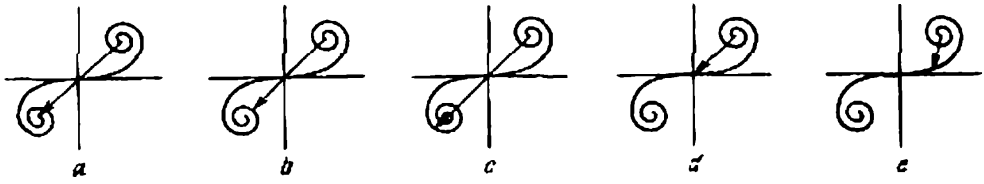


Fig. 54.4.

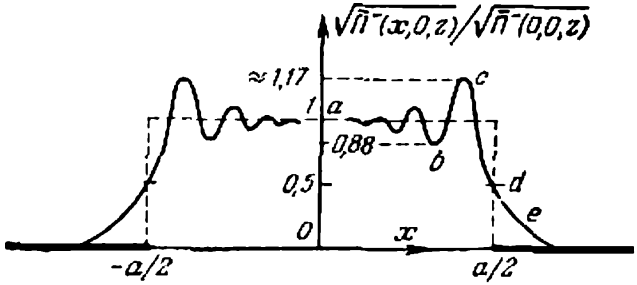


Fig. 54.5.

la dirección de crecimiento de x. Al mismo tiempo, $u_1 = \sqrt{\frac{k_0}{2z}}\left(x + \frac{a}{2}\right)$ aumenta de tal modo que adquirimos más seguridad para considerar límite el correspondiente punto de la espiral de Cornu. El valor absoluto de otro límite $u_2 = \sqrt{\frac{k_0}{2z}}\left(x - \frac{a}{2}\right)$, disminuye y, por consiguiente, el extremo que a él corresponde del segmento dirigido deslizará por la espiral de Cornu, alejándose de su punto límite (fig. 54.4, *b*, *c*, *d*, *e*). La longitud de este segmento que expresa $\sqrt{\overline{\Pi}^-(x, 0, z)}$, oscila y su mayor valor $\sqrt{\overline{\Pi}^-(x, 0, z)}\big|_{\max} \approx 1{,}17\sqrt{\overline{\Pi}^-(0, 0, z)}$ se observa cerca del borde (fig. 54.4, *c*). A continuación el campo decrece. Precisamente frente al borde $\left(\sqrt{\overline{\Pi}^-(x, 0, z)} = \sqrt{\overline{\Pi}^-(a/2, 0, z)}\right.$, (fig. 54.4, *d*)$\left.\right)$, es dos veces menor que en el punto medio: el extremo del segmento dirigido *en movimiento se desplaza por la espiral de Cornu al origen* de coordenadas (fig. 54.4, *d*). Desde el punto de vista de la óptica geométrica, por aquí pasa la frontera de la sombra (la línea vertical de trazos en la fig. 54.5). Vemos que $\sqrt{\overline{\Pi}^-(z, 0, z)}$ no se reduce a cero inmediatamente después de dicha frontera, sino que *disminuye gradualmente (fig. 54.4, e). En general, la intensidad*

oscila alrededor de un valor constante que fue previsto en la óptica geométrica (línea de trazos en la fig. 54.5). Durante el movimiento desde el punto medio hacia el borde opuesto del orificio, el cuadro se repite.

Mientras mayor es la dimensión de onda del orificio, menor región de la zona iluminada abarcan fuertes oscilaciones (fig. 54.6, *a*)

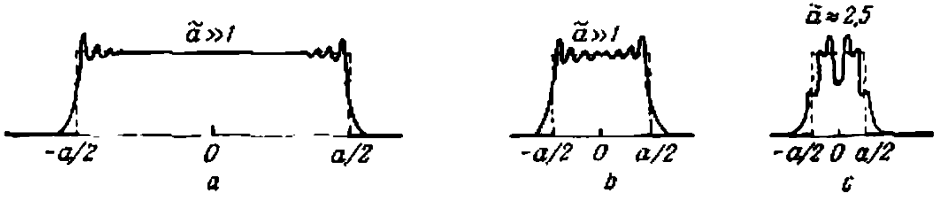


Fig. 54.6.

y más nos acercamos a la realidad de aproximación de óptica geométrica. Al disminuir mucho la dimensión de la onda se "consume" la parte interior del diagrama (fig. 54.6, *b*). Cuando las dimensiones de onda son cercanas a la unidad es incluso posible una brusca caída de la intensidad en el punto medio de observación (fig. 54.6, *c*). Para pequeñas dimensiones de onda, en virtud de la (54.5), se observa la difracción de Fraunhofer.

3. Interpretación más sencilla de la difracción de Fresnel. Más arriba se mostró, como las construcciones verificadas sobre la base de la espiral de Cornu (figs. 54.3 y 54.4) nos permiten esclarecer el carácter general de la difracción de Fresnel mediante un orificio. No es difícil formar una sencilla idea sobre el origen de la propia espiral de Cornu.

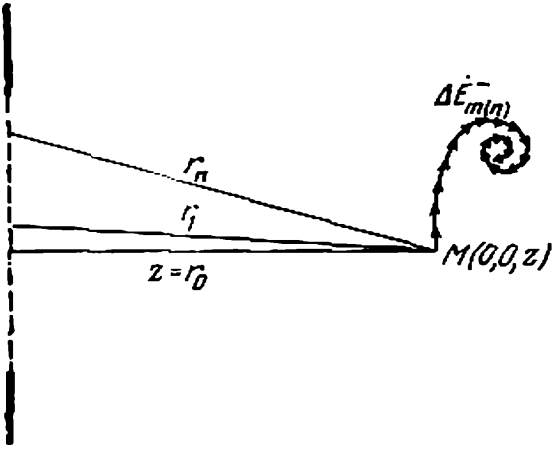


Fig. 54.7.

Mentalmente, dividimos el orificio que consideramos en elementos infinitamente pequeños (que sean obligatoriamente pequeños respecto a la longitud de onda) (fig. 54.7). Aproximadamente, el orificio tendrá el aspecto de un sistema discreto de tales radiadores elementales. Si, por ejemplo, prestamos atención al campo difractado en el punto $M(0, 0, z)$, debemos sumar una serie de números complejos $\Delta\dot{E}_{m\,(i)}$ que expresan los valores absolutos de los vectores $\Delta\dot{\vec{E}}_{m\,(i)}$ y que son las amplitudes complejas de los campos de radiadores independientes en este punto (los vectores $\Delta\dot{\vec{E}}_{m\,(i)}$ son

prácticamente paralelos). Podemos decir que los módulos de los números $\Delta\dot{E}_{m\,\omega}$ son iguales; por el contrario, sus fases son diferentes y mientras más alejados de la parte media del orificio están los elementos, ellas varían con mayor rapidez, ya que en este caso aumentan rápidamente los correspondientes recorridos r_i hasta M. Empleando al sumar los numeros $\Delta\dot{E}_{m\,\omega}$ el "diagrama vectorial"

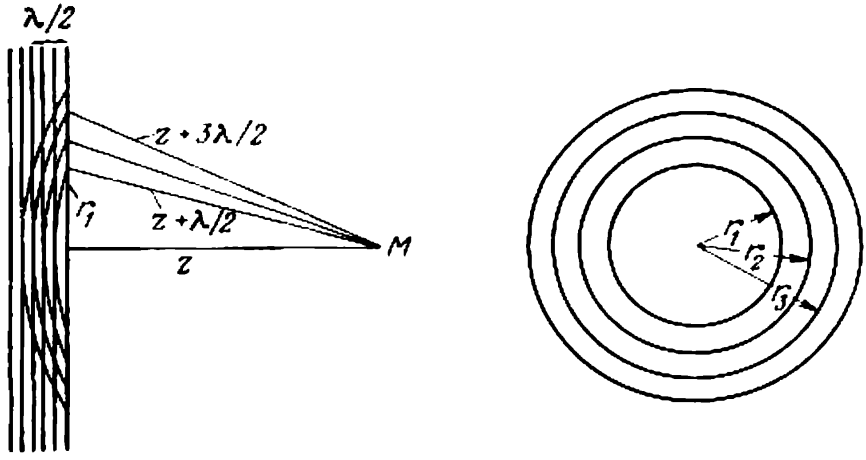


Fig. 54.8.

(compárese con el § 49, puntos 2,3), debemos trazar los segmentos que reflejan $\Delta\dot{E}_{m\,\omega}$ en el orden de su crecimiento (describiendo los desfasajes en aumento). Aquí vemos que el diagrama empieza a parecerse a la espiral de Cornu. Y efectivamente, dicho diagrama se convertirá en la espiral de Cornu para el límite, cuando los elementos se disminuyen infinitamente, o sea, al representar el orificio como un sistema continuo de radiadores como fue, en realidad, realizado en el punto 1.

Otro momento útil, es la construccion de las llamadas *zonas de Fresnel*. Destaquemos en el plano del orificio una región con la propiedad de que las distancias desde sus puntos al punto de observación $M(0, 0, z)$ no divergen en más de una semionda; esta región será un círculo de radio (fig. 54.8)

$$r_1 = \sqrt{(z + \lambda/2)^2 - z^2} \approx \sqrt{\lambda z}, \qquad (54.10)$$

denominada primera zona de Fresnel. La segunda y siguiente zonas de Fresnel, son regiones anulares que también poseen semejantes propiedades. La segunda zona se encuentra entre la frontera de la primera zona y una circunferencia de radio igual a

$$r_2 = \sqrt{(z + \lambda)^2 - z^2} \approx \sqrt{2\lambda z},$$

es decir, para ella

$$\sqrt{2\lambda z} > r > \sqrt{\lambda z}. \qquad (54.11)$$

En general, para la n-ésima zona de Fresnel

$$\sqrt{n\lambda z} > r > \sqrt{(n-1)\lambda z}. \tag{54.12}$$

Las zonas lejanas de Fresnel tienen (al ser adyacentes) casi iguales áreas y crean en el punto M señales antifase que, podemos decir, son iguales respecto a la amplitud y, por esta razón, se compensan. Por esto, en el interior de un orificio (de cualquier forma) caben múltiples zonas de Fresnel, entonces, la parte apantallada del frente de onda ya es insubsistente: el campo en el punto M será como si no hubiera pantalla. Pero "muchas zonas de Fresnel" significa, en otras palabras, el cumplimiento de la desigualdad

$$d \gg \sqrt{\lambda z}, \tag{54.13}$$

siendo d cualquiera de las dimensiones transversales del orificio. Al tratar un orificio rectangular llegamos de nuevo a la condición

$$\tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{\lambda z}} \gg 1, \quad \tilde{b} = \frac{b}{\sqrt{\lambda z}} \gg 1 \tag{54.13a}$$

que fue empleada al deducir la expresión (54.9).

§ 55. Pantallas y el principio de dualidad; rendijas estrechas

1. Principio de dualidad y difracción en objetos planos. Como sabemos (§ 46, punto 3), a consecuencia de la «dualidad de permutación» de las ecuaciones de Maxwell de la solución de cierto problema sobre la radiación de manantiales de tipo eléctrico en un medio infinito, la transformación (46.9, a), (46.9, b) permite hallar inmediatamente la solución del problema para una distribución semejante de manantiales magnéticos; y viceversa: la solución del segundo problema por medio de las figs. (46.9, a), (46.9, b) se transforma en la solución del primero.

Ahora, consideremos el principio de dualidad en una forma tal que nos permita aplicarlo fácilmente a ciertos problemas de difracción. Los problemas a comparar, se diferenciarán por el carácter de las condiciones límites.

Tomemos dos problemas electrodinámicos en uno de los cuales figura una pantalla infinita de conducción ideal Q con un orificio S (fig. 55.1, a), mientras que en el segundo, un elemento plano de conducción ideal T que es geométricamente idéntico al orificio del primer problema (fig. 55.1, b). Formulemos estos dos problemas.

Problema 1.

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{E}}_{m1} = -i\omega\mu\dot{\boldsymbol{H}}_{m1}, \quad \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_{m1} = i\omega\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}_{m1}, \\ &\dot{\boldsymbol{E}}_{m1} = \dot{\boldsymbol{E}}^{S}_{m} \text{ en } S, \quad \dot{\boldsymbol{E}}_{m1} = 0 \text{ en } Q. \end{aligned}\right\} \tag{55.1}$$

En el § 31, punto 2 determinamos que la solución de tal problema (con ciertas restricciones) es única. Si en tal forma está planteado el problema sobre la difracción en un orificio en la pantalla de la onda que incide del semiespacio A, en el semiespacio B, el campo $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$ es el campo de dispersión $\boldsymbol{E}_1^-$, $\boldsymbol{H}_1^-$.

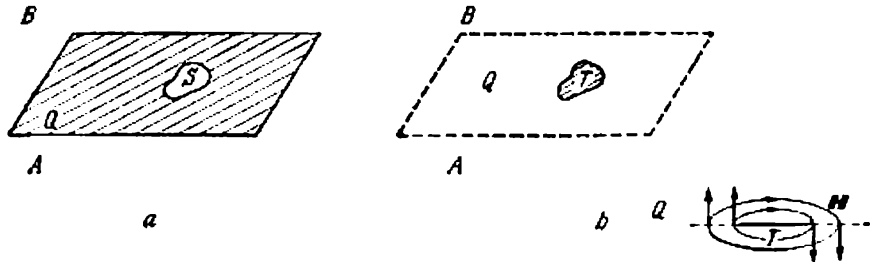


Fig 55.1.

Problema 2

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_{m2} = i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_{m2},\ \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{E}}_{m2} = -i\omega\dot{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_{m2}, \\ \dot{H}_{m\tau} = \dot{H}_m^S \text{ en } T,\ \dot{H}_{m\tau} = 0 \text{ en } Q. \end{array}\right| \qquad (55.2)$$

En el sentido del cumplimiento de las condiciones de unicidad, la solución del problema 2 no se diferencia del problema 1 (§ 31, punto 2). Sin embargo, conviene tener en cuenta que el campo $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ no puede ser el campo total del problema de difracción mediante el elemento de conducción ideal T: es evidente que el campo total no satisface la condición $\dot{H}_{m\tau} = 0$ en Q (Q es el plano donde está ubicado T, restando de él T). Pero $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ puede ser un campo de difracción. Efectivamente, este último está relacionado con las corrientes conductivas en T y tales corrientes se crean por campos magnéticos sin componente tangencial en Q (fig. 55.1, *b*).

La manifestación del principio de dualidad, consiste en que la enunciación (55.2) del problema 2 se convierte en la enunciación (55.1) del problema 1 (al mismo tiempo, $\dot{\boldsymbol{E}}_{m2} \to \dot{\boldsymbol{H}}_{m2}$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_{m2} \to \dot{\boldsymbol{E}}_{m2}$) al sustituir $\dot{\varepsilon} \to -\dot{\mu}$ y $\dot{\mu} \to -\dot{\varepsilon}$ (y viceversa: (52.1) al efectuar una sustitución análoga se transforma en la (52.2)). Si, además,

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m^S = \dot{\boldsymbol{H}}_m^S, \qquad (55.3)$$

la solución de los dos problemas es idéntica.

En el sentido que hemos indicado, los problemas 1 y 2 *se complementan* respectivamente. Esto fue señalado por Pistolkors A.A. y empleado por él para la confección de la teoría de radiadores de rendija (véase más adelante el punto 2). En la óptica ondulatoria, una propiedad análoga de complementarse se conoce como el llamado «principio de Babinet».

Además, la enunciación habitual del principio de Babinet está estrechamente relacionada con el principio de Huygens en la apro-

ximación de Kirchhoff. Dada una misma onda E^0, H^0 que en un caso incide sobre una pantalla en la que hay un orificio (fig. 55.2, *a*), excitando en el semiespacio *B* el campo de difracción E_1^-, H_1^- y en el segundo caso, sobre una pantalla complementaria (de la forma del orificio) (fig. 55.2, *b*); entonces, en el semiespacio *B* el campo

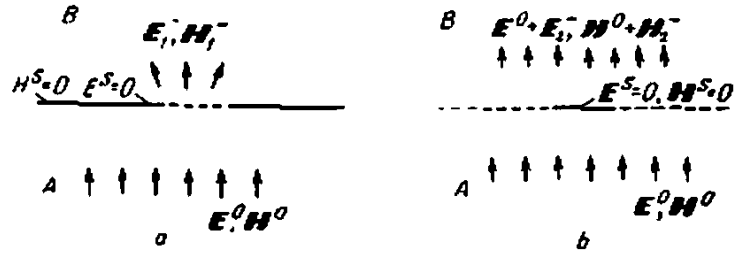


Fig. 55.2.

total es la superposición de la onda E^0, H^0 y el campo de difracción E_2^-, H_2^-. En virtud de la aproximación de Kirchhoff, el campo E^S, H^S no se diferencia de la onda incidente E^0, H^0 en la superficie de separación de los semiespacios *A* y *B* allí donde no hay pantalla; en la parte ensombrecida de la pantalla (¡en los dos casos!) dicho campo no existe: $E^S = 0$, $H^S = 0$. Sumando los campos totales en el semiespacio B, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} E_1^- + (E_0 + E_2^-) &= E, \\ H_1^- + (H_0 + H_2^-) &= H. \end{aligned}\right|$$

Pero en virtud del principio de superposición, E, H es el campo excitado con la condición de que *en toda* la superficie de separación $E^S = E^0$ y $H^S = H^0$ y, por lo tanto

$$E = E^0, \quad H = H^0.$$

De este modo

$$E_2^- = -E_1^-, \quad H_2^- = -H_1^- \tag{55.4}$$

y, por consiguiente,

$$\overline{\Pi}_2^- = \overline{\Pi}_1^-. \tag{55.4a}$$

Esta es la enunciación del principio de Babinet de acuerdo con el cual, objetos mutuamente complementarios (fig. 55.2,*a*, *b*) excitan en el semiespacio delantero campos de difracción de igual intensidad.

Los resultados, de las soluciones de los problemas de difracción en orificios (§§ 53, 54) se aplican inmediatamente a los casos de las pantallas complementarias a ellos.

2. Rendijas estrechas. La difracción mediante rendijas estrechas ya no puede ser investigada en la aproximación de Huygens (§ 53, punto 4); consideremos la acción de un radiador de rendija como lo hizo Pistolkors A. A.

Desde el punto de vista del principio de dualidad, una rendija estrecha (fig. 55.3, *a*) es análoga a una banda complementaria a una pantalla (fig. 55.3, *b*) y esta última puede radiar de forma semejante a la corriente rectilínea (§ 44); un elemento de banda, pequeño en comparación con la longitud de onda, es en substancia un radiador eléctrico elemental.

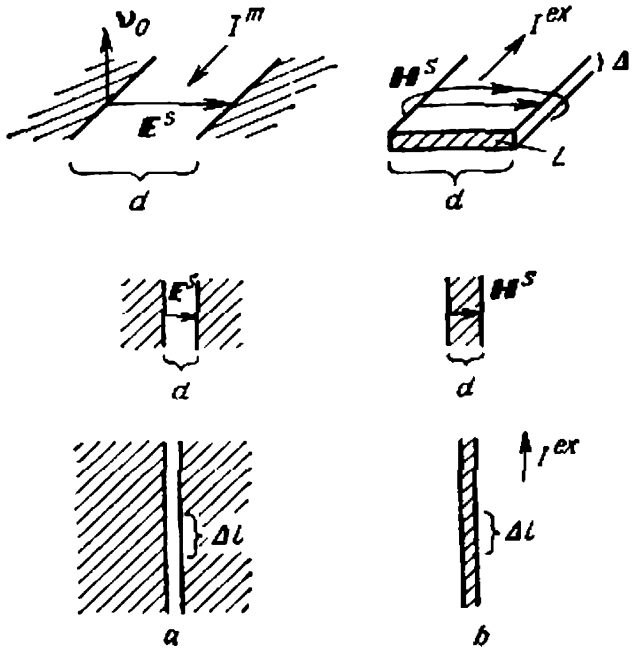


Fig. 55.3.

Si nos interesa el campo en zona lejana a base de la (44.13) escribamos para el elemento de banda Δl las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_{m2} &= \alpha_0 \frac{ik\dot{I}_m^{ex}\,\Delta l}{4\pi}\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r}e^{-ikr}, \\ \dot{E}_{m2} &= \vartheta_0 \frac{i\omega\mu\,\dot{I}_m^{ex}\,\Delta l}{4\pi}\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r}e^{-ikr} \end{aligned}\right\} \qquad (55.5)$$

(aquí se ha empleado la correlación (44.4) e introducido los índices inferiores que indican que se considera el problema 2 (55.2)).

Hay que tener en cuenta que la corriente de la banda está relacionada con el campo magnético en su superficie por medio de la correlación

$$\dot{I}_m^{ex} = 2d\dot{H}_m^s \qquad (55.6)$$

que se desprende directamente de (2.8), ya que (fig. 55.3, *b*)

$$\lim_{\Delta \to 0} \oint_{\gamma} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = 2dH$$

(véase también el § 7, punto 4).

En virtud del principio de dualidad obtenemos seguidamente de la (55.5) la solución del problema complementario 1 (55.1) para un campo eléctrico tangencial $\dot{E}^S$ de la misma clase que tenía el campo $\dot{H}^S$ en el problema 2. Esto nos permite hallar el campo *de radiación del elemento Δl de rendija: en la rendija el vector* $\dot{E}^S$ (fig. 55.3, *a*), como vemos, está dirigido transversalmente.

Verificando en la (55.5) la sustitución $\varepsilon \rightleftarrows -\mu$, $\dot{E}_m \rightleftarrows \dot{H}_m$ tomemos, en particular, $\dot{E}_m^S$ en lugar de $\dot{H}_m^S$ y consideremos que la magnitud

$$U = d\dot{E}^S \tag{55.7}$$

es la tensión entre los bordes de la rendija. Como resultado se halla

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{m1} &= \alpha_0 \frac{ik\dot{U}_m \Delta l}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r} e^{-ikr} \\ \dot{H}_{m1} &= -\vartheta_0 \frac{i\omega\varepsilon\dot{U}_m \Delta l}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r} e^{-ikr} \end{aligned}\right\} \tag{55.8}$$

Como nos muestra la comparación directa de las fórmulas (55.8) y (45.10), el elemento de rendija que genera tal campo en zona lejana, es semejante a un radiador magnético elemental. Bien es verdad, que podíamos haber llegado a esta conclusión con anterioridad, ya que el campo transversal $\dot{E}^S$ es, de acuerdo con la (47.3), equivalente a la corriente magnética longitudinal. De la comparación de las (55.8) y (45.10) se desprende que el elemento de rendija tiene un momento magnético con amplitud compleja

$$\dot{m}_m = \frac{i2\dot{U}_m \Delta l}{\omega}, \tag{55.9}$$

es decir, radia al semiespacio B de forma análoga a un elemento de corriente magnética dispuesto en el espacio libre

$$\dot{I}^M = -2d\dot{E}^S = -2\dot{U}. \tag{55.10}$$

Es natural que esta correlación podía haber sido directamente obtenida de la forma integral de la segunda ecuación de Maxwell (46.2), o sea, del mismo modo que la (55.6)

Señalemos que a lo largo de una rendija de la longitud de semionda se establece una distribución casi senoidal de la tensión. Tal radiador de rendija es, desde el punto de vista del principio de dualidad, análogo a un dipolo de media onda (§ 44, punto 5). Tomando en la (44.25) $l = \lambda/2$, se tiene

$$\dot{H}_{m2} = \alpha_0 \frac{i\dot{I}_m}{2\pi r} e^{-ikr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\operatorname{sen}\vartheta} \tag{55.11}$$

y según el principio de dualidad, obtenemos para un radiador de rendija

$$\dot{E}_{m1} = \alpha_0 \frac{i\dot{U}_m}{\pi r} e^{-ikr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\operatorname{sen}\vartheta}. \qquad (55.12)$$

Nos queda esclarecer en qué circunstancias se excita el radiador de rendija. Sea que en una lámina conductora ideal, el campo magnético y la corriente conductiva están distribuidos como se muestra en la fig. 55.4, *a*; esto sucederá, por ejemplo, al incidir por la normal una onda plana homogénea. Si en la lámina se han cortado dos rendijas estrechas, una paralela y la segunda

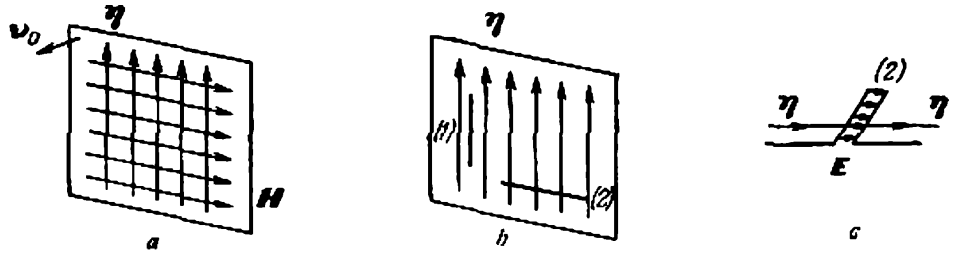


Fig. 55.4.

perpendicular al vector $\boldsymbol{H}$ (fig. 55,4, *b*), la primera radiará, mientras que la segunda, prácticamente, no. El hecho es que la primera rendija interrumpirá la corriente conductiva, debido a lo cual en ella aparece una corriente de desplazamiento, es decir, el campo eléctrico transversal, cuya estructura se muestra en la fig. 55.4, *b*. Por el contrario, la segunda rendija casi no afecta la corriente y el campo que a principio no radiaba, podemos decir que queda no excitado.

III. Refracción

Por refracción entendemos los fenómenos que se producen durante la propagación de ondas en medios no homogéneos y que pueden ser interpretados como la desviación de rayos. Esto quiere decir que por su propia definición, el concepto de refracción se refiere al dominio de la óptica geométrica. Su tipo más sencillo es la refracción de los rayos en la superficie plana de separación de medios que fue examinada en los §§ 37--39; en el punto 2 del § 50 se habló de las condiciones de aplicación del concepto de refracción al estudiar cuerpos reales. Exige particular atención la desviación uniforme de rayos que transcurre en medios, cuyas permeabilidades son funciones continuas de las coordenadas; hay que remarcar que la propia noción de rayos es, de tal modo, válida sólo en aquellos casos cuando la variación de las propiedades del medio es suficientemente lenta.

Los fenómenos de refracción son sencillos, en comparación con los que hemos considerado anteriormente en el presente capítulo. Sin embargo, desde el punto de vista de la asignatura que estudiamos, dichos fenómenos representan doble interés. En primer lugar, al estudiar la refracción se presenta la posibilidad de pasar de las ecuaciones de Maxwell a las ecuaciones suficientemente generales de la óptica geométrica que nos llevan a una serie de corolarios que contienen leyes particulares ya conocidas de la óptica geométrica. En segundo lugar, el estudio de la refracción es necesario para comprender una serie de singularidades de la propagación de ondas de radiocomunicación en condiciones naturales.

§ 56. Ondas localmente planas en medios no homogéneos

1. Eiconal. Para todo campo electromagnético podemos de modo formal escribir la expresión

$$\dot{E}_m = \mathcal{E} e^{-i\varphi}, \quad \dot{H}_m = \mathcal{H} e^{-i\varphi}, \tag{56.1}$$

siendo $\mathcal{E} = \mathcal{E}(r)$, y $\mathcal{H} = \mathcal{H}(r)$ y $\varphi = \varphi(r)$ ciertas funciones complejas de coordenadas. Efectivamente, es sólo suficiente tomar cualquier función φ y suponer que $\mathcal{E} = \dot{E}_m e^{i\varphi}$, $\mathcal{H} = \dot{H}_m e^{i\varphi}$. Pero hay casos particulares cuando tal expresión es natural y útil.

Sean, por ejemplo, $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ y φ reales. En tal caso, las fórmulas (56.1) definen una onda, cuyo frente se caracteriza por la ecuación

$$\varphi(r) = \text{const}. \tag{56.2}$$

(compárese con la pág. 183). Dicha onda será homogénea si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ son constantes en la superficie del frente. Aquí, la función φ se denomina *eiconal*. En particular, para una onda plana el eiconal es una función lineal de las coordenadas: $\varphi(r) = Ax + By + Cz$ o bien (§ 34, punto 1): $\varphi(r) = k(x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3)$, mientras que para una onda esférica $\varphi(r) = Cr = kr$.

Ahora vemos que si en las amplitudes complejas del campo $\dot{E}_m$ y $\dot{H}_m$ puede destacarse el factor $e^{-i\varphi}$ (suponiendo que la función φ es real) así que los coeficientes $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ resultan depender débilmente de las coordenadas, el campo será próximo a una onda electromagnética homogénea con frente $\varphi(r) = \text{const}$. En este caso, en el entorno de cualquier punto puede ser indicada una región suficientemente pequeña, en la que los vectores $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ son prácticamente constantes, mientras que el sector del frente, casi plano. Por tal causa, podemos considerar el campo electromagnético dado localmente como una onda plana; en casos semejantes, emplearemos la expresión de *ondas localmente planas*.

2. Ecuaciones principales de las ondas localmente planas. Planteémonos el objetivo de obtener ecuaciones que definan las ondas localmente planas. En virtud del (S1.35), para la (56.1)

rot $\dot{E}_m = e^{-i\varphi}$ rot $\mathcal{E} + [\nabla e^{-i\varphi}, \mathcal{E}]$, siendo $\nabla e^{-i\varphi} = -ie^{-i\varphi}\nabla\varphi$; de modo semejante, se expresa rot $\dot{H}_m$. Por esta razón, introduciendo las expresiones (56.1) en las ecuaciones homogéneas de Maxwell para las amplitudas complejas (o sea, en las (29.11) si $J_m^e = 0$), se tiene

$$\text{rot}\,\mathcal{H} + i[\mathcal{H}, \nabla\varphi] = i\omega\varepsilon\mathcal{E},$$
$$\text{rot}\,\mathcal{E} - i[\nabla\varphi, \mathcal{E}] = -i\omega\mu\mathcal{H}. \tag{56.3}$$

En general, al estudiar medios no homogéneos vamos a considerar las permitividades como funciones de coordenadas: $\varepsilon = \varepsilon(r)$ y $\mu = \mu(r)$.

La propiedad determinante de una onda localmente plana es la débil dependencia entre las coordenadas y las funciones $\mathcal{E}(r)$ y $\mathcal{H}(r)$ en comparación con $\varphi(r)$. Por esta causa, limitaremos la clase de procesos a considerar, exigiendo que se satisfagan las siguientes desigualdades:

$$\frac{|\text{rot}\,\mathcal{E}|}{|[\nabla\varphi, \mathcal{E}]|} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{|\text{rot}\,\mathcal{H}|}{|[\mathcal{H}, \nabla\varphi]|} \ll 1 \tag{56.4a}$$

o bien las desigualdades equivalentes:

$$\frac{|\text{rot}\,\mathcal{E}|}{\omega|\mu\mathcal{H}|} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{|\text{rot}\,\mathcal{H}|}{\omega|\varepsilon\mathcal{E}|} \ll 1 \tag{56.4b}$$

(mas adelante, en el punto 5, examinaremos estas limitaciones). Mientras más considerable es la variación de las desigualdades (56.4a) ó (56.4b), mayor será la razón para poder sustituir las ecuaciones de Maxwell (56.3) por las siguientes:

$$[\mathcal{H}, \nabla\varphi] = \omega\varepsilon\mathcal{E}, \quad [\nabla\varphi, \mathcal{E}] = \omega\mu\mathcal{H}. \tag{56.5}$$

De estas ecuaciones se desprende que los vectores $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ y $\nabla\varphi$ son perpendiculares entre sí.

Sean ε y μ reales ($\varepsilon = \varepsilon$, $\mu = \mu$). Eliminando de las (56.5) $\mathcal{H}$ o bien $\mathcal{E}$ respectivamente, se obtienen las ecuaciones

$$[[\nabla\varphi, \mathcal{E}], \nabla\varphi] = \omega^2\varepsilon\mu\mathcal{E} \tag{56.6}$$

y

$$[\nabla\varphi, [\mathcal{H}, \nabla\varphi]] = \omega^2\varepsilon\mu\mathcal{H}. \tag{56.7}$$

Partiendo de la (56.6) o bien de la (56.7), por medio de la fórmula (S1.5), se halla

$$(\nabla\varphi)^2 = k^2, \tag{56.8}$$

siendo $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$. Esta es la llamada *ecuación del eiconal*. En particular, en coordenadas cartesianas dicha ecuación tiene la forma

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = k^2. \tag{56.8a}$$

Como es necesario, el eiconal φ es una función real.

¿Qué significan los resultados obtenidos? Los vectores perpendiculares entre sí $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ y $\nabla\varphi$ forman, como puede deducirse de las (56.5), una terna derecha de modo que el gradiente del eiconal $\nabla\varphi$ es paralelo al vector de Poynting $[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}]$.

En este caso, el vector $\nabla\varphi$ está dirigido por la normal a la superficie $\varphi = \text{const}$ que es el frente de onda (fig. 56.1). La razón $\nabla\varphi / |\nabla\varphi|$ es, por consiguiente, el vector unitario de la normal de onda

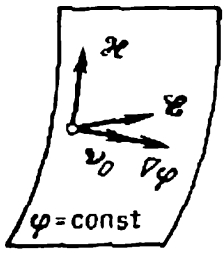


Fig. 56.1.

$$\nu_0 = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}. \tag{56.9}$$

Por lo tanto, introduciendo el vector de onda $\boldsymbol{k}$ (§ 34, punto 1) y teniendo en cuenta (56.8), tenemos

$$\boldsymbol{k} = \nu_0 k = \nabla\varphi. \tag{56.10}$$

Y por fin, introduzcamos esta última expresión en las (56.5) y obtendremos

$$[\mathcal{H}, \nu_0] = \frac{1}{W}\mathcal{E}, [\nu_0, \mathcal{E}] = W\mathcal{H}, \tag{56.11}$$

siendo $W = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ y

$$\frac{E_m}{H_m} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}} = W. \tag{56.12}$$

De manera que efectivamente tenemos un campo que localmente no se diferencia de una onda homogénea habitual (§ 32).

3. ***Optica geométrica de un medio no homogéneo.*** Retornemos al hecho de que el vector $\nabla\varphi$, como gradiente de la magnitud escalar φ, siempre está dirigido por la normal a la superficie equifásica

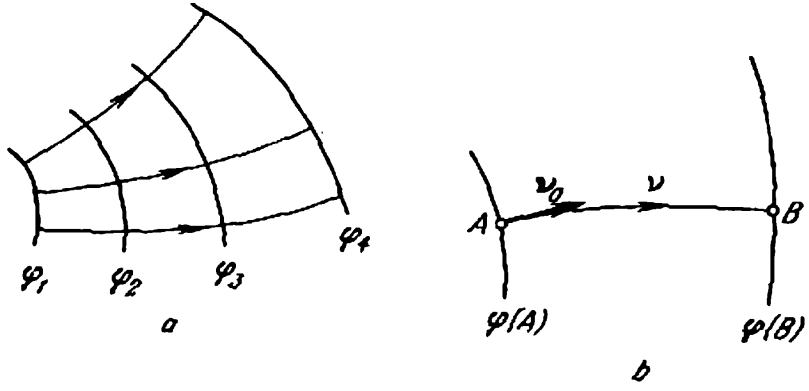


Fig. 56.2.

$\varphi = \text{const}$, es decir, al frente de onda y que expresa la mayor velocidad de crecimiento de la fase φ (en comparación con otras direcciones). Las líneas del vector $\nabla\varphi$, son precisamente los *rayos* que se consideran en la óptica geométrica. Respecto a cierta familia

de superficies $\varphi = \text{const}$, los rayos pueden hallarse como líneas ortogonales a ellas (fig. 56.2, *a*). Al mismo tiempo puesto que el vector de Poynting está en todo lugar dirigido de modo paralelo a $\nabla\varphi$, los rayos pueden definirse como líneas a lo largo de las que *transcurre el movimiento de energía*.

Fijemos nuestra atención en dos superficies equifásicas y en un rayo que une los puntos A y B ubicados en ellas (fig. 56.2*a*); es evidente que cada una de tales superficies determina la posición instantánea del frente de la onda que se propaga. Designemos la línea del rayo por ν y, en virtud de la definición del gradiente, escribamos

$$\nabla\varphi = \nu_0 \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}. \qquad (56.13)$$

Haciendo también uso de la fórmula (56.10), de aquí obtenemos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = k = k_0 n, \qquad (56.14)$$

siendo $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ y $n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ índice de refracción del medio (§ 37, punto 2). Integrando la (56.14) respecto a ν, desde A hasta B, se tiene

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \int_A^B k\,d\nu = k_0 \int_A^B n\,d\nu. \qquad (56.15)$$

Esta es la expresión de la diferencia de fase en el recorrido del rayo que consideramos o bien, como suele decirse, de su *longitud óptica* mediante el coeficiente de refracción del medio.

Hagamos ciertas deducciones de las correlaciones (56.13)—(56.15). Tomando el caso, cuando el medio es homogéneo ($n = \text{const}$), obtenemos

$$\varphi(B) - \varphi(A) = kd = k_0 nd, \qquad (56.16)$$

siendo d la longitud del recorrido a lo largo del rayo. Dado que en un medio homogéneo está fijado un frente de onda plano

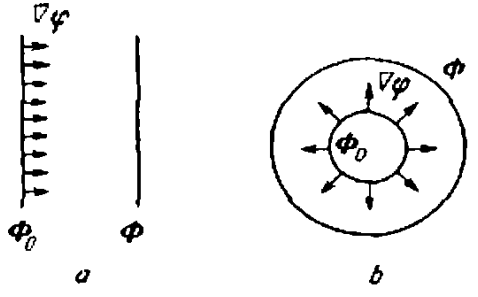


Fig. 56.3.

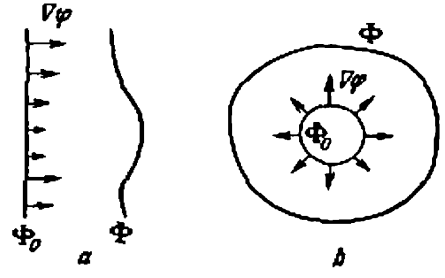


Fig. 56.4.

(fig. 56.3,*a*) o esférico (fig. 56.3, *b*) $\varphi = \Phi_0$. Ya que en todos los puntos el valor de $\partial\varphi/\partial\nu$ es igual, la construcción $\nabla\varphi$ (que simbólicamente se representa con flechas) nos muestra que la siguiente

posición del frente $\varphi = \Phi$, también será un plano (*a*) o, respectivamente, una esfera (*b*). Con eso, los rayos son líneas rectas.

A continuación, supongamos que el medio no es homogéneo; considerando los mismos frentes (fig. 56.4, *a*, b), llegamos a la conclusión de que éstos, hablando en general, se deforman y que los rayos son curvilíneos. Efectivamente, esto se desprende directamente de la construcción de $\nabla\varphi$ en las superficies $\varphi = \Phi_0$; en virtud de (56.14), la magnitud $\partial\varphi/\partial\nu$ tendrá diferentes valores en diversos puntos del frente, cuando n no es constante. Resulta ser una exclusión cuando un medio no es homogéneo para el que n varía sólo a lo largo de ν.

4. Principio de Fermat. Existe otra importante regla general que permite hallar las líneas de rayos en un medio no homogéneo, conocida por el *principio de Fermat*. De acuerdo con él, el rayo es precisamente aquella línea a lo largo de la cual la longitud óptica es la mínima, o sea, que

$$\int_A^B n\,d\nu = \min \int_A^B n\,dl; \tag{56.17}$$

en el primer miembro, el camino de integración coincide con la línea del rayo, y en el segundo se sobreentiende el examen de todos los posibles recorridos desde A hasta B.

Para demostrar el principio de Fermat, primeramente señalemos que, a causa del potencial del campo de los rayos para cualquier recorrido

$$\int_A^B \nabla\varphi\,dl = \varphi(B) - \varphi(A), \tag{56.18}$$

es decir, la integral escrita no depende de la línea de integración y sólo se determina por los valores del eiconal (fase) en los puntos inicial y final del recorrido (compárese con las propiedades del potencial electrostático, § 14, punto 2). Escojamos un recorrido que no coincida con la línea del rayo (fig. 56.5) y sustituyamos en la (56.18) $\nabla\varphi$, en virtud de la (56.10), por $\boldsymbol{k} = \nu_0 k = \nu_0 k_0 n$

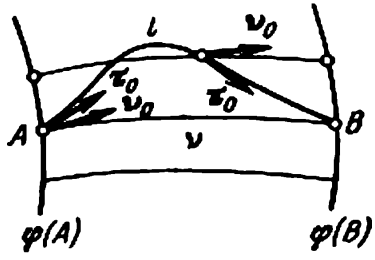


Fig. 56.5.

$$\int_A^B \nabla\varphi\,dl = \int_A^B \boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{l} = k_0 \int_A^B n\cos\alpha\,dl,$$

donde $\cos\alpha = (\nu_0, \tau_0)$ es el coseno del ángulo entre las direcciones del rayo (ν_0) y caminos de integración (τ_0). Tomando, en caso particular, el camino de integración a lo largo del rayo ($l = \nu$), debemos suponer que $\cos\alpha = 1$. Pero a causa de que la integral (56.18)

no depende del recorrido

$$\int_A^B n \cos\alpha \, dl = \int_A^B n \, dv,$$

y por esto

$$\int_A^B n \, dl \geqslant \int_A^B n \, dv,$$

ya que la multiplicación de n positiva por $\cos\alpha \leqslant 1$ sólo puede disminuir la magnitud de la integral. De aquí se desprende el principio de Fermat (56.17).

Ahora ya podemos argumentar con facilidad el método de cálculo de espejos y lentes, expuesto en el § 50, punto 3. En ambos casos se trata de hallar las condiciones a las que todos los caminos (recorridos) ópticos desde un punto (foco) hasta cierto plano (frente de onda) *son iguales*. Supongamos que dichos caminos se han construido como se verificó al deducir las ecuaciones (50.5) y (50.6). ¿Por qué estos caminos deben realizarse, o sea, los rayos deben obligatoriamente ir a lo largo de ellos? La respuesta a esta pregunta la hallamos en el principio de Fermat: porque siendo iguales, todos los caminos hallados resultan ser los *más cortos*.

5. Sobre la aplicación de la óptica geométrica. Dirijámonos a las desigualdades (56.4b), cuyo cumplimiento justifica la aplicación de los conceptos de la óptica geométrica a los campos electromagnéticos. Primeramente señalemos que dichos conceptos deben ser válidos a frecuencias suficientemente altas y, en el límite, cuando $\omega \longrightarrow \infty$, la óptica geométrica es válida (compárese con el § 50, punto 2). Luego tomando las permeabilidades reales, reducimos las (56.4b) a la forma

$$\frac{|\operatorname{rot} \mathcal{E}|}{W|\mathcal{H}|} \ll k \quad \text{y} \quad \frac{W|\operatorname{rot} \mathcal{H}|}{|\mathcal{E}|} \ll k, \tag{56.19}$$

donde se han introducido los parámetros $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ y $W = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ que son funciones de coordenadas, junto con las permeabilidades ε y μ. También será una función de coordenadas la magnitud $\lambda = 2\pi/k$ que podemos denominar convencionalmente longitud de onda «instantánea» (reducida a un punto); en realidad, λ puede considerarse como la longitud de onda sólo en aquel caso, cuando el campo que investigamos es una onda localmente plana. Escribiendo las (56.19) en la forma

$$\lambda \frac{|\operatorname{rot} \mathcal{E}|}{W|\mathcal{H}|} \ll 2\pi \quad \text{y} \quad \lambda \frac{|\operatorname{rot} \mathcal{H}|W}{|\mathcal{E}|} \ll 2\pi, \tag{56.19a}$$

señalemos que las componentes de la rotacional del vector están formadas por las primeras derivadas del propio vector y, por esta razón, las desigualdades escritas serán cumplidas de antemano si

$$\frac{\lambda}{W|h|}\left|\frac{\partial e}{\partial \xi}\right| \ll 2\pi \quad \text{y} \quad \frac{\lambda W}{|e|}\left|\frac{\partial h}{\partial \xi}\right| \ll 2\pi,$$

siendo e y h respectivamente las componentes de los vectores $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$, mientras que ξ una coordenada cartesiana arbitraria. Pero, en particular, $\frac{\partial e}{\partial \xi}\lambda \approx \Delta_\lambda e$ es el incremento de e en la longitud λ en la dirección ξ. De este modo, para todas las componentes de $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ y para todas las ξ, se exige que

$$\frac{|\Delta_\lambda e|}{W|h|} \ll 2\pi \quad \text{y} \quad \frac{W|\Delta_\lambda h|}{|e|} \ll 2\pi. \tag{56.20}$$

Como vemos, la condición suficiente para la aplicación de las representaciones de la óptica geométrica es la relativa pequeñez de las variaciones de las amplitudes del campo a distancias de un orden de λ. Esto es posible, si a estas distancias ε y μ (y junto con ellas λ) varían en pequeño grado. Pero, como es lógico, incluso en un medio homogéneo ($\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) pueden existir campos para los que las exigencias (56.20) no se cumplen; *por ejemplo, varían con alta rapidez los campos que se encuentran* cerca de los límites de la "sombra" (§ 54).

Como conclusión, escribamos las igualdades exactas que se desprenden de las (56.3) y que tienen la forma

$$[[\nabla\varphi,\ \mathcal{E}],\ \nabla\varphi] = \omega^2\dot{\varepsilon}\dot{\mu}\mathcal{E} + i\omega\dot{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{H} - i\,[\mathrm{rot}\,\mathcal{E},\ \nabla\varphi] \tag{56.21}$$

y

$$[\nabla\varphi,\ [\mathcal{H},\ \nabla\varphi]] = \omega^2\dot{\varepsilon}\dot{\mu}\mathcal{H} - i\omega\dot{\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{E} + i\,[\nabla\varphi,\ \mathrm{rot}\,\mathcal{H}] \tag{56.22}$$

compárense con las (56.6) y (56.7). A su vez, de estas dos igualdades se desprende que

$$(\nabla\varphi)^2 = \dot{k}^2 + \frac{1}{\mathcal{E}^2}\{i\omega\dot{\mu}\mathcal{E}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{H} - i\,[\mathcal{E},\ \mathrm{rot}\,\mathcal{E}]\,\nabla\varphi + (\mathcal{E}\nabla\varphi)^2\} \tag{56.23}$$

y

$$(\nabla\varphi)^2 = \dot{k}^2 - \frac{1}{\mathcal{H}^2}\{i\omega\dot{\varepsilon}\mathcal{H}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{E} - i\,[\mathrm{rot}\,\mathcal{H},\ \mathcal{H}]\,\nabla\varphi - (\mathcal{H}\nabla\varphi)^2\}. \tag{56.24}$$

La comparación de las (56.23) y (56.24) con la (56.8) nos lleva a los siguientes criterios de la aplicación de la ecuación del eiconal:

$$\left|\frac{1}{\mathcal{E}^2}\{i\omega\dot{\mu}\mathcal{E}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{H} - i\,[\mathcal{E},\ \mathrm{rot}\,\mathcal{E}]\,\nabla\varphi + (\mathcal{E}\,\nabla\varphi)^2\}\right| \ll |\dot{k}^2| \tag{56.25}$$

o bien,

$$\left|\frac{1}{\mathcal{H}^2}\{i\omega\dot{\varepsilon}\mathcal{H}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{E} - i\,[\mathrm{rot}\,\mathcal{H},\ \mathcal{H}]\,\nabla\varphi - (\mathcal{H}\,\nabla\varphi)^2\}\right| \ll |\dot{k}^2|. \tag{56.26}$$

Si para cierto campo $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ se ha construido la representación (56.1), las fórmulas (56.25), (56.26) nos mostrarán si hay razones para su interpretación según la óptica geométrica.

§ 57. Rayos en medios no homogéneos

1. Curvatura del rayo. Deducción de la ecuación principal. En la fig. 57.1 está representado un rayo en forma de la curva plana ν. Considerando dos puntos próximos M y M', cuando $\alpha \to 0$, se tiene: $\Delta\nu \to \alpha R$ y $\alpha \to \frac{\Delta\nu_0}{\nu_0} = \Delta\nu_0$, siendo $\Delta\nu = MM'$ la longitud del arco, R el radio de curvatura en el punto M y $\Delta\nu_0$ el valor absoluto del incremento $\Delta\nu_0$ del vector unitario ν_0 de la tangente al rayo. De este modo, para el radio de curvatura se obtiene la siguiente expresión diferencial:

$$R = d\nu/d\nu_0. \qquad (57.1)$$

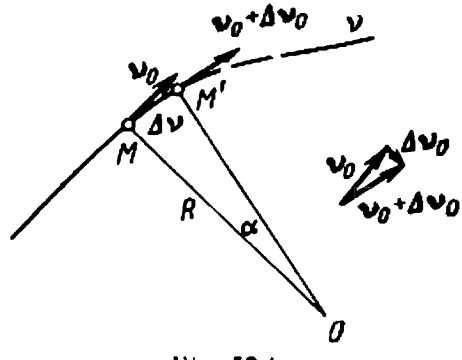


Fig. 57.1

En adelante, emplearemos la siguiente característica vectorial para la curvatura del rayo (que, en general, no es plano):

$$\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{R}_0}{R} = \frac{d\nu_0}{d\nu}, \qquad (57.2)$$

siendo $\boldsymbol{R}_0$ un vector unitario que indica la dirección de $d\nu_0$ es decir, está dirigido hacia donde se desvía el rayo, mientras $1/R$, como sabemos, se denomina curvatura. Uno de los métodos para deducir la ecuación principal que caracteriza el rayo óptico, consiste en lo siguiente [D.2].

En coordenadas cartesianas

$$\frac{d\nu_0}{d\nu} = \frac{\partial\nu_0}{\partial x}\frac{dx}{d\nu} + \frac{\partial\nu_0}{\partial y}\frac{dy}{d\nu} + \frac{\partial\nu_0}{\partial z}\frac{dz}{d\nu},$$

teniendo en cuenta que las derivadas de las coordenadas x, y, z por la longitud ν son cosenos de dirección y, por consiguiente, son también las proyecciones del vector unitario ν_0 en los ejes de coordenadas. Por esta razón

$$\frac{d\nu_0}{d\nu} = \frac{\partial\nu_0}{\partial x}\nu_{0x} + \frac{\partial\nu_0}{\partial y}\nu_{0y} + \frac{\partial\nu_0}{\partial z}\nu_{0z}. \qquad (57.3)$$

Tengamos, a continuación, en cuenta que $\nabla\nu_0^2 = 0$, ya que $\nu_0^2 = 1$; abriendo $\nabla\nu_0^2 = \nabla(\nu_{0x}^2 + \nu_{0y}^2 + \nu_{0z}^2)$ se tiene la igualdad

$$\nu_{0x}\nabla\nu_{0x} + \nu_{0y}\nabla\nu_{0y} + \nu_{0z}\nabla\nu_{0z} = 0. \qquad (57.4)$$

En particular, de las (57.3) y (57.4) se desprende que:

$$\frac{d\nu_0}{d\nu} = \nu_{0x}\left(\frac{\partial\nu_0}{\partial x} - \nabla\nu_{0x}\right) + \nu_{0y}\left(\frac{\partial\nu_0}{\partial y} - \nabla\nu_{0y}\right) + \nu_{0z} = \left(\frac{\partial\nu_0}{\partial z} - \nabla\nu_{0z}\right), \qquad (57.5)$$

expresión que puede ser escrita en forma más lacónica. Efectivamente, proyectando la (57.5), por ejemplo, en el eje x, se tiene

$$\frac{\partial v_{0x}}{dv} = v_{0y}\left(\frac{\partial v_{0x}}{\partial y} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial x}\right) + v_{0z}\left(\frac{\partial v_{0x}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial x}\right) = -[\mathbf{v}_0, \operatorname{rot} \mathbf{v}_0]_x$$

y puesto que igual forma tienen las demás proyecciones, la igualdad (57.5) adquiere la forma

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dv} = -[\mathbf{v}_0, \operatorname{rot} \mathbf{v}_0]. \tag{57.6}$$

Con objeto de obtener la ecuación del rayo óptico, tengamos en cuenta que, según las (S1.33) y (56.10), rot $\boldsymbol{k} = 0$, y como $\boldsymbol{k} = \mathbf{v}_0 n k_0$ (§ 56, punto 3)

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_0 n = 0 \tag{57.7}$$

y, en virtud de la (S1.35)

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_0 = \frac{1}{n}[\nabla n, \mathbf{v}_0]. \tag{57.7a}$$

Introduciendo esto en la expresión (57.6), obtenemos la ecuación del rayo

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dv} = \frac{1}{n}[\mathbf{v}_0, [\nabla n, \mathbf{v}_0]] \tag{57.8}$$

o bien, después de una transformación por medio de la (S1.5)

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dv} = \frac{1}{n}\{\nabla n - \mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0 \nabla n)\}. \tag{57.8a}$$

Señalemos además que

$$\frac{d}{dv}(\mathbf{v}_0 n) = n\frac{d\mathbf{v}_0}{dv} + \mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0 \nabla n),$$

o sea que a la ecuación del rayo se la puede dar la forma

$$d/dv\,(\mathbf{v}_0 n) = \nabla n. \tag{57.8b}$$

2. **Propiedades de los rayos. Medios estratificados.** Comencemos por señalar que de la (57.8) y teniendo en cuenta la (57.2), se desprende: en un medio homogéneo ($n = \text{const}$, $\nabla n = 0$) los rayos son líneas rectas ($K = 0$, $R \to \infty$).

Más adelante, supongamos que el rayo está dirigido en todo lugar en el sentido de la mayor variación de las propiedades del medio, es decir, los vectores $\mathbf{v}_0$ y ∇n son paralelos. En la (57.8) vemos que en este caso también $K = 0$, es decir, el rayo es recto. Esto es posible si las superficies $n = \text{const}$ de un medio no homogéneo son simultáneamente superficies del frente de propagación de la onda. Por ejemplo, tomemos el caso de un medio *planamente estratificado*, cuando las superficies $n = \text{const}$ son paralelas (fig. 57.2, *a*); aquí es posible una onda plana, cuyos rayos son rectos paralelos. En el caso de un medio *esféricamente estratificado* (las

superficies $n = \text{const}$ son concéntricas esféricas), se puede tratar de una onda esférica: los rayos serán radiales rectos, fig. 57.2, b.

Dado ahora que en cierto punto de un medio estratificado, el rayo está dirigido perpendicularmente a ∇n (a lo largo de la superficie $n = \text{const}$). En este caso, de la (57.8a), se tiene

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dv} = \frac{\nabla n}{n}, \tag{57.9}$$

es decir, el rayo se desvía en dirección del máximo crecimiento del índice de refracción del medio. Este fenómeno se ilustra en las figs. 57.2, *c*, *d*.

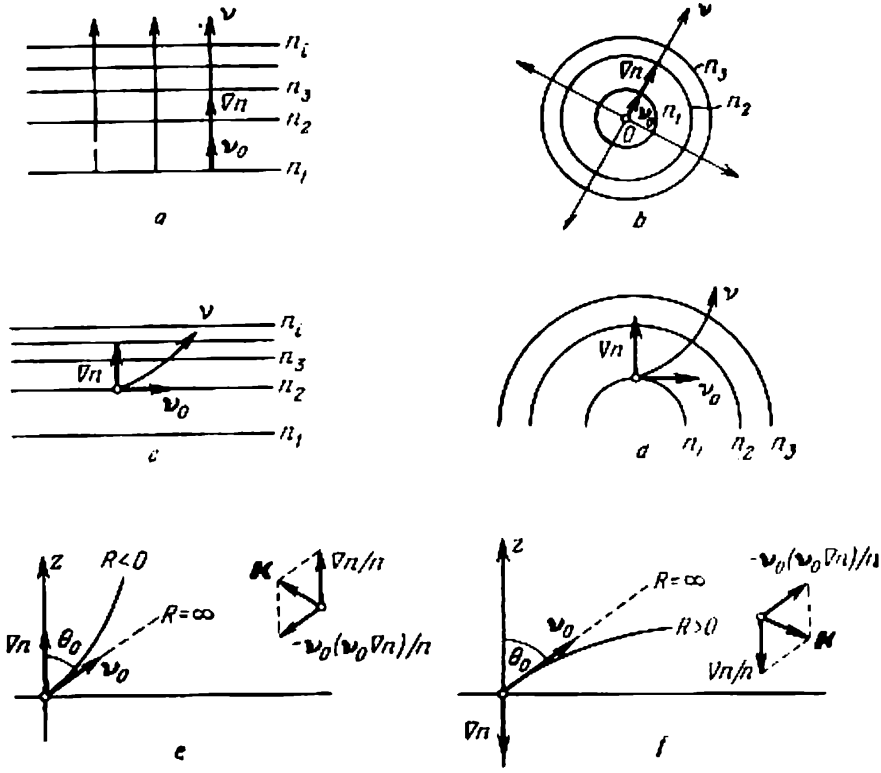


Fig. 57.2.

Examinemos un caso más generalizado cuando en el medio estratificado la dirección del rayo forma con ∇n ángulo arbitrario θ_0. Cualitativamente la desviación del rayo puede ser caracterizada como lo hicimos antes: se desvia hacia ∇n; esto puede apreciarse en los diagramas vectoriales de la suma de $\nabla n/n$ y $-\mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0 \nabla n)/n$ expuestos en las figs. 57.2, *e*, *f*. La coordenada *z* indica aquí la dirección que vamos a denominar vertical. El vector ∇n puede coincidir con la dirección vertical (fig. 57.2, *e*) o bien, ser contrario a ella (fig. 57.2, *d*). En el primer caso, el rayo se desvía hacia

la vertical y la curvatura se considerará negativa, mientras que en el segundo, se alejará de la vertical (curvatura positiva).

Deseando determinar el radio de curvatura R, partiremos de las fórmulas (57.2) y (57.8a). Puesto que ahora $\nabla n = z_0 \frac{dn}{dz}$ $(dn/dz > 0)$ (fig. 57.2, *e*) o $dn/dz < 0$ (fig. 57.2, *f*)), entonces

$$\frac{R_0}{R} = \frac{1}{n}\left\{z_0 \frac{dn}{dz} - v_0 (v_0 z_0) \frac{dn}{dz}\right\}.$$

Tomando en cuenta que $v_0 z_0 = \cos\theta_0$, al elevar al cuadrado, de aquí obtenemos

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{dn}{dz}\right)^2 (1 - \cos^2\theta_0) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{dn}{dz}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta_0,$$

y, por fin

$$R = -\frac{n}{\frac{dn}{dz}\operatorname{sen}\theta_0}, \qquad (57.10)$$

donde el signo negativo (al extraer la raíz de la anterior expresión) ha sido escogido de acuerdo con la condición sobre el signo de la curvatura indicada antes; $R > 0$ al decrecer la densidad óptica del medio en sentido vertical. Tomando $\theta_0 = 90°$, de la (57.10) obtenemos la fórmula de un rayo que se desplaza paralelamente al plano $n = \text{const}$

$$R = -\frac{n}{dn/dz}. \qquad (57.11)$$

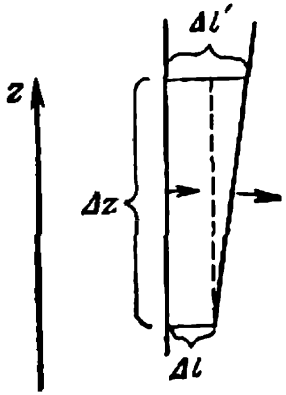


Fig. 57.3.

Recomendamos que el lector deduzca esta fórmula directamente de la (57.9).

Podemos indicar otra deducción muy sencilla de la fórmula (57.11). Sea que como resultado de la variación del coeficiente de refracción al cambiar la altura, el frente de onda que al principio era vertical resultó quedar un poco inclinado (fig. 53.3). Con esto Δl y $\Delta l'$ serán los incrementos de los rayos para z y $z + \Delta z$ respectivamente. Es evidente que

$$\Delta l = \frac{v_0 \tau}{n} \quad \text{y} \quad \Delta l' = \frac{v_0 \tau}{n + \frac{dn}{dz}\Delta z + \ldots},$$

donde $v_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ y τ el intervalo de tiempo. Si R es el radio de curvatura del rayo, entonces, $\frac{\Delta l'}{R} \approx \frac{\Delta l' - \Delta l}{\Delta z}$, es decir,

$$R \approx \frac{\Delta z}{1 - \frac{\Delta l}{\Delta l'}}.$$

Introduciendo a ésta Δl y $\Delta l'$ llegamos de nuevo a la (57.11).

Por último, hagamos uso de la ecuación del rayo en la forma (57.8b) con objeto de hallar para un medio planamente estratificado una ley semejante a la segunda ley de Snell. Multiplicando vectorialmente por $\boldsymbol{z}_0$ ambos miembros de la igualdad (57.8b), tendremos a la derecha un cero idéntico en virtud del paralelismo de los vectores $\boldsymbol{z}_0$ y $\nabla n = \boldsymbol{z}_0 dn/dz$. Por esto

$$[d(\mathbf{v}_0 n)/d\mathbf{v},\ \boldsymbol{z}_0] = 0. \tag{57.12}$$

Es evidente que

$$[d(\mathbf{v}_0 n)/d\mathbf{v},\ \boldsymbol{z}_0] = d[\mathbf{v}_0 n,\ \boldsymbol{z}_0]/d\mathbf{v},$$

ya que $d\boldsymbol{z}_0/d\mathbf{v} = 0$ ($\boldsymbol{z}_0 = \text{const}$). De este modo, de la (57.12) se desprende:

$$n[\mathbf{v}_0,\ \boldsymbol{z}_0] = \text{const} \tag{57.13}$$

o

$$n \operatorname{sen} \vartheta = \text{const}. \tag{57.13a}$$

Conviene subrayar que se trata de una magnitud que es constante por la *longitud del rayo* en todos sus puntos. En nuestra consideración podemos introducir el comienzo del rayo: $n = n_0$ y $\vartheta = \theta_0$

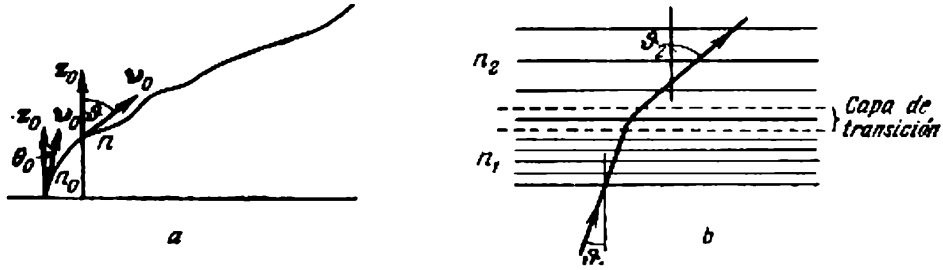


Fig. 57.4.

(fig. 57.4, *a*). En este caso, la correlación deducida toma la siguiente forma:

$$n \operatorname{sen} \vartheta = n_0 \operatorname{sen} \theta_0, \tag{57.13b}$$

en la que es semejante a la segunda ley de Snell.

Recordemos que anteriormente (§ 41, punto 2) se consideró un sistema de capas de densidad óptica constante, en cuyas fronteras n varía a saltos. El resultado obtenido (57.13b) es, en esencia, la forma límite de la correlación (41.10).

Tomemos un sistema de dos capas con índices de refracción n_1 y n_2 separadas por una superficie de separación plana en la que las variaciones de las propiedades transcurren gradualmente en cierta capa. Cumpliendo determinadas exigencias (§ 56, punto 5), no podemos poner en duda que la fórmula (57.13b) puede ser aplicada y hallamos (fig. 57.4, b) que

$$n_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 = n_2 \operatorname{sen} \vartheta_2. \tag{57.14}$$

Por su forma, esta igualdad es la segunda ley de Snell (§ 37, punto 2). Es evidente que tenemos derecho a seguir este punto de vista mientras el espesor de la capa intermedia no sea demasiado pequeño (§ 56, punto 5); el paso a la variación a saltos de n que es formalmente admisible, no está argumentado.

IV. Ondas de radio terrestres y troposféricas

En esta parte retornamos a las cuestiones relacionadas con la propagación de ondas de radio en condiciones naturales que ya fueron tratadas en los §§ 41, 42. El material precedente de este capítulo, en este caso, servirá de base teórica necesaria.

Ya señalamos que el conjunto de factores físicos que determinan las propiedades de las líneas de radiocomunicación es extremadamente complejo; tal vez, el factor más complicado es la influencia de las capas superiores ionizadas de la atmósfera, es decir, de la ionosfera.

Sin embargo, para un amplio círculo de procesos de propagación de las ondas de radio, esta influencia puede ser despreciada, siendo sólo substancial la presencia de la superficie terrestre. En tales casos, las ondas de radio se denominan *terrestres* (§ 41, punto 2).

Con frecuencia, las capas inferiores de la atmósfera, en las que prácticamente se propagan las ondas de radio terrestres, pueden ser consideradas como medio homogéneo que, por sus características electrodinámicas es próxima al vacío. En otros casos, la no homogeneidad de las capas de la atmósfera cercanas a la Tierra, o sea, de la troposfera, se manifiesta e incluso juega determinado papel. Aquellas ondas de radio cuyas singularidades de propagación están condicionadas por factores de dicho género, se denominan *troposféricas*.

Más abajo se examinan las ondas terrestres y troposféricas.

§ 58. Factores físicos y aproximaciones de teoría

1. Condiciones naturales y su simulación. Hablando en general, la Tierra con su atmósfera es un complicado medio no homogéneo. Son distintas las propiedades del terreno y, el 70% de la superficie terrestre está cubierto de agua. Las montañas, bosques, edificaciones, etc. no permiten, al parecer, hablar de la Tierra como de un cuerpo físico con superficie sencilla y con características electrodinámicas en todo lugar conocidas. Por esta razón, debemos comprender que resulta ser imposible un planteamiento estricto del problema de la propagación de las ondas de radio en condiciones naturales a causa de la variedad de los factores y es inevitable la *simulación*, es decir, la sustitución de las condiciones reales por otras simplificadas, las que, sin embargo, deben reproducir lo más importante con autenticidad satisfactoria.

La influencia del relieve de la superficie terrestre y de los objetos situados en ella depende de las correlaciones de las dimensiones de las desigualdades y la longitud de onda. Dado que una onda plana incide sobre la superficie de separación de medios de forma complicada que se desvía de la superficie plana a una altura no más de h (fig. 58.1). Esto será un objeto de difracción y la cuestión consiste en qué grado el campo de dispersión se diferencia de la onda que se podría reflejar de la superficie plana, es decir, en particular, cuál será la inconstancia de la fase del campo de dispersión en el plano hipotético del frente de tal onda (línea de trazos en la fig. 58.1). Ciertos elementos de la superficie de separación son semejantes a radiadores elementales, cuyas fases se impulsan por onda incidiente y, podemos intentar apreciar las distinciones de fase en el plano que nos interesa comparando sus campos. Dos elementos cercanos de la superficie accidentada, pero máximamente alejados respecto a la altura, son semejantes a radiadores (o bien, a planos reflectores) dispuestos a una distancia igual a h en dirección vertical. La respectiva diferencia de fase es igual a la divergencia de los caminos ópticos $A'Q'B'$ y AQB, o sea

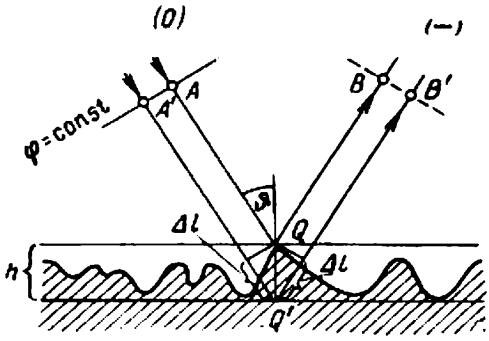


Fig. 58.1.

$$\Delta\varphi = 2k\,\Delta l = \frac{4\pi h}{\lambda}\cos\vartheta. \qquad (58.1)$$

Si $h \ll \lambda$, entonces $\Delta\varphi \approx 0$. En este caso, despreciando las desviaciones de fase, podemos llegar a la conclusión de que las desigualdades de la frontera no se manifiestan. La fórmula (58.1) muestra que la influencia de las desigualdades decrece no sólo al disminuir su altura, sino que también a medida que la dirección de propagación de la onda se aproxima a la horizontal. Se considera que el desprecio de las desigualdades de la frontera está justificado, hasta cierto punto, hasta desviaciones de fase $\Delta\varphi$ de un orden de $\pi/2$. Según la (58.1), a lo que le corresponde una altura de las desigualdades

$$h < \lambda/8\cos\vartheta. \qquad (58.2)$$

En las bandas de ondas medias y largas comarcas pobladas de bosques e, incluso, ciudades pueden considerarse superficies planas que se caracterizan por ciertos parámetros electrodinámicos equivalentes como, por ejemplo, por el factor de reflexión para una onda de una u otra polarización y sentido. En cambio para las ondas centimétricas una piedra o arbusto por separado, debe ser considerado como objeto de difracción.

En una serie de casos, al analizar la propagación de ondas de radio, la superficie terrestre se toma como un plano ("modelo plano") que, a veces, es conductor ideal. En lo que se refiere a la atmósfera, hay que tener en cuenta lo siguiente. Cerca del 80% de toda la masa del aire está situada en una capa en las cercanías de la Tierra y, en término medio, tiene un espesor de 11 km. Esta es la troposfera, a que múltiples veces nos hemos referido. El índice de refracción del gas que llena la troposfera (y que consta del aire mezclado con vapores de agua) es muy próximo a la unidad y, sin embargo, a pesar de tal factor, las variaciones espaciales de la densidad óptica de la troposfera deben, en muchos casos, tenerse en cuenta al explicar las singularidades de propagación de las ondas de radio.

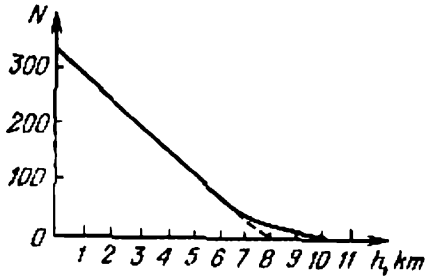


Fig. 58.2.

Cuando el estado de la troposfera es normal y estable, su temperatura y densidad decrecen al aumentar la altura, al mismo tiempo considerando la frontera superior de la troposfera aquel nivel en que cesa la disminución de la temperatura; la temperatura media del año puede alcanzar aquí —80 °C. En las capas considerablemente enrarecidas que se extienden después de la troposfera, la temperatura aumenta de nuevo, pero esta circunstancia, desde un punto de vista electrodinámico, no tiene ya gran importancia: el factor principal resulta ser la disminución de la densidad óptica, junto con la del gas. En este caso, al efectuar apreciaciones cuantitativas es más cómodo no hacer uso del coeficiente de refracción n que diverge de la unidad en diezmilésimas, sino del llamado "índice de refracción" N que se determina por la fórmula

$$N = (n - 1) \cdot 10^6. \qquad (58.3)$$

La ley idealizada de la variación de N en dependencia de la altura se muestra gráficamente en la fig. 58.2 [F.1]; en el sector lineal (hasta alturas de cerca de 7 km), $dN/dh \approx -4 \cdot 10^{-2}$ 1/m. Es importante que se observan considerables desviaciones de la ley normal mostrada, tanto más o menos estacionarias, como de tipo casual.

Durante la propagación de las ondas de radio, los cambios lentos de la densidad de la troposfera proporcionan fenómenos que se definen como refracción. Las fluctuaciones locales de la densidad deben considerarse como objetos de dispersión.

2. Región de dominio de una línea de radiocomunicación. A causa de la variedad de los factores físicos en diferentes lugares del globo terrestre, el problema sobre el grado en que conviene tenerlos simultanéamente en cuenta al analizar las líneas de radiocomunicación, es particularmente importante. En general, se plantea

la pregunta: ¿es, en principio, necesario investigar en tal caso el campo electromagnético por todo el espacio?

Empecemos por simplificar el problema hasta el límite. Dado que en un medio homogéneo infinito se propaga una onda plana y que en cierto punto de observación M, el campo se caracteriza por las intensidades $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$. Si queremos esclarecer, hasta que grado dependen estas magnitudes del proceso electromagnético que transcurre en las zonas alejadas del espacio, supongamos que en el camino de la onda se encuentra una pantalla con un orificio (fig. 58.3, *a*); este último puede ser rectangular. Ahora, en el punto

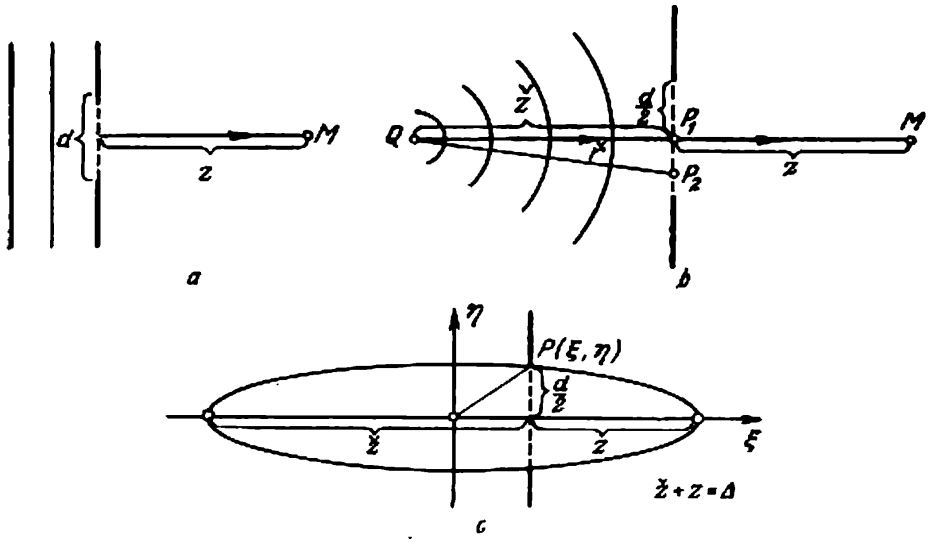


Fig. 58.3.

M tenemos un campo de difracción estudiado en el § 54. Del § 54, punto 2, sabemos que cuando el orificio tiene dimensiones suficientemente grandes, el campo frente a su punto medio prácticamente no se diferencia de la onda incidente. Indiquemos que deben ser apreciadas "dimensiones de onda" que se definan por las correlaciones (54.8), es decir, si la dimensión transversal del orificio es igual a d, la dimensión de onda correspondiente debe ser grande

$$\tilde{d} = d/\sqrt{\lambda z} \tag{58.4}$$

(compárese con la (54.13)), siendo z, en el caso dado, la distancia hasta el punto de observación (fig. 58.3, *a*). Supongamos que con la pantalla el campo en el punto M no se diferencia (con el grado dado de precisión) del campo sin ella cuando $\tilde{d} = C$; esto significa que para

$$d = C\sqrt{\lambda z} \tag{58.5}$$

se apantalla una "parte insignificante" del campo. Cuanto menor sea λ, tanto más estrecho deberá ser el orificio admisible; para

$\lambda \to 0$, el orificio se hace infinitamente pequeño y, podemos decir, que emite sólo un rayo. Es natural llegar a la conclusión de que en la creación del campo de la onda plana en el punto M participa activamente sólo parte del campo total ubicada en una región en forma de canal. Llamaremos a dicha región "de dominio" (determinante).

En las condiciones de las líneas de radiocomunicación, la onda se debe considerar esférica. Estudiemos una onda esférica radiada en el punto Q (antena transmisora) y que se observa en el punto M (antena receptora). Para poder en este caso esclarecer el carácter de la región de dominio, introduzcamos, como anteriormente, una pantalla con un orificio (fig. 58.3, *b*) e investiguemos el campo de difracción.

Si el punto Q está alejado de la pantalla, entonces la amplitud de la onda esférica puede considerarse invariable en el plano del orificio, entonces, en lo que se refiere a la fase, ya no se puede despreciar la diferencia entre las distancias QP_1 y QP_2. Designando QP_2 por el símbolo $\tilde{r}$, se tiene

$$\tilde{r} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + \tilde{z}^2},$$

siendo $\tilde{z} = QP_1$ la distancia más corta y x' e y' las coordenadas en el plano de la pantalla. Es evidente que (compárese con el § 54, punto 1)

$$\tilde{r} = \tilde{z} + \frac{(x')^2 + (y')^2}{2\tilde{z}} + \ldots .$$

Señalemos ahora que para hallar el campo de difracción de la onda esférica hay que realizar solamente insignificantes cambios en las fórmulas del § 54. Precisamente bajo la integral (54.1) debe figurar el factor de fase complementario

$$e^{-ik_0\tilde{r}} = e^{-ik_0\tilde{z}}\, e^{-ik_0\frac{(x')^2+(y')^2}{2\tilde{z}}}$$

así que

$$\dot{E}_m = \boldsymbol{x}_0 \frac{ik_0\dot{A}}{2\pi}\frac{e^{-ik_0(z+\tilde{z})}}{z} \times \\ \times \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_0\left[\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2z}+\frac{(x')^2+(y')^2}{2\tilde{z}}\right]} dx'\,dy'. \qquad (58.6)$$

puesto que nos interesa sólo el punto de observación $M(0, 0, z)$, en la (58.6) se debe poner $x = 0$ e $y = 0$. De modo semejante al § 54, punto 1, la integral se descompone en dos integrales de forma idéntica respecto a x' e y'. Una de ellas:

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_0\left[\frac{(x')^2}{2z}+\frac{(x')^2}{2\tilde{z}}\right]} dx' = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_0\frac{(x')^2}{2z\tilde{z}/(z+\tilde{z})}} dx'.$$

En comparación con el caso de la difracción de una onda plana (§ 54) cuando el factor $e^{-(k_0(x')^2/2\tilde{z}}$ no figura, la diferencia consiste en que en lugar de z ahora tenemos $\frac{z\tilde{z}}{z+\tilde{z}}$.

Ya no es dificultoso escribir el resultado de la integración: sólo hay que introducir en las (54.3), (54.3a) evidentes cambios. Pero no se necesita la expresión del campo, sino la representación de las dimensiones de onda del orificio. Está claro que las dimensiones nuevas se expresarán, como antes, por las fórmulas (54.6) sustituyendo en ellas z por $\frac{z\tilde{z}}{z+\tilde{z}}$, y se conservará el sentino de dichos parámetros (la deducción de las fórmulas (54.9) queda en vigor[1]). Por esto, en lugar de la (58.4), tendremos

$$\tilde{d} = \frac{d}{\sqrt{\lambda \frac{z\tilde{z}}{z+\tilde{z}}}}, \tag{58.7}$$

y tomando la dimensión de onda mínima admisible del orificio igual a C, se obtiene que

$$d = C\sqrt{\lambda \frac{z\tilde{z}}{z+\tilde{z}}}. \tag{58.8}$$

Analicemos este resultado, señalando previamente que $z+\tilde{z}$ es ni más menos que la distancia entre las antenas receptora y transmisora $QM = \Delta$. En la fig. 58.3, *c* se ha introducido un sistema cartesiano de coordenadas (ξ, η) con su origen ubicado en el centro de la línea de radiocomunicación; sea $P(\xi, \eta)$ un punto en el borde del orificio que limita a la región dominante, así que (fig. 58.3, *c*) $\tilde{z} = \frac{\Delta}{2} + \xi$, $z = \frac{\Delta}{2} - \xi$ y $d = 2\eta$. Introduciendo estas magnitudes en la (58.8) y después de sencillas transformaciones, se halla que

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} = 1, \quad A = \frac{\Delta}{2}, \quad B = \frac{C}{4}\sqrt{\lambda\Delta}. \tag{58.9}$$

Hemos obtenido la ecuación de una *elipse*, en la que se encontrarán los puntos de contorno del indicado orificio al desplazar la pantalla a lo largo de toda la línea. De esa manera, la región de dominio (dominante) para la línea de radiocomunicación tiene el aspecto de un cuerpo con sección longitudinal en forma de elipse. Los puntos inicial y final de la línea de radiocomunicación se encuentran en la intersección de la elipse con el eje horizontal mientras que su semieje B, como era de esperar, disminuye simultáneamente con la longitud de onda λ. Cuando $\lambda \to 0$, la región

[1] Conviene tener en cuenta que $\dot{A}$ en la (58.6) y, por consiguiente, en las fórmulas del tipo (54.9) de aquí obtenidas, es el coeficiente de amplitud del campo en el orificio que depende de $\tilde{z}$ ($A \sim 1/z$).

de dominio degenera en una línea que une ambas antenas. Podemos con facilidad comprender que, en general, es una elipsoide de revolución; a tal deducción hubiéramos llegado directamente si hubiéramos partido del problema de la difracción mediante un orificio circular.

Las deducciones que, por lo general, se hacen del examen realizado, consisten en que para el funcionamiento de la línea de radiocomunicación es substancial sólo el proceso electromagnético que transcurre en una región de dominio cuya dimensión transversal máxima es igual a $2B = C\sqrt{\lambda\Delta}/2$. Todas las restricciones y especificaciones necesarias, junto con la amplificación de la interpretación se darán más adelante en el punto 3. Por el momento, hace falta elegir la constante C y aclaremos lo anterior por medio de una construcción geométrica.

Hablando estrictamente, hay que tomar $C \gg 1$, pero sin embargo, con frecuencia, la frontera de la región dominante se determina de tal forma que esto es equivalente a la elección de $C = 2$ en la (58.8).

Qué es lo que en realidad significa la elección de $C = 2$, puede ser representado fácilmente mediante el ejemplo de un orificio cuadrado en una pantalla, tomando un diagrama en escala grande en forma de la espiral de Cornu (fig. 54.3). Con objeto de hallar los extremos del segmento representativo, se hace uso de la escala de la magnitud $w\sqrt{2/\pi}$ (rayas en la curva), y w se calcula por medio de una de las fórmulas (54.3a) donde x (o bien y) se toma igual a cero, z se sustituye por $zz_1(z = z_1)$, mientras que a (o bien b), por d. Para $C = 2$ los extremos del segmento se encuentran en los puntos $w\sqrt{2/\pi} = \pm\sqrt{2}$; la relación de los segmentos para $C = 2$

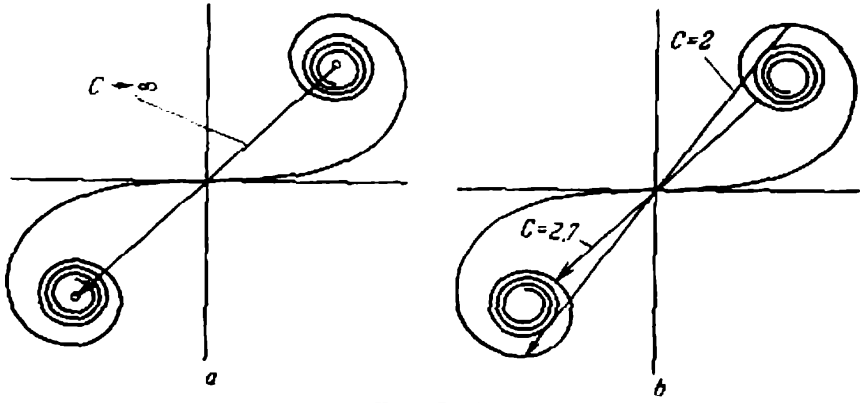


Fig. 58.4.

y $C \to \infty$ (esquemáticamente se representan en la fig. 58.4) resulta ser igual a cerca de 1,25, lo que corresponde a la relación de potencias $(1{,}25)^4 \approx 2{,}4$. Al aumentar el orificio, el campo oscila considerablemente, alcanzando el mínimo para $w\sqrt{2/\pi} \approx 1{,}9$

($C \approx 2{,}7$). El segmento representativo alcanza aqui, en comparación con el caso cuando $C = 2$, cerca del 60% y por consiguiente, la potencia disminuye aproximadamente hasta el 13%. Como vemos, una pantalla con un orificio, al ser $C = 2$, no se puede considerar que no influye en la transmisión directa de la energía.

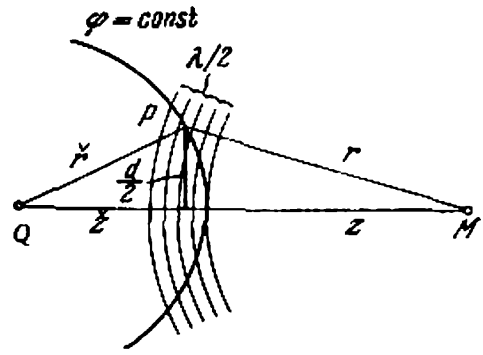


Fig. 58.5.

Por fin, examinemos la construcción en la fig. 58.5, donde se muestra como el frente esférico de la onda que se radia desde Q se divide en las zonas de Fresnel (en el § 54, punto 3 zonas análogas se construian en el plano). Como antes, la zona central (primera) de Fresnel está limitada por una circunferencia, mientras que las siguientes zonas son anulares. Sea que el orificio en la pantalla corta n zonas de Fresnel. Entonces

$$\tilde{r} + r = \tilde{z} + z + n\frac{\lambda}{2},$$

donde

$$\tilde{r} = \sqrt{\tilde{z}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx \tilde{z} + \frac{1}{2\tilde{z}}\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

$$r = \sqrt{z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx z + \frac{1}{2z}\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

así que

$$n\lambda = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\tilde{z}}\right),$$

y, por consiguiente, el semidiámetro del orificio es igual a

$$\frac{d}{2} = \sqrt{n\lambda \frac{z\tilde{z}}{z + \tilde{z}}}. \qquad (58.10)$$

La comparación de las fórmulas (58.8) y (58.10) muestra que la elección de $C = 2$, significa la coincidencia de la sección transversal de la región dominante con la primera zona de Fresnel en una esfera.

Si el orificio en la pantalla "corta" la primera zona de Fresnel, entonces la intensidad de radiación es delante de él mayor que sin apantallamiento, no obstante el aumento del orificio hasta la frontera de la segunda zona de Fresnel disminuye considerablemente la intensidad.

3. **Optica geométrica y teoria de la difracción al analizar las líneas de radiocomunicación.** Intentemos utilizar el concepto de la región dominante de la línea de radiocomunicación para entender los rasgos principales del proceso de propagación de las ondas de radio sobre la Tierra y el sentido de los métodos de análisis que

se emplean. Con todo, parcialmente, se esclarece la correlación entre los métodos que se basan en la óptica geométrica y la representación sobre las ondas planas locales por un lado y los métodos de la teoría de difracción y las próximas a ella, por otro.

El propio concepto de la región dominante apareció al considerar las líneas de radiocomunicación en el espacio libre. En este

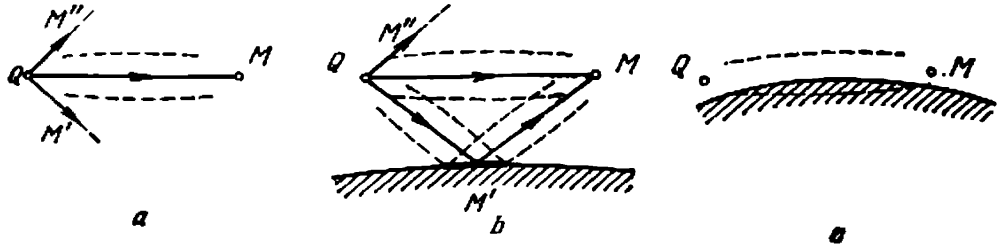


Fig. 58.6.

caso, al radiar una onda esférica en el punto Q, el campo en el punto M se determina totalmente por el proceso en cierta superficie de separación, designada en la fig. 58.6, *a* con línea de trazos. Podemos decir que los rayos tales como QM' y QM'' son aquí absolutamente despreciables.

A continuación, sea que la línea de radiocomunicación está situada sobre la Tierra. Entonces, son posibles diferentes casos. Si ambas antenas se encuentran a una altura suficientemente alta (fig. 58.6, *b*), al contornear la región dominante (línea de trazos), advertimos que entre los puntos Q y M existe "comunicación por la visibilidad geométrica" en virtud de la cual en el punto M se crea un campo tal, como el que habría si no existiera la Tierra. Sin embargo, en comparación con el caso del espacio libre, se manifiesta una singularidad de gran importancia. Se trata de que el rayo QM' ya no puede considerarse despreciable. Debido a la acción de la Tierra, dicho rayo, al reflejarse llega al punto M; de este modo, el campo total en M se constituye de dos componentes, una de las cuales corresponde a la visibilidad geométrica, mientras que la segunda, a la reflexión desde la Tierra. Se plantea la pregunta: ¿es admisible considerar la influencia de la Tierra desde el punto de vista de la óptica geométrica? Podemos hallar la respuesta haciendo de nuevo uso del concepto de la región de dominio. En la fig. 58.6, *b* está construida una región de dicho tipo para el rayo quebrado $QM'M$. Si resulta que en los límites de la zona en la superficie terrestre que se encuentra en la región dominante (en la fig. 58.6, *b* ella está destacada) las condiciones son homogéneas, podemos, suponiendo que la onda es localmente plana, introducir el concepto de factor de reflexión y aplicar las fórmulas de Fresnel (§ 38).

Señalemos que si se manifiesta la influencia de la ionosfera (§ 41, punto 2) que en este capítulo no se toma en cuenta, no podrá ser tampoco despreciada la radiación bajo ángulos conside-

rables respecto al horizonte. Entonces, el rayo QM' (fig. 58.6, *b*) puede llegar a M a causa de la refracción en la ionosfera.

Seguidamente, estudiemos el caso más complicado para el análisis cuando las antenas están muy próximas a la Tierra y la región dominante no está totalmente ubicada en ella (fig. 58.6, *c*). En realidad, esto quiere decir que la Tierra influye incluso en la comunicación de visibilidad directa geométrica. Aquí no puede ser aplicada una sencilla interpretación radial, incluso como un enfoque

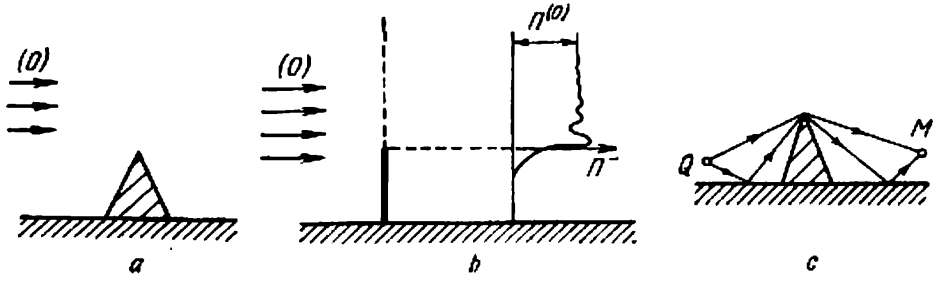


Fig. 58.7.

aproximado de la cuestión y se exige un planteamiento riguroso del problema electrodinámico de la excitación del campo en el contorno de un cuerpo que imita a la Tierra. Tal problema puede ser planteado como de difracción (§ 50, punto 5).

Si en la trayectoria de la línea de radiocomunicación se encuentra un obstáculo claramente expresado en forma de monte, edificio, etc. (fig. 58.7, *a*), cuyas dimensiones superan mucho la longitud de onda, por lo general, este se considera como el borde del orificio en una pantalla (fig. 58.7, *b*). En el caso más sencillo, la onda de radio puede tomarse como una onda que incide normalmente en una pantalla imaginaria (semiplana); la intensidad del campo detrás del obstáculo, allí donde está situada la antena receptora, se distribuye de acuerdo con la ley aclarada antes (§ 54, punto 2), lo que se muestra en la fig. 58.7, *b*; en la "frontera de sombra" la amplitud del campo decrece dos veces, pero un poco más arriba se encuentra la región de "amplificación máxima del campo por el obstáculo" (la amplitud del campo es superior que sin el obstáculo). El cuadro real del proceso suele ser mucho más complicado y, en particular, gracias a la influencia de la Tierra. La fig. 58.7, *c* explica la consideración aproximada que se utiliza para este caso. Se supone que sobre el objeto inciden dos ondas (una de ellas reflejada de la Tierra), cada una de las cuales difracta según la anterior ley; a su vez, detrás del obstáculo, la onda difractada obtenida como la respectiva superposición, llega al punto M por dos trayectorias iguales a las anteriores. Si la reflexión sobre la Tierra es satisfactoria y las correlaciones de fase propicias, la "amplificación" puede también manifestarse en la "zona de sombra".

§ 59. Ondas de radio terrestres

1. Línea de radiocomunicación corta alejada de la Tierra; modelo plano de la Tierra. En el presente párrafo vamos a tratar las propiedades de las ondas de radio terrestres a las condiciones cuando no se manifiesta la heterogeneidad de la troposfera. Desde el punto de vista del análisis, el caso más sencillo es de una línea de radiocomunicación en la que las alturas de ambas antenas sobre la Tierra, superan considerablemente la longitud de onda, y la distancia entre ellas es mucho más pequeña que el radio de la Tierra así que la superficie terrestre en los límites de la línea de

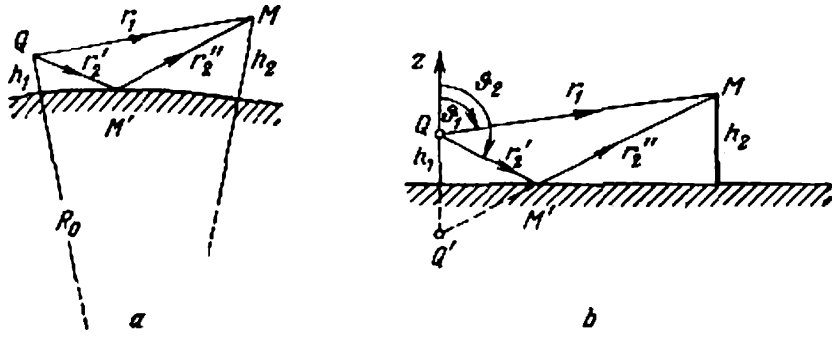


Fig. 59.1.

radiocomunicación (cuando el relieve es suficientemente satisfactorio, § 58, punto 1) puede tomarse plana. Haciendo uso de las designaciones de la fig. 59,1, *a*, expresemos estos datos iniciales en forma de las desigualdades

$$h_1 \gg \lambda_1, \quad h_2 \gg \lambda; \quad r_1 \ll R_0, \tag{59.1}$$

suponiendo que ellas se cumplen en grado suficientemente elevado.

Como se desprende del § 58, punto 3 (la posición a considerar corresponde a la fig. 58.6, *b*), el campo en el punto de recepción M puede hallarse como la superposición de una onda plana (rayo QM) y la onda reflejada de la Tierra (rayo $QM'M$) con todo, la variación de la amplitud y la fase durante la reflexión se determina como si se tratara de una onda plana homogénea que incide sobre la superficie de separación plana de los medios (es decir, según las fórmulas de Fresnel, § 38). Sin embargo, hay que hacer la restricción de que el entorno del punto de reflexión M' en los límites de la sección de la región dominante, se supone que es plano y homogéneo (§ 58, puntos 1—3).

De esta manera, el campo en M es el resultado de una superposición, o la interferencia de dos ondas. Designando las amplitudes complejas del vector $\boldsymbol{E}$ de estas ondas por $\dot{\boldsymbol{E}}_{m1}$ y $\dot{\boldsymbol{E}}_{m2}$, para el campo total tendremos que

$$\boldsymbol{E}_m = \boldsymbol{E}_{m1} + \boldsymbol{E}_{m2}. \tag{59.2}$$

El primero de los sumandos se determina inmediatamente por medio de la fórmula (41.4):

$$\dot{E}_{m1} = e_{01}\sqrt{\frac{D(\vartheta_1, \alpha)\,\overline{P}W_0}{2\pi}}\,\frac{e^{-ikr_1}}{r_1}. \qquad (59.3)$$

Aquí, e_{01} es el versor del vector E_1 y ϑ_1, el ángulo de declinación del rayo directo (fig. 59.1, *b*). En lo que se refiere a la magnitud $\dot{E}_{m2}$, conviene tener en cuenta que el rayo reflejado incide en M' bajo un ángulo ϑ_2 que es diferente de ϑ_1 y el vector E_2, hablando en general, (a excepción del caso de polarización perpendicular) no está dirigido como E_1. Es, a continuación, importante que la onda reflejada es esférica y que su trayectoria desde el manantial Q hasta M, es igual a $r_2 = r_2' + r_2''$, mientras que como resultado de la reflexión se produce una variación de la amplitud y la fase que se tiene en cuenta por medio del coeficiente $\dot{\rho}$. Por consiguiente,

$$\dot{E}_{m2} = e_{02}\sqrt{\frac{D(\vartheta_2, \alpha)\,\overline{P}W_0}{2\pi}}\,\dot{\rho}\,\frac{e^{-ikr_2}}{r_2}. \qquad (59.4)$$

Suponiendo que la polarización puede ser tanto perpendicular como paralela, determinaremos $\dot{\rho} = \dot{\rho}_{\perp, \parallel}$ por las fórmulas (38.8) y (38.17), en otros casos no es difícil descomponer la onda en las componentes de una u otra polarización (§ 34, punto 2). Subrayamos que al hacer uso de las indicadas fórmulas de Fresnel, hace falta escoger correspondientemente el versor e_{02} en la (59.4). Por ejemplo, para la polarización perpendicular (§ 38, punto 1) $e_{02} = x_0$, mientras que si es la paralela (§ 38, punto 2), $e_{02} = e_0''$ (véase la fig. 38.2, *b*).

Así para hallar el campo en el punto de recepción, hay que aplicar las correlaciones (59.2)—(59.4) que son de carácter elemental. A veces, el problema se simplifica aún más. Es importante el caso, cuando

$$h_1 \ll r_1 = r. \qquad (59.5)$$

En este caso (fig. 59.2, *a*)

$$\vartheta_2 \approx \vartheta_1 = \vartheta, \quad r_2 \approx r_1 + 2h_1\cos\vartheta_1 = r + 2h_1\cos\vartheta.$$

Si la polarización es perpendicular, entonces $e_{02} = e_{01} (= x_0)$. Seguidamente, supongamos que la polarización es paralela, y la condición inicial se hace más estricta:

$$h_1 \ll r \quad \text{y} \quad h_2 \ll r. \qquad (59.5a)$$

Entonces (fig. 59.2, *b*; compárese con la fig. 38.2, *b*), $e_{02} \approx -e_{01}$. Designando en los dos casos de las (59.2)—(59.4) $e_{01} = e_0$, se tiene

$$\dot{E}_m \approx \dot{E}_0(1 \pm \dot{\rho}_{\perp, \parallel} e^{-i2kh_1\cos\vartheta}),$$
$$\dot{E}_0 \approx e_0\sqrt{\frac{D(\vartheta, \alpha)\,\overline{P}W_0}{2\pi}}\,\frac{e^{-ikr}}{r}. \qquad (59.6)$$

Designando el factor de reflexión complejo $\dot{\rho}_{\perp,\parallel} = \rho_{\perp,\parallel} e^{i\varphi_{\perp,\parallel}}$, de aquí hallamos que

$$E_m \approx E_0 \sqrt{1 + \rho^2_{\perp,\parallel} \pm 2\rho_{\perp,\parallel} \cos(2k_0 h_1 \cos\vartheta - \varphi_{\perp,\parallel})} \quad (59.6a)$$

Ahora señalemos que la condición (59.5a) indica la proximidad del ángulo de incidencia al ángulo recto. Suponiendo que en las fór-

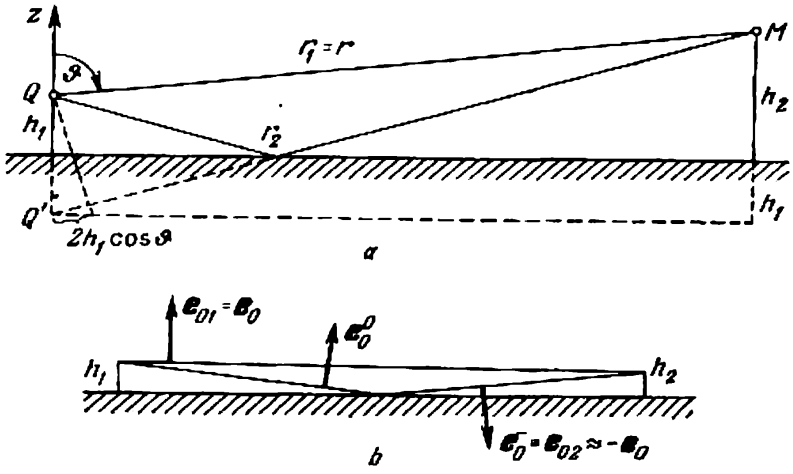


Fig. 59.2.

mulas de Fresnel (38.8) y (38.17) $\varphi = 90°$, se halla: $\dot{\rho}_\perp = -1 = e^{i\pi}$ y $\rho_\parallel = 1$. La fórmula (59.6a) proporciona

$$E_m \approx E_0 \sqrt{2 - 2\cos(2k_0 h_1 \cos\vartheta)}$$

o bien

$$E_m \approx 2E_0 |\operatorname{sen}(k_0 h_1 \cos\vartheta)| \quad (59.7)$$

para ambos tipos de polarización.

Esta expresión puede reducirse a una forma aun más sencilla. Como $\vartheta \approx 90°$, el $\cos\vartheta$ es muy pequeño y junto con él, el argumento del seno en la (59.7), de modo que

$$E_m \approx 2E_0 k_0 h_1 |\cos\vartheta|.$$

Es evidente que el ángulo ϑ es más correcto tomarlo como el promedio aritmético de los ángulos ϑ_1 y ϑ_2 en la fig. 59.1, *b*. Con todo

$$|\cos\vartheta| \approx \frac{|\cos\vartheta_1| + |\cos\vartheta_2|}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_2 - h_1}{r_1} + \frac{h_2 + h_1}{r_2}\right) \approx \frac{h_2}{r}$$

y definitivamente

$$E_m \approx 2E_0 k_0 \frac{h_1 h_2}{r} = 2e_0 \sqrt{\frac{DPW_0}{2\pi}} k_0 \frac{h_1 h_2}{r^2}. \quad (59.8)$$

Esta es la *fórmula de Vvedenski* que encuentra extensa aplicación.

Marquemos que las fórmulas (59.6)—(59.8) son aceptables para débil directividad de las antenas en el plano vertical ($D(\vartheta, \alpha)$ varía lentamente en dependencia de ϑ). Se puede parecer que en virtud de la desigualdad (59.5), los ángulos ϑ_1 y ϑ_2 son siempre suficientemente próximos; pero en el caso de una antena de haz filiforme o larga las magnitudes $D(\vartheta_1, \alpha)$ y $D(\vartheta_2, \alpha)$, incluso siendo ϑ_1 y ϑ_2 muy próximos, pueden diferenciarse múltiples veces y la representación (59.6) resulta ser injusta.

La fórmula de Vvedenski es interesante porque en forma evidente muestra el crecimiento de debilitamiento del campo al aumentar la distancia debido a la influencia de la Tierra para las condiciones dadas: $\sim 1/r^2$ en lugar de $\sim 1/r$ en el espacio libre, lo que es resultado de la oposición de la onda reflejada; por esto, cuanto menor es la diferencia entre r_2 y r_1 (estas trayectorias tienden a la igualdad, al aumentar), tanto más próxima a 180° será la respectiva diferencia de fase.

Si se tratara de un plano reflector idealmente conductor, entonces, de las (38.8) se desprendería exactamente que: $\dot{\rho}_\perp = -1$, pero de las (38.17) en lugar de $+1$, se obtendría $\dot{\rho}_\parallel = -1$, lo que aquí significaría la coincidencia de fases de la reflexión (siendo pequeños los ángulos $e_0^- \approx -e_0^+$). Entonces, el paso de la (59.6a) a la fórmula (59.7) no es justo y, en su lugar, se obtendría la siguiente:

$$E_m \approx 2E_0 |\cos(k_0 h \cos\vartheta)|. \qquad (59.9)$$

Aunque en realidad tal caso no es posible, hay que tener en cuenta que para una superficie de separación conductora (digamos, del mar), la magnitud $\dot{W}_2$ en las (38.17) puede tener un módulo muy pequeño. Por esto, el paso de la (59.6a) a la (59.7) será justo en una región donde los valores del $\cos\vartheta$ sean considerablemente menores que al ser la polarización perpendicular.

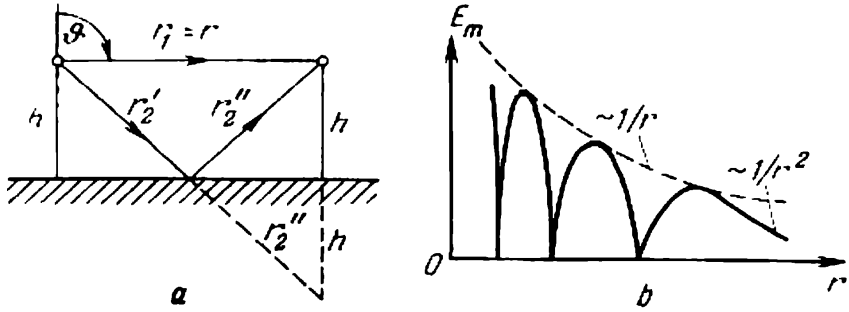


Fig. 59.3.

Luego consideremos dos antenas relativamente cercanas. Dado que ellas están situadas a iguales alturas h (fig. 59.3, a) y $D(\vartheta_1, \alpha) = D(\vartheta_2, \alpha)$, $\dot{\rho} = \dot{\rho}_\perp = -1$, así como con suficiente exactitud $1/r_1 \approx 1/r_2$. Sumando las amplitudes complejas $\dot{E}_{m1}$ (59.3) y $\dot{E}_{m2}$

(59.4), se tiene

$$\dot{E}_m = \dot{E}_0 [1 - e^{-ik_0(r_2 - r_1)}],$$

siendo $\dot{E}_0$ la misma magnitud que teníamos en la (59.6). De aquí

$$E_m = 2E_0 \left| \operatorname{sen} \frac{k_0 (r_2 - r_1)}{2} \right|. \qquad (59.10)$$

En la fig. 59.3 vemos que $r_2 = \sqrt{r^2 + (2h)^2}$ y, por lo tanto

$$k_0 (r_2 - r_1) = k_0 \left| \sqrt{r^2 + (2h)^2} - r \right| = k_0 r \left(\frac{2h^2}{r^2} + \ldots \right)$$

y limitándose al primer término del desarrollo, de la (59.10) obtenemos un resultado que corresponde a la fórmula de Vvedenski.

Es interesante que la magnitud E_m que se determina por la fórmula (59.10) no es una función monótona decreciente de la distancia. Para antenas relativamente cercanas, la diferencia del recorrido de los rayos $r_2 - r_1$ puede no ser pequeña en comparación con la longitud de onda y, al cumplir la exigencia (59.1), la dependencia $E_m(r)$ tiene el aspecto mostrado en la fig. 59.3, *b*. De las (59.9) y (59.6) se desprende que en la región de oscilaciones la envolvente de la curva (línea de trazos) tiene el carácter de $1/r$. Al aumentar r_2 y r_1 su diferencia decrece monótonamente, tendiendo a cero, cuando $r_2 \to r_1 \to \infty$. A partir de cierta distancia, este fenómeno lleva a la disminución monótona del seno en la (59.10): esto significa que llegamos a la región de aplicación de la fórmula de Vvedenski, donde $E_m \sim 1/r^2$ (fig. 59.3, *b*).

Las fórmulas obtenidas de las (59.3) y (59.4) a base de la (59.2) se llaman corrientemente "de interferencia". Detengámonos en la concretización de las fórmulas de interferencia respecto a radiadores ya estudiados.

Comencemos por indicar que la acción de los radiadores sobre un plano idealmente conductor ya se ha estudiado en el § 49, punto 4 desde otros puntos de vista. Es fácil comprobar que estos dos métodos llevan a idénticos resultados. Por ejemplo, tomemos la fórmula (49.15) para un radiador eléctrico elemental situado de forma horizontal sobre el plano. Para $\vartheta = 90°$ (véase la fig. 49.8, *a*; el sistema de coordenadas se diferencia del que utilizamos ahora) por medio de dicha fórmula, se halla

$$E_m = 2E_0 |\operatorname{sen}(k_0 h \cos \vartheta)|; \quad E_0 = \frac{p_m k_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (59.11)$$

donde la designación del ángulo se ha cambiado ($\alpha \to \vartheta$) de acuerdo con lo fig. 59.2. Lo mismo se halla de la (59.7), además la expresión de E_0, que hemos escrito aquí se desprende del segundo renglón de la (59.6) al poner $D = 3/2$ y $\overline{P} = \frac{4\pi^3 p_m^2 W_0}{3\varepsilon_0 \mu_0 \lambda^4}$ en virtud de las (44.7) y (44.20). Proponemos que el lector lo establezca por sí sólo.

Al considerar el anterior radiador elemental orientado horizontalmente respecto a un medio arbitrario, sólo debemos sustituir en la (59.11) $2|\operatorname{sen}(k_0 h\cos\vartheta)|$ por el factor que se desprende de la (59.6a)

$$E_m/E_0 = \sqrt{1+\rho_\perp^2+2\rho_\perp\cos(2k_0h\cos\vartheta-\psi_\perp)}.$$

Para un radiador eléctrico elemental orientado verticalmente sobre un plano idealmente conductor, de acuerdo con la (49.14), se tiene (fig. 49.7, *a*)

$$E_m = 2E_0|\cos(k_0h\cos\vartheta)|,$$
$$E_0 = \frac{p_m k_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r}|\operatorname{sen}\vartheta|. \qquad (59.11a)$$

Esta fórmula también se obtiene partiendo de la (59.9), al caracterizar como es debido E_0 (se recomienda efectuar tal comprobación).

En el caso general, en las (59.11a) $2|\cos(k_0h\cos\vartheta)|$ se sustituye por el factor

$$E_m/E_0 = \sqrt{1+\rho_\parallel^2-2\rho_\parallel\cos(2k_0h\cos\vartheta-\psi_\parallel)}.$$

En conclusión, daremos ciertos resultados de los cálculos de E_m/E_0 mediante las fórmulas que hemos considerado [E.3]. En la fig. 59.4, *a* se muestra la dependencia entre las magnitudes E_m/E_0 y el ángulo ϑ para un radiador eléctrico horizontal a una altura $h=3{,}8\lambda$, suponiendo que el terreno tiene los parámetros $\mu=\mu_0$ y $\dot{\varepsilon}=20\varepsilon_0$ (es decir, $\varepsilon_r=20$, $\sigma=0$). Como vemos, a tal altura la radiación se caracteriza por un número considerable de máximos de interferencia que al crecer h aumenta rápidamente. Si la altura $h=0{,}5\lambda$, en cada uno de los cuadrados sólo hay un máximo (fig. 59.4, *b*); la curva para $|\dot{\varepsilon}|\to\infty$ es exacta, mientras que los datos para $\dot{\varepsilon}=2\varepsilon_0$ no son absolutamente fidedignos, ya que la condición de aplicación de las fórmulas de interferencia $h\gg\lambda$ no está satisfecha de antemano. Diagramas análogos para un radiador eléctrico vertical se muestran en la fig. 59.4, *c*; en virtud de que la altura es relativamente pequeña ($h=\lambda$), los datos son más fidedignos para grande constante dieléctrica (proximidad al caso límite $|\dot{\varepsilon}|\to\infty$). Señalemos que cuando la posición del radiador es vertical a causa del factor complementario $|\operatorname{sen}\vartheta|$, los máximos de intensidad del campo no alcanzan sus anteriores valores.

2. Línea de radiocomunicación adyacente a la Tierra. En diferencia de lo anteriormente expuesto, el estudio de las líneas de radiocomunicación adyacentes a la Tierra crea una serie de problemas complejos para el análisis. Se trata de líneas cuya región dominante por la visibilidad geométrica no está situada comple-

tamente sobre la Tierra, lo que corresponde a la fig. 58.6, *c*. Aquí son posibles tres casos principales (fig. 59.5, *a*, *b*, *c*).

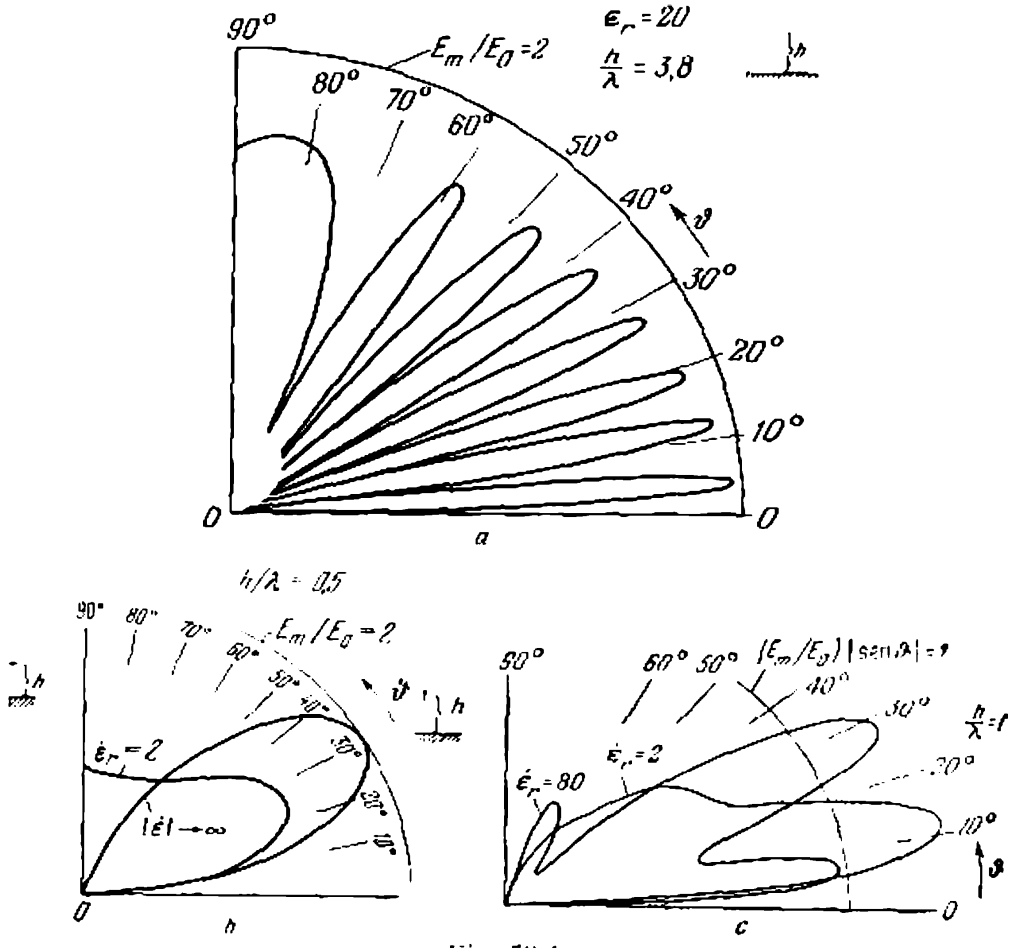


Fig. 59.4.

En el caso más sencillo (fig. 59.5, *a*), la línea de radiocomunicación es tan corta que el sector de la superficie terrestre que a ella corresponde puede considerarse plano, como se ha indicado

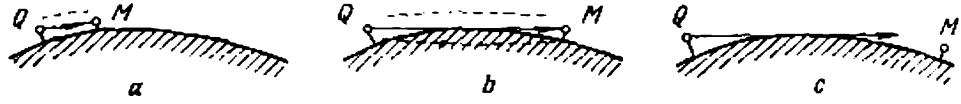


Fig. 59.5.

en el punto 1. La diferencia consiste en que las antenas ya no están elevadas sobre la Tierra a la altura que se exige para satisfacer las dos primeras desigualdades en las (59.1). El problema sobre tal línea de radio se resuelve fácilmente suponiendo sólo que

la superficie terrestre es un conductor ideal. Entonces, independientemente de la altura de antenas, el enfoque demostrado en el punto 1 continua siendo válido (los respectivos resultados también se obtienen según las reglas indicadas en el § 49, punto 4). Sin embargo, esta aproximación no da un cuadro completamente satisfactorio del proceso, por lo menos porque no se toma en cuenta la absorción: puesto que se supone que en la superficie de la Tierra $E_\tau = 0$, entonces el flujo de energía que pasa a su interior no existe. No obstante, las fórmulas de interferencia obtenidas en el punto 1 siguen siendo válidas, e incluso al no cumplirse las

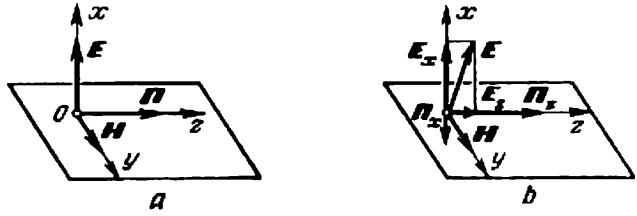


Fig. 59.6.

desigualdades (59.1), mientras las alturas de antenas no sean aún pequeñas en comparación con la longitud de onda y, con frecuencia, dichas desigualdades se emplean a indicadas condiciones (fig. 59.4, *b*, *c*).

Si, a pesar de todo, la substancia del terreno es conductora (§ 6, punto 3), es posible comprender el carácter del campo en las proximidades de la Tierra por medio de las condiciones de contorno de Leontovich (§ 40, punto 2). Sea que suponiendo que la conductancia del terreno es infinita, la polarización de una onda que se propaga a lo largo de la Tierra es vertical (el vector $\boldsymbol{E}$ es perpendicular a la superficie terrestre). Localmente vamos a considerar que la onda es plana y homogénea, de modo que (fig. 59.6, *a*)

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m &= \boldsymbol{x}_0 A e^{-ik_0 z}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m &= \boldsymbol{y}_0 \frac{A}{W_0} e^{-ik_0 z} \end{aligned}\right\} \quad x \geqslant 0.$$

Cuando la conductancia del terreno es finita, no puede existir un campo de tal tipo, sin embargo, substancialmente diferente será sólo la forma del vector $\dot{\boldsymbol{E}}$: aparecerá una componente eléctrica tangencial, que puede ser directamente calculada por medio de la fórmula (40.4), introduciendo en ella $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ de las expresiones escritas anteriormente. Esta componente complementaria tiene la amplitud compleja.

$$\dot{\boldsymbol{E}}_\tau = \dot{W}_2 [\boldsymbol{x}_0, \dot{\boldsymbol{H}}_m] = \boldsymbol{z}_0 \frac{\dot{W}_2}{W_0} A e^{-ik_0 z}, \qquad (59.12)$$

es decir, resulta ser *longitudinal* (fig. 59.6, *b*). Por esta razón, el vector resultante está en cierto grado inclinado en el plano verti-

cal longitudinal; podemos decir que dicho vector está, en el plano indicado, polarizado elípticamente, ya que las componentes E_x y E_z están desfasadas. Hacia el interior de la Tierra está dirigido el vector de Poynting con el siguiente valor medio

$$\overline{\Pi} = -x_0 \operatorname{Re} \frac{\dot{W}_2}{2W_0^2} A^2. \tag{59.13}$$

Para obtener una solución rigurosa del problema sobre un radiador situado sobre un medio semiconductor que está acotado por un plano, se necesita aplicar un método [1], cuya esencia no puede ser estudiada en el presente libro. Por esto nos limitaremos a observar el resultado definitivo en la forma que satisface las exigencias de la práctica de ingeniería. Tomando la fórmula (41.4), introduzcamos en ella coeficiente $\sqrt{2}F$, de modo que ahora

$$E_m = \sqrt{\frac{\overline{DPW_0}}{\pi}} \frac{1}{r} F. \tag{59.14}$$

El "factor de debilitamiento" F se halla por medio de la gráfica $|F.I|$, mostrada en la fig. 59.7, o bien por la fórmula

$$F \approx \frac{2 + 0{,}3\rho}{2 + \rho + 0{,}6\rho^2}, \tag{59.15}$$

siendo $\rho = \frac{1}{2} \frac{k_0 r}{|\varepsilon_r|}$. Lo que es una variante simplificada de la "fórmula de Shuleikin—Van-der-Pol".

Pasando al modelo de la superficie terrestre en forma de un plano idealmente conductor ($|\dot{\varepsilon}_r| \to \infty$, $\rho = 0$), vemos que tanto por la fórmula (59.15) como a base de la gráfica de la fig. 59.7, $F \to 1$. Con todo, en virtud de la (59.14), la intensidad del campo crece en $\sqrt{2}$ veces en comparación con el caso de la transmisión ideal en el espacio libre. Este es el resultado natural para un oscilador vertical (dipolo de Hertz), cuyo flujo de energía debe ser dos veces mayor al radiar la potencia anterior a un semiespacio.

3. Toma en cuenta de la esfericidad de la Tierra. Antes de tratar las situaciones mostradas en la fig. 59.5, *b*, *c*, retornemos al caso de una línea de radiocomicación elevada a cierta altura (punto 1), debilitando en cierto grado la desigualdad $r_1 \ll R_0$ de manera que la superficie de la Tierra en los límites de esta línea sea ya notablemente esférica. Como la región dominante que corresponde a la visibilidad geométrica se encuentra por completo sobre la Tierra, las premisas para la deducción de las fórmulas (59.2)—(59.4) no se afectan. Por esta razón, dichas fórmulas quedan válidas y las distancias r_1, $r_2 = r_2' + r_2''$ se determinan del mismo modo que antes. En lo que se refiere a las fórmulas de interferencia

[1] Por ejemplo, véase [D.7], capítulo 11, punto 1.

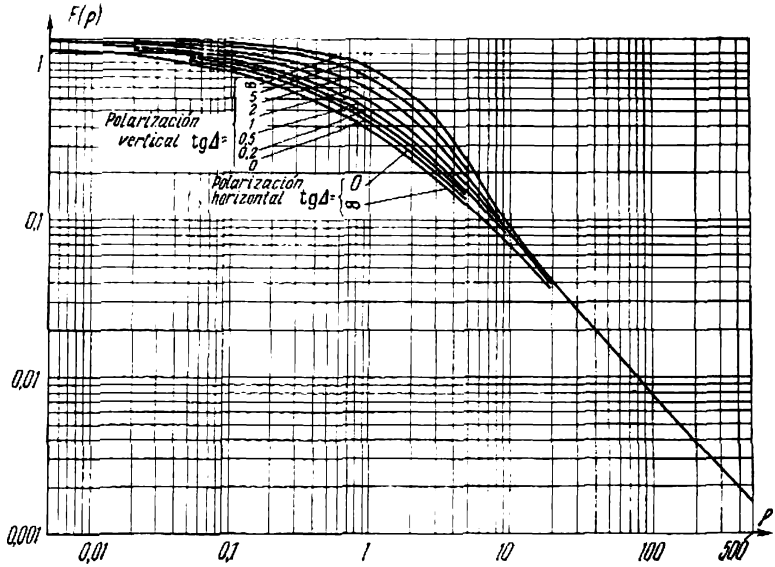

F(ρ)
1
0,1
0,01
0,001
0,01
0,1
1
10
100
500
ρ
Polarización vertical tgΔ=
∞
5
2
1
0,5
0,2
0
Polarización horizontal tgΔ=
0
∞

Fig. 59 7.

posteriores que incluyen las alturas de antenas, ellas exigen sencillas correcciones, cuyo sentido se comprende fácilmente de la fig. 59.8. En dichas fórmulas como, por ejemplo, en la de Vvedenski (59.8), las alturas reales h_1 y h_2 se deben sustituir por las alturas reducidas $\tilde{h}_1$ y $\tilde{h}_2$. Los ángulos QOM' y $M'OM$, por lo general, son pequeños y, por esta causa,

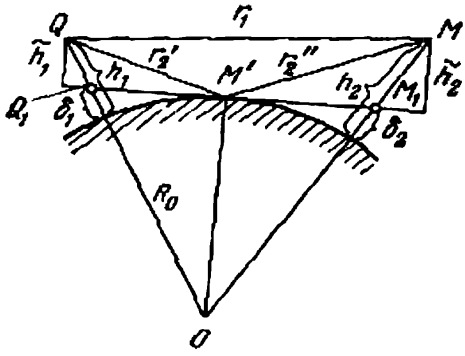


Fig. 59.8.

$$\tilde{h}_1 \approx h_1 - \delta_1 \quad \text{y} \quad \tilde{h}_2 \approx h_2 - \delta_2, \tag{59.16}$$

siendo δ_1 y δ_2 las alturas de los puntos que se encuentran a la mínima distancia de la visibilidad geométrica $Q_1M_1 = r_0$. Esta distancia se calcula por medio de una fórmula aproximada que se desprende al examinar los triángulos $\triangle Q_1M'O$ y $\triangle M'OM_1$

$$r_0 = \sqrt{(R_0+\delta_1)^2 - R_0^2} + \sqrt{(R_0+\delta_2)^2 - R_0^2} \approx \approx \sqrt{2R_0}\,(\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}). \tag{59.17}$$

Luego, es dado que independientemente de sí se cumplen o no las primeras desigualdades (59.1), es decir, las antenas están situadas a poca o gran altura sobre la superficie esférica de la Tierra, *esta última resulta encontrarse en la región dominante de la línea de radiocomunicación* (fig. 59.5, *b*, *c*). Entonces, la Tierra se manifiesta como un objeto de difracción que no permite hacer uso de la interpretación geométrica simplificada (§ 58, punto 3). Es un caso más sencillo aquél, cuando la antena receptora se encuentra en la "zona de sombra", o sea, *allí, donde según las representaciones de la óptica geométrica no debe haber campo* (fig. 59.5,*c*). En este caso, en la práctica existente, se aplica una fórmula, cuyo aspecto coincide con el de la (59.14), pero con factor de debilitamiento que se determina como el producto.

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}\, U\left(r\left(\frac{\pi}{\lambda R_0^2}\right)^{1/3}\right) V\left(2h_1\left(\frac{\pi^2}{\lambda^2 R_0}\right)^{1/3}\right) V\left(2h_2\left(\frac{\pi^2}{\lambda^2 R_0}\right)^{1/3}\right), \tag{59.18}$$

donde los factores se determinan por medio de gráficas [1] (fig. 59.9,*a*, *b*); como ellos se dan en decibelios (§ 32, punto 2), $F_{db} = U_{db} + V_{db}|_1 + V_{db}|_2$ y, a continuación, $F = 10^{F_{db}/20}$.

[1] Las gráficas se han tomado en [1.5].

La fórmula (59.18) es el resultado de una interpretación simplificada de las deducciones de la teoría de difracción. Esta última fue confeccionada en alto grado por V. A. Fok [D.7].

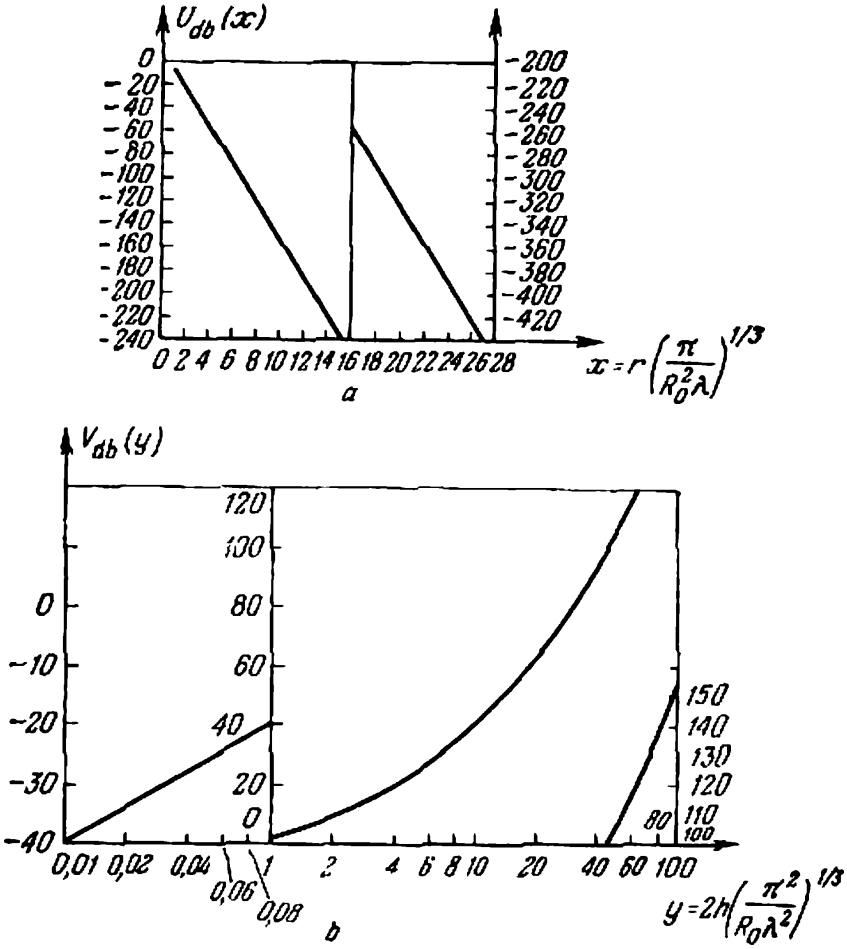


Fig. 59.9

§ 60. Influencia de la troposfera

1. Refracción atmosférica. Como ya se remarcó, aunque la troposfera es un medio muy débilmente no homogéneo, ella puede ejercer una notable influencia en la propagación de ondas de radio a causa de la considerable longitud de las líneas de radiocomunicación. Una pequeña variación del índice de refracción con la altura, provoca en la troposfera fenómenos que pueden considerarse con plenitud desde los puntos de vista de la óptica geométrica e interpretarse como desviación (curvatura) de los rayos. Esto es lo que llamamos *refracción atmosférica*.

Es típico el decrecimiento del índice de refracción al variar la altura (§ 58, punto 1), lo que, en virtud de la (57.10), provoca la desviación del rayo hacia la Tierra.

Efectivamente, si $dn/dz < 0$, por medio de la fórmula

$$R = -\frac{n}{\frac{dn}{dz}\operatorname{sen}\theta_0} \qquad (60.1)$$

hallamos que $R > 0$ (fig. 60.1,*a*). Para un rayo que se desplaza bajo el ángulo prefijado θ_0, en lugar de la trayectoria rectilínea que debe haber cuando $dn/dz = 0$ (la línea de trazos en la fig. 60.1,*a*),

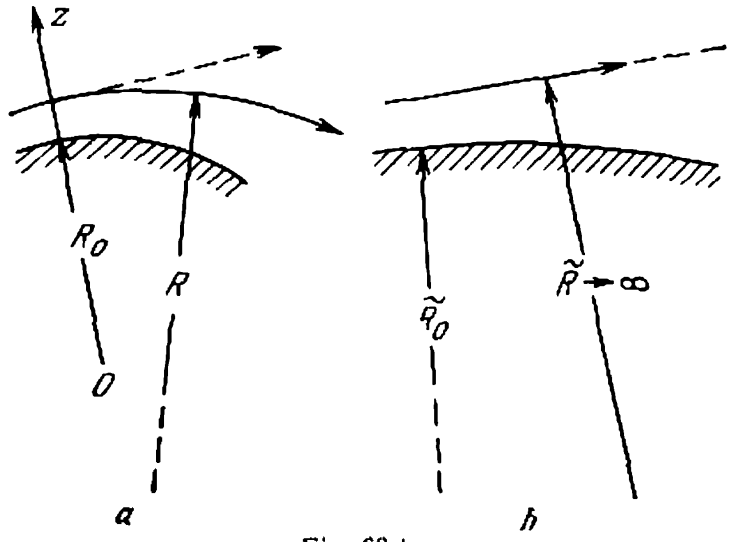


Fig. 60.1.

esta resulta ser curvilínea, lo que provoca el aumento de la distancia de la visibilidad geométrica y, por consiguiente, de la longitud de la línea de radiocomunicación. Tal tipo de refracción, la que se observa con mayor frecuencia, se llama *positiva*.

Al considerar diferentes líneas de radio de las tratadas en el § 59, la refracción se tiene en cuenta de la siguiente forma. Sea que el cuadro real de la propagación de ondas de radio corresponde a la fig. 60.1,*a*; en tal caso, la curvatura relativa del rayo y el perfil de la superficie terrestre, se caracterizan por la diferencia $\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}$. Seguidamente construyamos el cuadro imaginario de la propagación con un rayo rectilíneo ($\tilde{R} \to \infty$) sobre la superficie de un perfil circular de radio $\tilde{R}_0$ (fig. 60.1,*b*); la curvatura relativa del rayo rectilíneo quedará invariable, si

$$\frac{1}{\tilde{R}} - \frac{1}{\tilde{R}_0} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}, \quad (\tilde{R} \to \infty),$$

de donde

$$\tilde{R}_0 = \frac{R_0}{1 - R_0/R}. \qquad (60.2)$$

Decimos que $\tilde{R}_0$ es el *radio equivalente de la esfera terrestre* al haber refracción. En virtud de (60.1), para $\theta_0 = 90°$, se obtiene

$$\tilde{R}_0 = \frac{R_0}{1 + \frac{1}{n}\frac{dn}{dz} R_0}. \qquad (60.3)$$

Para refracción normal positiva, $dn/dz = -4 \cdot 10^{-5}$ 1/km (§ 58, punto 1); introduciendo también en (60.3) $R_0 = 6370$ km, se halla: $\tilde{R}_0 \approx 4R_0/3 \approx 8500$ km.

Después de hallar el radio equivalente de la Tierra, es sólo necesario, tomando $\tilde{R}_0$ en lugar de R_0, efectuar las correcciones en aquellas fórmulas que utilizan el modelo esférico de la Tierra. Así, en particular, se hace al determinar el horizonte visible por la fórmula (59.17). En virtud de lo anteriormente expuesto, con refracción normal tal distancia que aumenta $\sqrt{\tilde{R}_0/R_0}$ veces, es igual a $\tilde{r}_0 \approx 1{,}15\, r_0$, o sea, que la longitud de la línea de radiocomunicación aumenta aproximadamente en un 15%.

A causa de la complejidad del régimen térmico de la troposfera, existen diferentes desviaciones locales de su estado normal que abarcan considerables regiones del espacio. Por esto, además del caso de refracción normal que hemos considerado, hay que tener en cuenta la posibilidad de elevada o reducida refracción positiva (n decrece al variar al altura respectivamente con mayor o menor rapidez), refracción *negativa* ($dn/dz > 0$) o bien, que no haya refracción ($dn/dz = 0$). El esquema de diferentes casos de refracción atmosférica se muestra en la fig. 60.2. Al haber refracción negativa, la distancia de la visibilidad geométrica disminuye ($\tilde{r}_0 < r_0$) y, por lo tanto, no nos interesa. En lo que se refiere a la refracción positiva, es interesante la posibilidad de la *refracción crítica* (fig. 60.2,*d*), con la que el rayo debe contornear la esfera terrestre a una altura invariable; para tal tipo de refracción es preciso un valor de la magnitud dn/dz igual a $dn/dz|_{crit} \approx$ $\approx -15{,}7 \cdot 10^{-5}$ 1/km. Cuando el decrecimiento del coeficiente de refracción al variar la altura es más rápido ($dn/dz < dn/dz|_{crit}$) se observará el fenómeno de *ultrarrefracción* (fig. 60.2,*e*), es decir, cuando el rayo retorna a la Tierra. Indiquemos que la ultrarrefracción condiciona tales fenómenos como el espejismo óptico. Podemos imaginarnos un proceso, con el que la trayectoria de un rayo que se refleja múltiples veces sobre la superficie terrestre, es periódica (fig. 60.2,*f*). Suele decirse que la ultrarrefracción provoca, en tal caso, la creación de una *guía de ondas troposférica*. Efectivamente, la troposfera juega, entonces, el papel de un sistema direccional (por cierto, lo mismo que para la refracción crítica). El cuadro

de los rayos en la guía de onda troposférica (fig. 60.2,*f*) nos recuerda la fig. 39.5 que esclarece el proceso de propagación de ondas entre planos de conducción ideal.

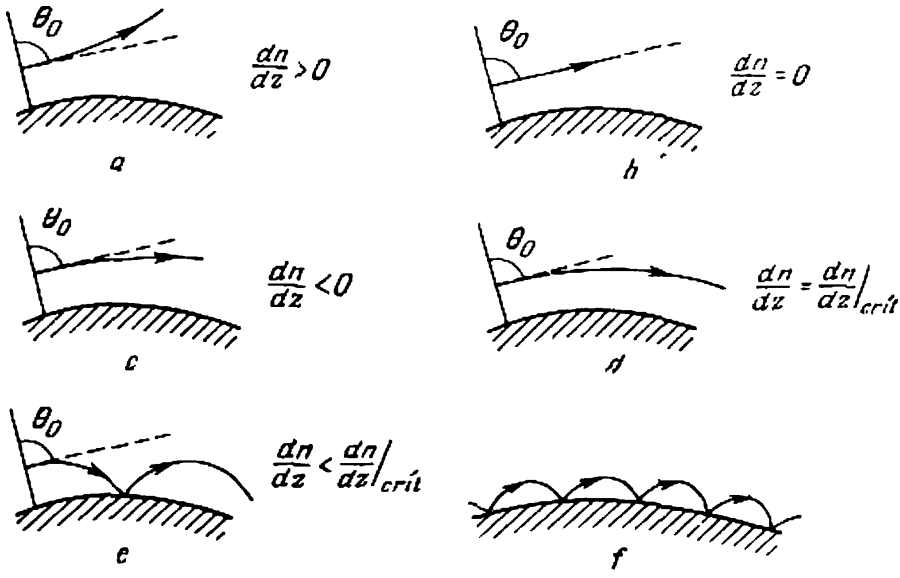


Fig. 60.2.

2. Dispersión y absorción en la troposfera. Remarquemos que los estados de la troposfera que hemos estudiado anteriormente y que condicionan diferentes tipos de refracción anómala, son formaciones temporales y locales. La troposfera está expuesta a diferentes variaciones de carácter casual, además, los movimientos turbulentos del aire engendran múltiples cambios locales de su densidad y, por consiguiente, de la densidad óptica del medio. Cada una de dichas formaciones es un objeto de difracción de las ondas de radio que con pequeñez de dimensiones, crea un campo de dispersión, semejante al campo de un radiador eléctrico elemental. Considerando que la región de variación de la constante dieléctrica es esférica, podemos expresar el campo de dispersión de un objeto independiente por medio de las fórmulas (50.13). Pero como en el caso dado $\varepsilon_i \approx \varepsilon_e \approx \varepsilon_0$, es más cómodo dar al primero de los renglones de las (50.13) la forma siguiente:

$$\dot{E}_m = -\dot{\Phi}_0 \frac{R^3}{3} \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} k_0^2 \dot{E}_m^0 \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} e^{-ik_0 r}, \qquad (60.4)$$

siendo $\Delta\varepsilon = \varepsilon_i - \varepsilon_e$, mientras que $\dot{E}_m^0 = \dot{E}_m^0(0)$ la amplitud compleja de la magnitud $\dot{E}$ de la onda que incide en la región del objeto. Se supone que la desviación relativa media de la constante dieléctrica $\Delta\varepsilon/\varepsilon_0$ es de un orden de 10^{-6} de forma que por separado el campo de dispersión (60.4) es totalmente despreciable. Sin embargo, el campo de dispersión total se forma en la troposfera como re-

sultado de la superposición de múltiples campos de este tipo, cuyas amplitudes y fases son casuales.

Como nos muestran las mediciones, a causa de la acción de diferentes factores casuales y principalmente de la dispersión troposférica [1], la intensidad del campo en la banda de ondas ultracortas en la frontera de la visibilidad geométrica, resulta ser sistemáticamente mucho mayor que debería ser como resultado de la difracción en la frontera de la Tierra (§ 59, punto 3). Un modelo de semejantes datos se muestra en la fig. 60.3 [F.2], en la que se dan las curvas del factor de atenuación F (coeficiente en la fórmula del tipo (59.14)), calculado considerando la Tierra como objeto de difracción (§ 59, punto 3), curva 1 y medido, curva 2; esta última ha sido confeccionada como resultado de la medición de muchos datos obtenidos para ondas centimétricas y decimétricas.

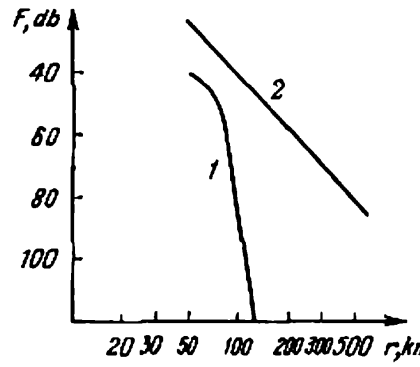


Fig. 60.3.

La troposfera absorbe considerablemente las ondas de la zona de alta frecuencia de la banda de ondas ultracortas, partiendo de las decimétricas. Principalmente, este fenómeno está relacionado con la acción de las gotas de agua (niebla, lluvia). Una gota, con mayor base que la homogeneidad gaseosa, puede ser considerada como objeto esférico de difracción que en muchos casos es pequeño en comparación con la longitud de onda. En tal caso, de acuerdo con las (50.11), (50.13), para una gota

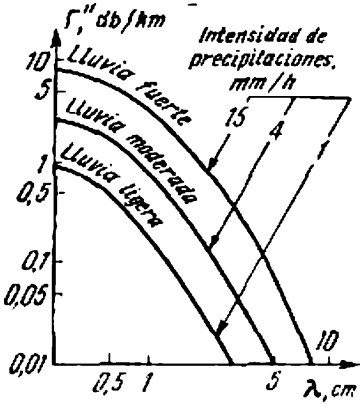


Fig. 60.4

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m^- &= -\dot{\vartheta}_0 R^3 \frac{\dot{\varepsilon}-\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}+2\varepsilon_0} k_0^2 \dot{E}_m^0 \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r} e^{-ik_0 r} \\ \dot{E}_m^+ &= \frac{3\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}+2\varepsilon_0} \dot{E}_m^0, \end{aligned}\right\} \qquad (60.5)$$

siendo $\dot{\varepsilon}$ la constante dieléctrica compleja del agua y la potencia que se absorbe,

$$\overline{P}_{ab} = \frac{1}{2}\omega\varepsilon''(E_m^+)^2 V = \frac{2\pi R^3}{3}\omega\varepsilon''(E_m^+)^2$$

(§ 30, punto 2).

En un sistema de gotas, la difracción es múltiple: el campo de dispersión de cada uno de los objetos difracta en los demás.

[1] Más adelante (§ 88), al estudiar las líneas de radiocomunicación de ondas ultracortas, se indicarán también otras causas de la dispersión de ondas de radio.

Se crea absorción complementaria. Por su parte, la dispersión no absorbida toma energía de la onda que se propaga, provocando radiación en "diferentes direcciones". De las (60.5) podemos con facilidad deducir que la atenuación de la onda que se transmite debe aumentar al ser ésta más corta (el factor k_0^2 en el primer

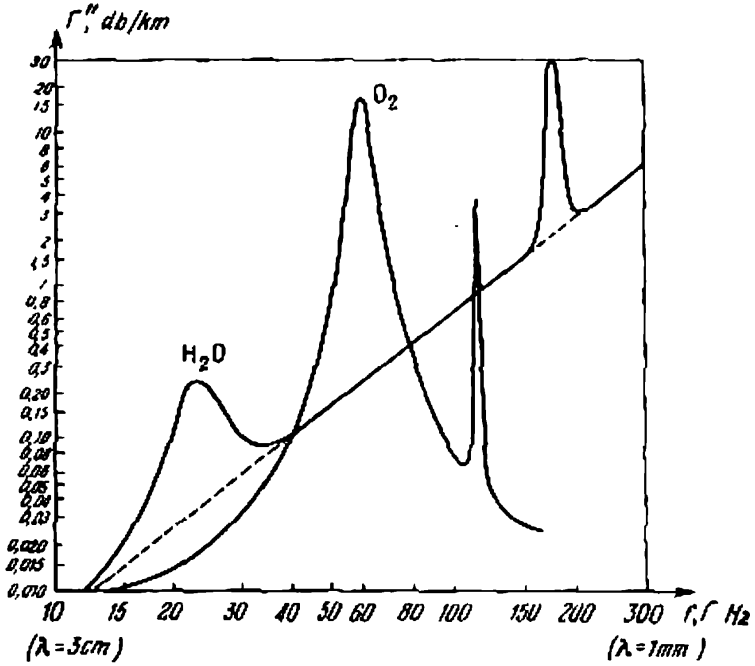


Fig. 60.5.

renglón). Efectivamente, este hecho se confirma experimentalmente. La atenuación se describe por medio del factor exponencial $e^{-\Gamma'' r}$. Según los datos de las mediciones, el coeficiente de atenuación Γ'' varía en dependencia de la longitud de onda y la intensidad de las precipitaciones atmosféricas, como se muestra en la fig. 60.4 [F.5].

Además de lo indicado, es importante la atenuación de ondas de radio a causa de la absorción molecular por resonancia por los gases de la troposfera. En la fig. 60.5 se representan las correspondientes dependencias de Γ'' para el oxígeno y los vapores de agua [F.5].

Capítulo 5

Ondas guiadas y campos en volúmenes limitados

1. Teoría general de ondas guiadas

Al describir en el § 39 los procesos ondulatorios en las superficies planas de separación de medios, se introdujo el concepto de *onda guiada*. Podemos decir que una superficie divisora que refleja totalmente tiene la propiedad de dirigir el movimiento de la energía electromagnética. En este caso, el campo posee el carácter de una *onda plana no homogénea* que se propaga a lo largo de la superficie de separación: dicho campo está distribuido irregularmente por el plano del frente. Esta es una onda guiada por la superficie de separación.

En el § 39 (punto 2—4) ya consideramos los más sencillos objetos donde pueden existir ondas guiadas que fueron representados como sistemas formados por planos paralelos conductores ideales y una capa dieléctrica. En general, *sistemas de guiado* o bien *guías de onda* (en el más extenso sentido de estas palabras) son todas las líneas de transmisión de energía electromagnética, ya que el propio proceso de transmisión, significa propagación de una onda. Anteriormente ya señalamos que incluso en condiciones naturales, se crean sistemas de guiado (§ 42, punto 3, § 60, punto 1).

Ciertas líneas de transmisión ampliamente divulgadas, se representan esquemáticamente en la fig. 61.1. Por ejemplo, una línea bifilar (*a*), coaxial (*b*), de banda (*c*, *d*), guías de onda huecas: rectangular (*e*) y circular (*f*), guía de ondas circular dieléctrico (*g*), guía de onda de Goubau (*h*). Sobre estos dispositivos, así como sobre ciertos otros, se tratará más adelante con todo detalle.

Pero nuestra más próxima tarea, es esclarecer las propiedades generales de las ondas guiadas libres.

§ 61. Estructura de los campos y tipos de ondas planas no homogéneas

1. Descripción general de una onda guiada. Cualquiera de los sistemas mostrados en la fig. 61.1 es longitudinalmente homogéneo, es decir, sus propiedades físicas no varían en una dirección rectilínea que designaremos por z; más adelante, vamos precisamente a considerar tales sistemas de guiado.

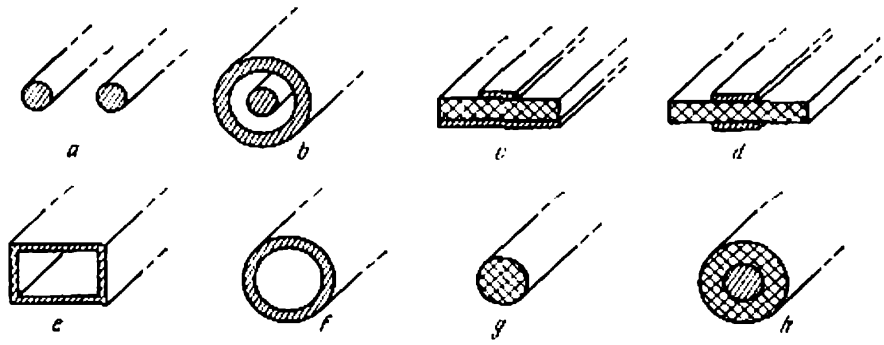


Fig. 61.1.

Supongamos que en la dirección z escogida naturalmente, se propaga cierto proceso electromagnético en forma de una onda libre armónica. ¿En qué debe diferenciarse éste del sencillo proceso monodimensional descrito en los §§ 32, 33? Primeramente, porque en virtud de que el sistema no es homogéneo transversalmente, el campo ya no puede quedar invariable en el plano $z = \text{const}$ y en las ecuaciones de electrodinámica no se puede tomar de antemano $\partial/\partial x = 0$, $\partial/\partial y = 0$. Efectivamente, en ninguno de los sistemas representados (fig. 61.1) puede existir un campo transversalmente homogéneo, ya que las condiciones límites no se satisfarían en la superficie del conductor o dieléctrico. Luego no hay ninguna razón para suponer que la velocidad de fase y la atenuación de onda serán infaliblemente iguales a las que observaríamos en un proceso monodimensional. No conociendo con anticipación el número de onda complejo, designémoslo por $\dot{\Gamma}$ (en diferencia de la magnitud $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ que se determina por la fórmula (33.1)). De este modo, vamos a partir de la expresrón general del campo de una *onda plana no homogénea* y escribir las amplitudes complejas de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ en la forma

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \dot{\mathcal{E}}(x, y)e^{-i\dot{\Gamma}z}, \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m = \dot{\mathcal{H}}(x, y)e^{-i\dot{\Gamma}z}, \qquad (61.1)$$

siendo $\dot{\mathcal{E}}(x, y)$ y $\dot{\mathcal{H}}(x, y)$ funciones que caracterizan la distribución del campo en la sección transversal. Indiquemos que por lo general,

llamamos a $\dot{\Gamma}$ *constante de propagación*, así como *número de onda longitudinal*.

Por analogía con las (33.2), (33.6), introducimos las designaciones

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'', \quad \Gamma' = \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{\omega}{v_f}, \tag{61.2}$$

donde el sentido de las magnitudes sigue siendo el mismo: Γ'' es el coeficiente de atenuación; Λ la longitud de onda y v_f, su velocidad de fase. En particular, cuando $\dot{\Gamma}$ es una magnitud real ($\Gamma'' = 0$, $\Gamma' = \Gamma$), $\Gamma = \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{\omega}{v_f}$; en este caso, la longitud de onda Λ es el período espacial del proceso.

Es preciso subrayar que la dependencia de las magnitudes $\dot{\mathcal{E}}$ y $\dot{\mathcal{H}}$ de las coordenadas transversales significa, en el caso general, la inconstancia para $z = \text{const}$ no sólo de las amplitudes de los vectores del campo, sino que también de sus fases. Así, pues, una onda plana de tipo general (61.1) tiene cierta distribución de fase fijada en el plano del frente que ya no puede ser determinada como la superficie de fase constante. Esta es una superficie donde se conserva la distribución de fase inicial. Por cierto, en la mayoría de los casos vamos a considerar los procesos ondulatorios que se caracterizan si $z = \text{const}$ por la constancia de fase (un ejemplo de otro género se expone en la pág. 424).

Como lo hicimos en el § 32, tomemos las ecuaciones homogéneas de Helmholtz (29.20) y (29.21) que son válidas para medios homogéneos; por ejemplo, detengámonos en la segunda de ellas. Haciendo uso del operador de Laplace ∇^2 respecto a $\dot{E}_m$ de la (61.1), se tiene

$$\nabla^2 \dot{E}_m = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \dot{E}_m = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \dot{E}_m - \dot{\Gamma}^2 \dot{E}_m =$$
$$\nabla_\perp^2 \dot{E}_m - \dot{\Gamma}^2 \dot{E}_m = e^{-i\Gamma z} (\nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{E}} - \dot{\Gamma}^2 \dot{\mathcal{E}}),$$

siendo $\nabla_\perp^2$ el operador de Laplace en el plano $z = \text{const}$. Introduzcamos también la magnitud

$$\dot{\chi}^2 = \dot{k}^2 - \dot{\Gamma}^2, \tag{61.3}$$

que denominan *número de onda transversal*. Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, de la ecuación (29.21) obtenemos la siguiente ecuación bidemensional:

$$\nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{E}} + \dot{\chi}^2 \dot{\mathcal{E}} = 0. \tag{61.4}$$

De idéntico modo, de la (29.20) se desprende:

$$\nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{H}} + \dot{\chi}^2 \dot{\mathcal{H}} = 0. \tag{61.5}$$

Las ecuaciones bidimensionales vectoriales de Helmholtz (61.4) y (61.5) se emplean al estudiar ondas planas no homogéneas.

2. **Componentes del campo.** Si luego deseamos investigar la relación entre diversas componentes de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ de una

onda plana no homogénea, haremos uso de las ecuaciones de Maxwell. Introduciendo en las (29.11) para $\dot{j}_m^{ex} = 0$ las expresiones de $\dot{E}_m$ y $\dot{H}_m$ de las (61.1), se tiene:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} + i\dot{\Gamma}\dot{\mathcal{E}}_y = -i\omega\dot{\mu}\dot{\mathcal{H}}_x, \\ &i\dot{\Gamma}\dot{\mathcal{E}}_x + \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} = i\omega\dot{\mu}\dot{\mathcal{H}}_y, \\ &\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_x}{\partial y} = -i\omega\dot{\mu}\dot{\mathcal{H}}_z, \end{aligned}\right| \quad \left|\begin{aligned} &\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y} + i\dot{\Gamma}\dot{\mathcal{H}}_y = i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\mathcal{E}}_x, \\ &i\dot{\Gamma}\dot{\mathcal{H}}_x + \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x} = -i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\mathcal{E}}_y, \\ &\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_x}{\partial y} = i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\mathcal{E}}_z. \end{aligned}\right| \qquad (61.6)$$

Una importante particularidad de las ecuaciones (61.6), es que las componentes transversales $\dot{\mathcal{E}}_x$, $\dot{\mathcal{E}}_y$, $\dot{\mathcal{H}}_x$ y $\dot{\mathcal{H}}_y$ pueden expresarse por medio de las longitudinales, es decir, $\dot{\mathcal{E}}_z$ y $\dot{\mathcal{H}}_z$. Efectivamente, el primer renglón en la columna izquierda y el segundo en la derecha, forman un sistema de ecuaciones lineales algebráicas respecto a $\dot{\mathcal{E}}_y$ y $\dot{\mathcal{H}}_x$, mientras que el segundo renglón en la columna izquierda y el primero en la derecha, forman un sistema idéntico respecto a $\dot{\mathcal{E}}_x$ y $\dot{\mathcal{H}}_y$. Escribamos las soluciones de dichos sistemas haciendo uso de la designación (61.3):

$$\dot{\mathcal{E}}_x = \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2}\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} - \frac{i\omega\dot{\mu}}{\dot{\chi}^2}\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y}, \quad \dot{\mathcal{H}}_x = \frac{i\omega\dot{\varepsilon}}{\dot{\chi}^2}\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} - \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2}\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x}, \qquad (61.7)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_y = -\frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2}\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} + \frac{i\omega\dot{\mu}}{\dot{\chi}^2}\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x}, \quad \dot{\mathcal{H}}_y = -\frac{i\omega\dot{\varepsilon}}{\dot{\chi}^2}\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} - \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2}\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y}.$$

Podemos dar a las expresiones obtenidas un aspecto más compacto. Designando las partes transversales de los vectores $\dot{\mathcal{E}}$ y $\dot{\mathcal{H}}$ por los símbolos $\dot{\mathcal{E}}_t$ y $\dot{\mathcal{H}}_t$:

$$\dot{\mathcal{E}}_t = x_0\dot{\mathcal{E}}_x + y_0\dot{\mathcal{E}}_y, \quad \dot{\mathcal{H}}_t = x_0\dot{\mathcal{H}}_x + y_0\dot{\mathcal{H}}_y, \qquad (61.8)$$

y teniendo en cuenta las fórmulas (S1.6) y (S1.20), se halla

$$\dot{\mathcal{E}}_t = -\frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2}\nabla_\perp \dot{\mathcal{E}}_z - \frac{i\omega\dot{\mu}}{\dot{\chi}^2}\operatorname{rot}_\perp \dot{\mathcal{H}}_z, \quad \dot{\mathcal{H}}_t = \frac{i\omega\dot{\varepsilon}}{\dot{\chi}^2}\operatorname{rot}_\perp \dot{\mathcal{E}}_z - \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2}\nabla_\perp \dot{\mathcal{H}}_z \qquad (61.9)$$

(el símbolo $\perp$ significa, como anteriormente, que la operación se verifica por coordenadas ubicadas en el plano $z = \text{const}$).

Las expresiones (61.9) son también cómodas, ya que conservan su sentido con cualquier sistema de coordenadas «cilíndrico generalizado» q_1, q_2, z, es decir, al emplear en el plano transversal $z = \text{const}$ toda clase de coordenadas curvilíneas ortogonales q_1, q_2. Para escribir las (61.9) en uno u otro sistema concreto de coordenadas curvilíneas, es preciso emplear las fórmulas (S1.7) y (S1.21) poniendo en ellas las coordenadas necesarias y los coeficientes de Lamer. Al tratarse de coordenadas cilíndricas corrientes, hay que

como es lógico, aplicar directamente las fórmulas (S1.8) y (S1.22). Así haremos al considerar ciertos sistemas de guiado (§§ 65, 66).

3. **Clasificación de las ondas.** Como se desprende de las (61.7), así como de las (61.9), las componentes transversales del campo de una onda plana no homogénea se forman de dos partes, una de las cuales se reduce a cero junto con $\dot{\mathcal{E}}_z$ y la otra, con $\dot{\mathcal{H}}_z$.

Una clase particular de las ondas planas, la forman aquellas que no tienen componente magnética longitudinal ($H_z = 0$). Éstas son las llamadas ondas del *tipo E* ("ondas eléctricas") o bien, como también suelen llamarlas, *ondas del tipo TM* ("ondas transversalmente magnéticas). Haciendo en las (61.9) $\dot{\mathcal{H}}_z = 0$ y teniendo en cuenta las (61.1), escribimos las expresiones de las amplitudes complejas de los vectores del campo para las ondas de este tipo:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= \left(\dot{\mathcal{E}}_z - \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2}\nabla_\perp \dot{\mathcal{E}}_z\right) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_m &= \frac{i\omega\dot{\varepsilon}}{\dot{\chi}^2}\operatorname{rot}_\perp \dot{\mathcal{E}}_z e^{-i\dot{\Gamma}z} = \frac{i\omega\dot{\varepsilon}}{\dot{\chi}^2}[\nabla_\perp \dot{\mathcal{E}}_z,\ z_0] e^{-i\dot{\Gamma}z}. \end{aligned}\right\} \qquad (61.10)$$

Otra clase particular se forma por las ondas sin componente eléctrica longitudinal ($E_z = 0$), llamadas *ondas del tipo H* o bien, *TE* (es decir, respectivamente "ondas magnéticas" o bien, "transversalmente eléctricas"). Tomando en las (61.9) $\dot{\mathcal{E}}_z = 0$, en este caso, tenemos que

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= -\frac{i\omega\dot{\mu}}{\dot{\chi}^2}\operatorname{rot}_\perp \dot{\mathcal{H}}_z e^{-i\dot{\Gamma}z} = \\ &= -\frac{i\omega\dot{\mu}}{\dot{\chi}^2}[\nabla_\perp \dot{\mathcal{H}}_z,\ z_0] e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_m &= \left(\dot{\mathcal{H}}_z - \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2}\nabla_\perp \dot{\mathcal{H}}_z\right) e^{-i\dot{\Gamma}z}. \end{aligned}\right\} \qquad (61.11)$$

En la tercera clase particular se incluyen las ondas puramente transversales ($E_z = 0$ y $H_z = 0$), las que se llaman ondas de *tipo TEM* (es decir, "transversalmente electromagnéticas"). De las (61.7) o bien de las (61.9), se desprende que si $\dot{\mathcal{E}}_z = 0$ y $\dot{\mathcal{H}}_z = 0$, entonces, para $\dot{\chi}^2 \neq 0$, todas las componentes del campo se reducen a cero, lo que significa que las *ondas del tipo TEM* no pueden existir. Sin embargo, esta "prohibición" desaparece si $\dot{\chi}^2 = 0$, ya que las expresiones de todas las componentes transversales se convierten con todo en indeterminaciones del tipo 0/0. La igualdad a cero del número de onda transversal $\dot{\chi}$ es, por esta razón, la propiedad de todas las ondas del tipo *TEM*.

Es natural que a las ondas del tipo *TEM* pertenece la onda plana homogénea que se propaga en un medio homogéneo infinito ya estudiado anteriormente (§§ 32, 33). Las expresiones de sus

componentes corresponden al caso, cuando en las (61.1) $\dot{\mathcal{E}} = \text{const}$, $\dot{\mathcal{H}} = \text{const}$ y $\dot{\Gamma} = \dot{k}$; en virtud de la (61.3), la última igualdad asegura la reducción a cero del número de onda transversal.

El campo de una onda del tipo *TEM* puede ser considerado como el caso límite del campo de una onda del tipo *E* para $E_z \to 0$, $\dot{\chi} \to 0$ o de una onda de tipo *H* para $H_z \to 0$, $\dot{\chi} \to 0$. Por esta razón, para las ondas *TEM*, en virtud de (61.10) y (61.11)

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= \nabla_\perp \varphi e^{-i\dot{k}z} \\ \dot{H}_m &= \sqrt{\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\mu}}}\,[z_0,\ \nabla_\perp \varphi]\, e^{-i\dot{k}z}, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= \sqrt{\frac{\dot{\mu}}{\dot{\varepsilon}}}\,[\nabla_\perp \psi,\ z_0]\, e^{-i\dot{k}z}, \\ \dot{H}_m &= \nabla_\perp \psi e^{-i\dot{k}z}, \end{aligned}\right\} \tag{61.12}$$

siendo $\varphi = \lim_{\dot{\mathcal{E}}_z \to 0,\ \dot{\chi} \to 0} \frac{-i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \dot{\mathcal{E}}_z$ y

$$\psi = \lim_{\dot{\mathcal{H}}_z \to 0,\ \dot{\chi} \to 0} \frac{-i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \dot{\mathcal{H}}_z.$$

En conclusión, señalemos que las ondas planas no homogéneas de tipo general que tienen ambas componentes longitudinales ($E_z \neq 0$ y $H_z \neq 0$), se llaman *ondas de los tipos EH y HE*.

§ 62. Particularidades principales de las ondas guiadas

1. Ondas *TEM*. Vamos a comenzar el estudio de las particularidades de diversas ondas guiadas por las del tipo *TEM*.

Se señaló que la propiedad precisa de ondas de este tipo es la igualdad a cero del número de onda transversal; por esto en virtud de (61.3), el número longitudinal de onda resulta ser igual al de una onda plana homogénea:

$$\dot{\chi} = 0; \quad \dot{\Gamma} = \dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}. \tag{62.1}$$

Esto significa que también quedarán invariables la velocidad de fase y la longitud de onda:

$$v_f = \frac{1}{\operatorname{Re} \sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}}, \quad \Lambda = \lambda, \tag{62.1a}$$

es decir, en particular sin absorción en el medio, $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Siendo extremadamente sencilla, la expresión (62.1) nos permite, no obstante, llegar a una interesante deducción. Subrayemos, que $\dot{\Gamma}$ sólo puede ser una magnitud constante (ya que de otra forma la ecuación $\dot{\Gamma} z = \text{const}$ no definiría el plano de la sección transversal) y, lógicamente, esto se tuvo en cuenta anteriormente al efectuar

todas las operaciones. Pero al mismo tiempo, en virtud de que cualquier sistema de guiado no es homogéneo transversalmente, $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\mu}$ varían en el plano $z = \text{const}$. Por ejemplo, al considerar la guía de ondas dieléctrica (fig. 61.1, *g*), la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética tienen un valor en el interior del vástago y otro fuera de él, de modo que no hay una magnitud $\dot{\Gamma} = \dot{k}$ constante (62.1) y, por consiguiente, no puede existir una onda *TEM*. Si hubiéramos supuesto que son posibles dos diferentes valores de $\dot{\Gamma}$ para el interior y exterior del vástago, entonces, se trataría de dos diferentes ondas, siendo la existencia de tales imposible, ya que a diferentes dependencias respecto a *z* los campos interior y exterior no satisfacen, inevitablemente, las condiciones límites en la superficie del vástago. En esencia, todo lo anteriormente dicho se refiere no sólo a la guia de ondas dieléctrica, sino que a todos los sistemas de guiado (fig. 61.1) y, por lo tanto, es lógica la deducción de que en condiciones reales las ondas *TEM* guiadas no pueden existir.

Otra cosa son los sistemas con medio homogéneo contorneado por un conductor ideal: en su interior no debe haber campo, e hipotéticamente, las ondas se propagarán en una región en la que $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\mu}$ son constantes; no puede ser excluido el caso de que entre ellas haya ondas *TEM*. Pero como ya hemos señalado reiteradamente, los metales reales, desde un punto de vista electrodinámico, son muy próximos a conductores ideales. Al haber fronteras metálicas, los campos divergen insignificantemente de aquellos que habría si las fronteras fueran de conducción ideal. Por esta razón, es natural esperar que, por lo menos, en ciertos sistemas metálicos de guiado con dieléctrico homogéneo, es posible la presencia de ondas que pueden prácticamente considerarse *TEM* ($E_z \approx 0$, $H_z \approx 0$). Al tomar cualquier sistema concreto de esta clase, bien sea una guia de ondas rectangular (fig. 61.1, *e*) o bien, una línea coaxial (fig. 61.1, *b*), sólo hay que esclarecer pueden o no existir en ella "verdaderas" ondas *TEM* ($E_z = 0$, $H_z = 0$) cuando el conductor es ideal ($\sigma \to \infty$).

De modo que vamos a tratar de hallar las condiciones para la existencia de ondas *TEM* en sistemas idealizados. Dirigiéndonos a las ecuaciones (61.4) y (61.5), vemos que las ondas de esta clase, en virtud de la exigencia obligatoria (62.1), degeneran en las ecuaciones bidimensionales de Laplace

$$\nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{E}} = 0 \tag{62.2}$$

y

$$\nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{H}} = 0. \tag{62.3}$$

Esto es un hecho curioso, ya que del § 14, punto 4, así como del § 21, punto 1, se desprende que las ecuaciones vectoriales de Laplace describen campos estacionarios (constantes respecto al tiempo).

Examinando uno u otro sistema de guiado con medio homogéneo dieléctrico y conductor ideal, se puede establecer con facilidad si es posible la existencia en tal sistema de un campo electrostático $\boldsymbol{E}_0$ y un campo magnético estacionario $\boldsymbol{H}_0$ que no varien por el eje z. La respuesta positiva a esta cuestión significa que hay soluciones de las ecuaciones $\nabla_\perp^2 \boldsymbol{E}_0 = 0$ y $\nabla_\perp^2 \boldsymbol{H}_0 = 0$ para las mismas condiciones límites que se imponen a $\dot{\mathcal{E}}$ y $\dot{\mathcal{H}}$ en las (62.2) y (62.3). Por esta causa, existen soluciones de $\dot{\mathcal{E}}$ y $\dot{\mathcal{H}}$ que respectivamente coinciden con $\boldsymbol{E}_0$ y $\boldsymbol{H}_0$ (con una exactitud de hasta el coeficiente constante) y, por consiguiente, en el sistema de guiado dado puede propagarse una onda TEM, cuya estructura transversal repite estos campos estacionarios. Si, por el contrario, en el sistema no es posible la existencia de los campos estacionarios $\boldsymbol{E}_0$ y $\boldsymbol{H}_0$, en él no podrán tampoco propagarse las ondas TEM.

Ahora, ya podemos afirmar que en una línea coaxial idealizada ($\sigma \to \infty$) (fig. 61.1, *b*) puede propagarse una onda TEM, cuyo campo eléctrico tenga en la sección transversal una estructura igual a la del campo del condensador coaxial (§ 17, punto 6) y la estructura transversal del campo magnético, como la tendría con corriente continua (§ 24, punto 1). De modo semejante se debe, por ejemplo, caracterizar la línea bifilar de la (fig. 61.1, *a*). Pero en las guías de onda huecas (figs. 61.1, *e*, 61.1, f) no es posible la existencia de las ondas TEM, lo mismo que los campos estacionarios $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ (§ 17, punto 5, § 24, punto 1).

Por fin, retornemos a las fórmulas (61.12) que, en virtud de lo anteriormente expuesto, es fácil precisar. Tomando como lo debido que los vectores $\dot{\mathcal{E}}$ y $\dot{\mathcal{H}}$ son potenciales: $\dot{\mathcal{E}} = \nabla_\perp \varphi$ y $\dot{\mathcal{H}} = \nabla_\perp \psi$, formulemos los problemas de contorno que tienen como soluciones φ y ψ (compárese con el § 14, punto 3 y § 21, punto 1). Sea

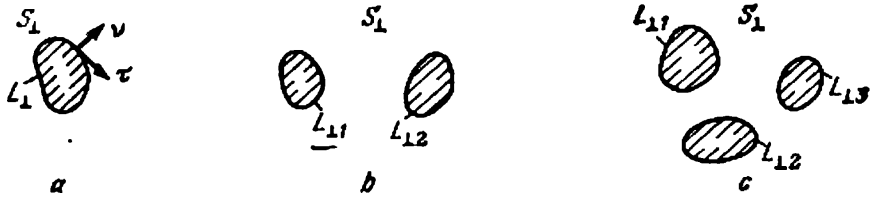


Fig. 62.1.

que $S_\perp$ con el contorno $L_\perp$ es la sección transversal de un sistema de guiado (con exactitud, de la región de dicho sistema donde existe el campo); para sistemas abiertos, la región $S_\perp$ es infinita (fig. 62.1, *a*, *b*, *c*), con una sección transversal múltiplemente conexa el contorno $L_\perp$ se descompone en varias partes: $L_\perp = L_{\perp 1} + L_{\perp 2} + \ldots + L_{\perp N}$ (fig. 62.1, *b*, *c* y 62.2, *b*, *c*). Como $\dot{\mathcal{E}}_\tau = \partial\varphi/\partial\tau$ y $\dot{\mathcal{H}}_\nu = \partial\psi/\partial\nu$, obtenemos los siguientes problemas de

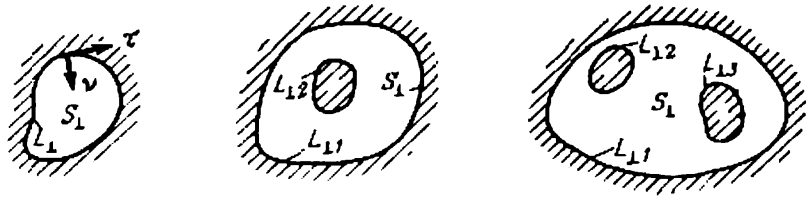
Dirichlet y Neiman (véase el suplemento 5, punto 2):

$$\left.\begin{array}{l} \nabla_{\perp}^2 \varphi = 0 \text{ en } S_{\perp}, \\ \varphi = C_i \text{ en } L_i \end{array}\right\} \tag{62.4}$$

(C_i es una constante) y

$$\left.\begin{array}{l} \nabla_{\perp}^2 \psi = 0 \text{ en } S_{\perp}, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \text{ en } L. \end{array}\right\} \tag{62.5}$$

Investigándolos, se puede mostrar que en el sistema simplemente conexo apantallado (fig. 62.2, *a*) realmente no hay ondas *TEM*,



a *b* *c*

Fig. 62.2.

mientras que en todos los sistemas N-ésimamente conexos ($N > 1$) pueden existir $N-1$ diferentes ondas *TEM*, es decir, una onda en los casos mostrados en las figs. 62.1, *a*, y 62.2, *b* y dos ondas en los de las figs. 62.1, *b* y 62.2, *c*; con mayor detalle, véase el § 66, punto 4.

En conclusión, señalemos que las expresiones (61.12) certifican la mutua perpendicularidad de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ de la onda *TEM*, así como la constancia de las relaciones de sus amplitudes complejas en todo plano $z = \text{const}$. Esta última propiedad se denomina *impedancia de onda* designándola por W. De las (61.12) se desprende que

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = W [\dot{\boldsymbol{H}}_m, \boldsymbol{z}_0], \quad W = \sqrt{\mu/\varepsilon}. \tag{62.6}$$

Este mismo sentido e igual magnitud tiene, como sabemos, la impedancia de onda en el caso de onda plana homogénea (§§ 32, 33).

2. Ondas rápidas E y H. Llamamos ondas *rápidas* (en el medio dado) aquellas que se propagan en cierto medio homogéneo con velocidad de fase mayor que la de onda *TEM* en dicho medio. De este modo, cuando se trata de ondas rápidas,

$$\Gamma = ik', \quad v_f > v = 1/\operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{62.7}$$

y, en caso particular, al no haber absorción $\Gamma < k$ y $v_f > 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Podemos demostrar que las ondas rápidas deben ser las ondas E y H en sistemas de guiado limitados totalmente (apantallados) por una cubierta de conducción ideal, es decir, para la configuración

de una guia de onda hueca (fig. 61.1, *e*, *f*), línea coaxial (fig. 61.1, *b*), etc. (fig. 62.2, *a*, *b*, *c*). A esta relación podemos incluir el sistema de planos de conducción ideal tratados en el § 39, punto 2.

Sea dado un sistema idealizado ($\sigma \to \infty$) con sección transversal simple o múltiplemente conexa (fig. 63.2, *a*, *b*, *c*) y que sea preciso estudiar sus ondas *E* y *H*. Como se desprende de las correlaciones (61.10) y (61.11), en ambos casos el campo se define completamente por una de las componentes longitudinales: $\dot{\mathcal{E}}_z$ o bien $\dot{\mathcal{H}}_z$. Por esta causa, hay que formular el problema para determinar dicha componente.

Al estudiar las ondas *E*, partiremos de la ecuación (61.4) que proyectamos en el eje *z* teniendo en cuenta que $(\nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{E}})_z = \nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{E}}_z$. De este modo, se tiene el siguiente problema de contorno:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{E}}_z + \dot{\chi}^2 \dot{\mathcal{E}}_z = 0 \quad &\text{en} \quad S_\perp, \\ \dot{\mathcal{E}}_z = 0 \quad &\text{en} \quad L_\perp \end{aligned}\right| \tag{62.8}$$

(en la superficie de un conductor ideal $E_\tau = 0$). Esto resulta ser no otra cosa que el primer problema de contorno del tipo (S5.27) para la ecuación bidimensional de Helmholtz. Escribiendo la fórmula (S5.31) para el problema (62.8), se obtiene

$$\dot{\chi}^2 = \frac{\int\limits_{S_\perp} |\nabla_\perp \dot{\mathcal{E}}_z|^2 \, ds}{\int\limits_{S_\perp} |\dot{\mathcal{E}}_z|^2 \, ds} \geqslant 0, \tag{62.9}$$

siendo el resultado nulo sólo en el caso límite de ondas *TEM*. Es decir, para las ondas *E*

$$\dot{\chi}^2 \geqslant 0, \tag{62.10}$$

o sea, que el número de onda transversal $\dot{\chi} = \chi$ es una magnitud *real*.

Pasando al caso de ondas *H*, debemos formular el problema de contorno respecto a $\dot{\mathcal{H}}_z$. Con este objeto, primeramente, es preciso deducir la condición de frontera correspondiente.

Fijando un punto arbitrario de la superficie divisora conductora ideal del sistema direccional, tomamos las coordenadas curvilíneas τ, ν (fig. 62.2) como coordenadas cartesianas locales *x*, *y* y basándonos en esto, escribimos el primer renglón de la segunda columna de la ecuación (61.1) en la forma

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial \nu} + i\dot{\Gamma} \dot{\mathcal{H}}_\nu = i\omega\dot{\varepsilon} \dot{\mathcal{E}}_\tau.$$

Pero como en la superficie de un cuerpo conductor ideal $E_\tau = 0$ y $B_\nu = 0$, en la igualdad anterior $\dot{\mathcal{E}}_\tau = 0$ y $\dot{\mathcal{H}}_\nu = 0$, y dor lo tanto

$$\partial \dot{\mathcal{H}}_z / \partial \nu = 0. \tag{62.11}$$

Esta es, precisamente, la condición límite que necesitamos.

De tal modo, proyectando la (61.5) en el eje z obtenemos el siguiente problema de contorno:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{H}}_z + \dot{\chi}^2 \dot{\mathcal{H}}_z = 0 \quad &\text{en} \quad S_\perp, \\ \partial \dot{\mathcal{H}}_z / \partial \nu = 0 \quad &\text{en} \quad L_\perp, \end{aligned}\right\} \tag{62.12}$$

es decir, el segundo problema de contorno del tipo (S5.28) para la ecuación bidimensional de Helmholtz. Concretizando la fórmula (S5.31), escribimos:

$$\dot{\chi}^2 = \frac{\int\limits_{S_\perp} |\nabla_\perp \dot{\mathcal{H}}_z|^2 ds}{\int\limits_{S_\perp} |\dot{\mathcal{H}}_z|^2 ds} \geqslant 0, \tag{62.13}$$

y como el resultado nulo sólo se tendrá en el caso límite de onda *TEM*, para las ondas H se cumplirá la desigualdad (62.10).

Teniendo en cuenta la (62.10) es fácil verificar la validez de las desigualdades (62.7). Por ejemplo, sin absorción (la magnitud real $\dot{k}^2 = k^2$) nos convencemos inmediatamente que $\dot{\Gamma} = \sqrt{k^2 - \chi^2} < k^2$, es decir, efectivamente, las ondas E y H son rápidas.

Los problemas de contorno (62.8) y (62.12), son *problemas de los valores propios* (véanse los ejemplos en el Suplemento 7). Las soluciones $\dot{\mathcal{E}}_z$ y $\dot{\mathcal{H}}_z$ forman los conjuntos infinitos $\{\dot{\mathcal{E}}_{zn}\}$ y $\{\dot{\mathcal{H}}_{zn}\}$, correspondiendo a cada uno de ellos un valor determinado del número transversal de onda $\dot{\chi} = \chi_n$, de modo que todas ellas pueden disponerse en forma de la sucesividad

$$0 < \chi_1^2 \leqslant \chi_2^2 \leqslant \ldots \leqslant \chi_n^2 \leqslant \ldots \tag{62.14}$$

Por esto existe una cantidad infinita de ondas E y H que, para determinadas condiciones, pueden propagarse en un sistema de guiado concreto (por ejemplo, en una guía de ondas hueca), teniendo constantes de propagación $\dot{\Gamma}_n = \sqrt{\dot{k}^2 - \chi_n^2}$.

Por último, retornando a las fórmulas (61.10) y (61.11), notemos que las componentes transversales de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ son perpendiculares entre sí tanto para las E-ondas como para las H-ondas. En ambos casos, las relaciones de sus amplitudes complejas son constantes y se denominan, respectivamente, impedancias de onda $\dot{W}^E$ y $\dot{W}^H$. Además

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{H}}_m &= \frac{1}{\dot{W}^E}[\boldsymbol{z}_0, \dot{\boldsymbol{E}}_m], \quad \dot{W}^E = \dot{\Gamma}/\omega\dot{\varepsilon} \quad (E\text{-onda}), \\ \dot{\boldsymbol{E}}_m &= \dot{W}^H[\dot{\boldsymbol{H}}_m, \boldsymbol{z}_0], \quad \dot{W}^H = \omega\dot{\mu}/\dot{\Gamma} \quad (H\text{-onda}). \end{aligned}\right\} \tag{62.15}$$

Sin absorción las impedancias de onda son reales si es real la constante de propagación; entonces, las fases de las componentes transversales de las intensidades del campo coinciden. En lo que

se refiere a las componentes longitudinales, como se desprende de las (61.10) y (61.11), están respecto a ellas desviadas por fase a 90° (siendo constante la fase en la sección transversal). Fácilmente podemos comprender que debido a esto en cualquier sentido transversal $\overline{\Pi} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}[\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] = 0$, es decir, el flujo de energía es, por término medio, igual a cero.

3. Dispersión de las ondas rápidas sin absorción. De tal modo, cuando los conductores guían idealmente, para las ondas E y H *rápidas en un medio homogéneo podemos, en virtud de las (61.3)* y (62.10), expresar el número de onda longitudinal por la fórmula

$$\dot{\Gamma} = \sqrt{k^2 - \chi^2}, \quad \chi^2 > 0. \tag{62.16}$$

Por el momento, vamos a considerar la propagación de una onda en un medio donde no hay absorción, así que $k^2 = k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$. Sea $f = \omega/2\pi$ la frecuencia del proceso electromagnético y $\lambda = 2\pi/k$ la longitud de una onda TEM plana homogénea que a la frecuencia indicada se propaga en un medio infinito con constante dieléctrica ε y permeabilidad magnética μ (las mismas que para el medio en el interior de un sistema de guiado). En ciertas ocasiones llaman a λ "longitud de trabajo de onda". Introduzcamos *los parámetros*

$$f_{\text{crit}} = \frac{\chi}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \text{y} \quad \lambda_{\text{crit}} = \frac{2\pi}{\chi}, \tag{62.17}$$

que, respectivamente, llamamos *frecuencia crítica (límite) y longitud crítica de onda*. Como en virtud de la (62.16)

$$\dot{\Gamma} = k\sqrt{1 - (\chi/k)^2},$$

ahora, podemos también escribir las siguientes expresiones del número de onda longitudinal:

$$\dot{\Gamma} = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{crit}}}{f}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{crit}}}\right)^2}. \tag{62.18}$$

Para $f > f_{\text{crit}}$ ($\lambda < \lambda_{\text{crit}}$), la constante de propagación $\dot{\Gamma}$ es real: $\Gamma'' = 0$ $\dot{\Gamma} = \Gamma'$; haciendo uso de las (62.1) podemos, en tal caso, con facilidad expresar *la velocidad de fase y la longitud de onda:*

$$v_f = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{crit}}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{crit}}}\right)^2}}, \quad f > f_{\text{crit}} \tag{62.19}$$

y

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{crit}}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{crit}}}\right)^2}}, \quad f > f_{\text{crit}} \tag{62.20}$$

Es extremadamente importante que los parámetros f_{crit} y λ_{crit}, junto con χ, son constantes para uno u otro tipo de un sistema de guiado concreto (por ejemplo, véase la fórmula (39.9) para el caso de un sistema de planos). Como vemos, la velocidad de fase de una onda guiada v_f y su longitud Λ, son funciones de la frecuencia. Aquí tropezamos con la *dispersión* de una onda (§ 35, punto 1) al no haber absorción.

A las frecuencias considerablemente mayores que la crítica ($f \gg f_{crit}$), es decir, para "longitudes de onda de trabajo" mucho más cortas que la crítica ($\lambda \ll \lambda_{crit}$), la constante de propagación de una onda guiada $\dot{\Gamma} = \Gamma$ se diferencia insignificantemente del número de onda k de una onda *TEM* homogénea; por esto son próximas las correspondientes velocidades de fase ($v_f \approx v$) y longitudes de onda ($\Lambda \approx \lambda$).

Al disminuir f (al aumentar λ), la velocidad de fase v_f y la longitud de onda Λ aumentan infinitamente a medida que f se aproxima a f_{crit} (λ a λ_{crit}). A continuación, (para $f < f_{crit}$; $\lambda > \lambda_{crit}$), la constante de propagación $\dot{\Gamma}$ se convierte en una magnitud puramente imaginaria:

$$\dot{\Gamma} = \pm ik\sqrt{(f_{crit}/f)^2 - 1}, \quad f < f_{crit}. \tag{62.21}$$

Tomando aquí el signo menos, se obtiene la dependencia longitudinal entre las amplitudes complejas de campo (61.1) en la siguiente forma

$$\left.\begin{aligned} e^{-i\dot{\Gamma}z} &= e^{-\Gamma'' z}, \\ \Gamma'' &= k\sqrt{(f_{crit}/f)^2 - 1} > 0 \end{aligned}\right\} f < f_{crit} \tag{62.22}$$

lo que significa el *decrecimiento exponencial a lo largo del eje z sin variación de la fase*. Así, por ejemplo,

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\,\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} e^{-i\dot{\Gamma}z} e^{i\omega t} = \mathrm{Re}\,\boldsymbol{\mathcal{E}} e^{i\varphi} e^{-\Gamma'' z} e^{i\omega t} = \boldsymbol{\mathcal{E}} e^{-\Gamma'' z}\cos(\omega t + \varphi),$$

siendo φ cierta fase constante inicial ($\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} e^{i\varphi}$). Hablando con propiedad, como el campo es en todo lugar cofásico, ésta no es ya una onda progresiva; suele decirse que cuando $f \to f_{crit}$ la onda "sufre un corte". Puesto que sin absorción ($\dot{\varepsilon} = \varepsilon$, $\dot{\mu} = \mu$) y siendo $\dot{\Gamma}$ puramente imaginario, las impedancias de onda también son puramente imaginarias, las componentes transversales de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ están desfasadas en 90°. A su vez, esto significa que el vector medio de Poynting se reduce a cero a lo largo del eje z: si $f < f_{crit}$ no hay transmisión de energía.

Luego, calculemos la velocidad de grupo (§ 35) de una onda rápida, tomando la fórmula (35.9) en la que, en virtud de las (61.2), k se sustituye por Γ:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{d\Gamma} = v\sqrt{1 - \left(\frac{f_{crit}}{f}\right)^2} = v\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{crit}}\right)^2}, \quad f > f_{crit}. \tag{62.23}$$

Así vemos que a la frecuencia crítica la velocidad de grupo se convierte en cero. Obsérvese que las fórmulas (62.19) y (62.23) nos llevan a la siguiente correlación:

$$v_f v_{gr} = v^2 = \text{const}. \qquad (62.24)$$

La dispersión de una onda rápida del tipo E o H en un sistema idealizado ($\sigma = \infty$), sin absorción en el medio interior ($k = k$), se caracteriza por la gráfica de las dependencias de $v_f(f)$ y $v_{gr}(f)$, confeccionada según las fórmulas (62.19) y (62.23) y que se representa en la fig. 62.3, *a*. En la fig. 62.3, *b* está también representada la dependencia entre la frecuencia y la razón Γ''/k y Γ'/k. Para $f < f^{\text{crít}}$ la constante Γ es imaginaria (línea de trazos) y tiende a $-i\infty$ cuando $f \to 0$, lo que corresponde al máximo valor del factor de amortiguamiento $\Gamma''_{\text{máx}} = \chi$.

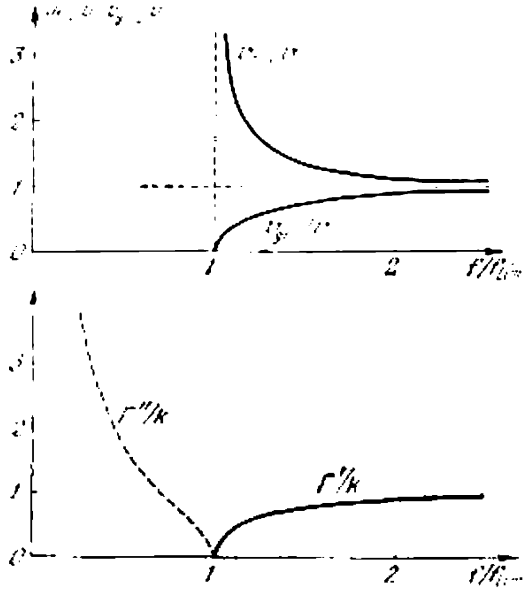


Fig. 62.3.

4. Ondas lentas. Las ondas cuyas velocidades de fase son menores de la velocidad de fase de las ondas TEM en un mismo medio, se denominan *lentas*. Para estas ondas

$$\Gamma'' \gg k', \quad v_f < v = 1/\mathrm{Re}\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}} \qquad (62.25)$$

(en particular, cuando no hay absorción $\Gamma \gg k$ y $v_f < 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

En el § 39, punto 3 fue mostrado que las ondas no homogéneas del tipo E y H que se crean al reflejarse totalmente una onda homogénea TEM en la superficie de separación de medios transparentes, son lentas respecto a aquel de los medios que es menos denso. El número de onda transversal χ_2 respectivo (39.21) es una magnitud puramente imaginaria, lo que determina el *carácter superficial* de la onda. Indiquemos también que χ_2 no es una constante (compárese con los puntos 2,3), sino una función de la frecuencia.

Estas singularidades resultan ser suficientemente generales para las ondas lentas de diversos tipos.

De la (61.3) se desprende que para una onda lenta, es decir, para la condición (62.25), y sin absorción, el número de onda transversal debe obligatoriamente ser puramente imaginario:

$$\dot{\chi}^2 = k^2 - \Gamma^2 < 0, \quad \dot{\chi} = \pm i\beta \quad (\beta > 0). \qquad (62.26)$$

Dado que tenemos cierto sistema de guiado abierto de modo que, en particular, el campo existe en el semiespacio $y < 0$ (fig. 62.4), con todo a lo largo del eje z se propaga una onda lenta del tipo E. Si podemos suponer que en el sentido transversal x, a lo largo de la superficie de separación $y = 0$, el campo queda invariable ($\partial/\partial x = 0$), entonces, la ecuación (61.5) toma el aspecto

$$\frac{d^2\dot{\mathcal{H}}}{dy^2} - \beta^2\dot{\mathcal{H}} = 0, \qquad (62.27)$$

donde $\dot{\chi}^2$, según la (62.26), ha sido sustituido por $-\beta^2$. Su solución general (en forma escalar), será

$$\dot{\mathcal{H}} = \dot{A}e^{-\beta y} + \dot{B}e^{\beta y} \quad (\beta > 0).$$

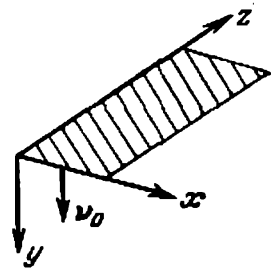


Fig. 62.4.

Pero de acuerdo con el contenido físico del problema, aquí hay que hacer $\dot{A} = 0$ (el campo no puede crecer infinitamente al alejarse del sistema de guiado, $y < 0$), así que

$$\dot{\mathcal{H}} = \dot{B}e^{\beta y} \quad (\beta > 0,\ y < 0). \qquad (62.28)$$

De esa manera, se trata del campo de una onda *superficial* guiada que decrece exponencialmente en dirección transversal $-y$.

Del último renglón de la segunda columna del (61.6) obtenemos inmediatamente

$$-\beta\dot{\mathcal{H}}_x = i\omega\varepsilon\dot{\mathcal{E}}_z, \qquad (62.29)$$

pero, como se desprende del tercer renglón de la primera columna del (61.6), $\dot{\mathcal{E}}_x = 0$ y, por lo tanto, $\dot{E}_{mz}$ y $\dot{H}_{mz}$ son las proyecciones de los vectores $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ en el plano $y = 0$. Designándolos por $\dot{E}^S_m$ y $\dot{H}^S_m$, en virtud de la (62.29), escribamos:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}^S_m / \dot{H}^S_m &= \dot{z}_S, \\ \dot{\boldsymbol{E}}^S_m &= \dot{z}_S [\dot{\boldsymbol{H}}^S_m, \mathbf{v}_0], \end{aligned}\right| \quad \dot{z}_S = i\frac{\beta}{\omega\varepsilon} \qquad (62.30)$$

($\mathbf{v}_0 = +\mathbf{y}_0$ es el vector unitario de la normal interior a la superficie de separación del sistema de guiado $y < 0$). Llamemos a $\dot{z}_S$ *impedancia superficial* de la superficie de separación. Pero como $\beta/\omega\varepsilon$ es una magnitud positiva, podemos decir que la impedancia tiene carácter "inductivo".

La onda superficial considerada puede existir si a causa de determinadas condiciones físicas en el interior del sistema de guiado ($y < 0$), el plano $y = 0$ tiene tal impedancia, es decir, se crea la correlación necesaria de las componentes tangenciales $\dot{E}^S_m$ y $\dot{H}^S_m$. Tales condiciones se proporcionan, por ejemplo, en la superficie de separación de la capa dieléctrica considerada en el § 39, punto 4 al haber polarización vertical. Esta circunstancia se deja que la

compruebe el lector, así como que investigue independientemente en este mismo sentido el caso de polarización horizontal, cuando la onda guiada es del tipo H.

Las ondas lentas de diferentes clases y, en particular, aquellas que tienen las dos componentes longitudinales, se describirán en el § 67.

§ 63. Transmisión de energía y ondas al haber absorción

1. Transmisión de energía. La potencia media de una onda guiada se calcula como el flujo del vector medio de Poynting $\overline{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]$ por la sección transversal del sistema $S_\perp$:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int\limits_{S_\perp} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] ds = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int\limits_{S_\perp} [\dot{E}_{mt}, \dot{H}_{mt}^*] ds \qquad (63.1)$$

(para los sistemas abiertos la región $S_\perp$ es infinita). La anterior expresión para sistemas con medio homogéneo puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{W}^{(E,\ H)} \int\limits_{S_\perp} \dot{H}_{mt}^2 ds = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{\dot{W}^{(E,\ H)}} \int\limits_{S_\perp} \dot{E}_{mt}^2 ds, \qquad (63.2)$$

siendo $\dot{W}^{(E,\ H)}$ en dependencia del tipo de onda $\dot{W}$, $\dot{W}^E$ o bien $\dot{W}^H$. Cuando $\dot{W}^{(E,\ H)}$ es real, el signo Re se omite ya que la magnitud que va tras de él es real, mientras que cuando $\dot{W}^{(E,\ H)}$ es puramente imaginaria, la potencia media $\overline{P}$ es igual a cero. En el § 35, punto 3 la velocidad de movimiento de la energía para oscilaciones armónicas se calculaba por la fórmula

$$v_e = \overline{\Pi} / \overline{w}. \qquad (63.3)$$

Desde este punto de vista, la velocidad de energía que se transporta por la onda a lo largo del sistema de guiado, es igual a

$$\check{v}_e = \frac{\int\limits_{S_\perp} \overline{\Pi} ds}{\int\limits_{S_\perp} \overline{w} ds} = \frac{\overline{P}}{\overline{W}'}, \qquad (63.4)$$

siendo $\overline{W}'$ la energía media reducida a la unidad de longitud del sistema.

Estudiemos el caso de ondas rápidas E y H sin absorción y demostremos que la velocidad de grupo v_{gr} introducida para ellas, coincide con $\check{v}_e$. Efectivamente, por ejemplo, para las ondas E de

la (63.4) y teniendo en cuenta (61.10) y (62.15), se tiene ($f > f_{crit}$)

$$\check{v}_e = \frac{\dfrac{\omega\varepsilon}{2\Gamma}\int\limits_{S_\perp}\frac{\Gamma^2}{\chi^4}\,|\nabla_\perp \mathcal{E}_z|^2\,ds}{\dfrac{\varepsilon}{4}\int\limits_{S_\perp}\left\{|\mathcal{E}_z|^2+\frac{\Gamma^2}{\chi^4}|\nabla_\perp \mathcal{E}_z|^2\right\}ds+\dfrac{\mu}{4}\int\limits_{S_\perp}\frac{\omega^2\varepsilon^2}{\chi^4}|\nabla_\perp \mathcal{E}_z|^2\,ds} =$$

$$= \frac{2}{\dfrac{\Gamma}{\omega\varepsilon}\left\{\varepsilon\left[\dfrac{\chi^4}{\Gamma^2}\dfrac{\int\limits_{S_\perp}|\mathcal{E}_z|^2\,ds}{\int\limits_{S_\perp}|\nabla_\perp \mathcal{E}_z|^2\,ds}+1\right]+\mu\frac{\omega^2\varepsilon^2}{\Gamma^2}\right\}}.$$

Aplicando las (62.9) y (61.3), seguidamente hallamos que

$$\check{v}_e = \frac{2}{\dfrac{\Gamma}{\omega}\left(\dfrac{\chi^2}{\Gamma^2}+1\right)+\dfrac{\omega\varepsilon\mu}{\Gamma}} = \frac{\Gamma}{\omega\varepsilon\mu} = v\frac{\Gamma}{k}.$$

De forma que

$$\check{v}_e = v\frac{\Gamma}{k} = v\sqrt{1-\left(\frac{f_{crit}}{f}\right)^2}, \qquad (63.5)$$

lo que coincide con la (62.23).

Proponemos al lector que verifique una comprobación análoga, tomando el caso de ondas rápidas H.

2. Absorción. Investigación de la constante de propagación. La influencia de un medio absorbente ya se estudió en el § 33 al considerar una onda plana homogénea del tipo TEM. De modo semejante a esta sencilla onda, todas las ondas planas homogéneas se atenúan según una ley exponencial al propagarse por medios absorbentes. Efectivamente, cuando la permitividad y permeabilidad magnética son magnitudes complejas, también lo es la constante de propagación: $\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma''$; entonces, las amplitudes de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ varían a lo largo del eje z según la ley $e^{-\Gamma'' z}$, es decir, cuando $\Gamma'' > 0$ se produce la atenuación exponencial en la dirección z. Ya dijimos (§ 61, punto 1) que Γ'' se llama *coeficiente de atenuación* (lo mismo que k'', compárese con el § 33); la magnitud $L = \Gamma'' l$ se llama *atenuación* de la onda en cierto segmento del recorrido l (compárese con el § 33, punto 2).

Primeramente, consideremos verdaderas ondas TEM que, como se indicó más arriba (§ 61.1, punto 1), son propias de un sistema con conductor de guiado ideal ($\sigma \to \infty$). Como para tales ondas $\dot{\Gamma} = k$, podemos hacer directamente uso de los resultados anteriormente hallados. O sea, que no habiendo pérdidas magnéticas

($\dot{\mu} = \mu$), a base de las (33.15), se escribe

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'' =$$

$$= k_{\varepsilon'} \left[\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\Delta}+1)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\Delta}-1)} \right], \quad (63.6)$$

siendo $k_{\varepsilon'} = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}$ (recordemos que ε' es la constante dieléctrica corriente ε del medio sólo cuando $\alpha = 0$, § 29, punto 2). Respectivamente, cuando las pérdidas eléctricas son extremadamente pequeñas ($\operatorname{tg}^2\Delta \ll 1$), lo que es propio de un dieléctrico, son válidas las fórmulas (33.16a), es decir,

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'' \approx k_{\varepsilon'}\left(1 - i\frac{1}{2}\operatorname{tg}\Delta\right). \quad (63.6a)$$

Seguidamente, tomemos ondas rápidas E y H en sistemas apantallados por un conductor ideal (§ 62, punto 2). En este caso, la constante de propagación $\dot{\Gamma}$ se expresa por la fórmula (62.16) que después de elevarla al cuadrado y separar la parte real de la imaginaria, nos da

$$\left.\begin{aligned} (\Gamma')^2 - (\Gamma'')^2 = (k')^2 - (k'')^2 - \chi^2 = \omega^2\varepsilon'\mu - \chi^2, \\ 2\Gamma'\Gamma'' = 2k'k'' = \omega^2\varepsilon'\mu\operatorname{tg}\Delta \end{aligned}\right\}$$

(seguimos considerando que $\dot{\mu} = \mu$). Hallando aquí Γ' y Γ'' (compárese con el § 33, punto 3), representemos la constante de propagación en la forma

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'' = k_{\varepsilon'}\left\{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}}{k_{\varepsilon'}}\right)^4 + \operatorname{tg}^2\Delta} + \left(\frac{\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}}{k_{\varepsilon'}}\right)^2\right]} - \right.$$

$$\left. - i\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}}{k_{\varepsilon'}}\right)^4 + \operatorname{tg}^2\Delta} - \left(\frac{\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}}{k_{\varepsilon'}}\right)^2\right]}\right\}, \quad (63.7)$$

siendo $k_{\varepsilon'} = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}$ y $\dot{\Gamma}_{\varepsilon'} = k_{\varepsilon'}\sqrt{1-(\chi/k_{\varepsilon'})^2} = k_{\varepsilon'}\sqrt{1-(f_{\text{crit}}/f)^2}$.

El resultado obtenido merece que se le preste cierta atención. Obsérvese primeramente que a determinadas condiciones la fórmula (63.7) puede ser simplificada considerablemente:

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'' \approx \left\{\begin{aligned} &\Gamma_{\varepsilon'}\left(1 - i\frac{k_{\varepsilon'}^2}{2\Gamma_{\varepsilon'}^2}\operatorname{tg}\Delta\right), && f > f_{\text{crit}} \\ &|\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}|\left(\frac{k_{\varepsilon'}^2}{2|\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}^2|}\operatorname{tg}\Delta - i\right), && f < f_{\text{crit}} \end{aligned}\right\} \operatorname{tg}\Delta \ll \frac{|\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}|^2}{k_{\varepsilon'}^2}. \quad (63.7a)$$

Ya que por lo general, se trata de la propagación de ondas en un medio dieléctrico ($\operatorname{tg}\Delta \ll 1$) entonces, la representación (63.7a) resulta ser posible siempre, salvo en la "región de corte", es decir, en un entorno relativamente pequeño del punto $f = f_{\text{crit}}$ ($\dot{\Gamma}_{\varepsilon'} = 0$).

En el propio punto $f = f_{crit}$

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'' = (1 - i)\, k_{\varepsilon'} \sqrt{\operatorname{tg}\Delta/2} \quad (f = f_{crit}). \qquad (63.7b)$$

El carácter de la dependencia de la frecuencia de $\dot{\Gamma}$ se ilustra por las curvas confeccionadas según la fórmula (63.7) (fig. 63.1). Siendo $\varepsilon' = \varepsilon$ ($k_{\varepsilon'} = k$), se han calculado las funciones de la frecuencia Γ'/k y Γ''/k para el caso cuando $\operatorname{tg}\Delta = \sigma/\omega\varepsilon = 0{,}2 f_{crit}/f$ (es decir, con tales σ y ε que la $\operatorname{tg}\Delta = 0{,}1$ si $f = 2f_{crit}$). Para poder comparar, a trazos se han delineado las curvas Γ'/k y Γ''/k al no haber absorción ($\operatorname{tg}\Delta = 0$). Como resultado de la influencia del medio absorbente, la constante de propagación $\dot{\Gamma}$ es compleja para todas las frecuencias, siendo, además, $\Gamma' \neq 0$. Por consiguiente, en diferencia del caso, cuando el sistema de guiado no es absorvente (§ 62, punto 3), ahora, la onda que se propaga se conserva incluso si $f < f_{crit}$. Bien es verdad, que en esta región al disminuir la frecuencia se produce un aumento brusco de la atenuación y la velocidad de fase (disminuye $\Gamma' = \omega/v_f$). Pero v_f ya no se reduce a la infinidad (fig. 63.2), sino que con $f \to 0$ tiende al límite

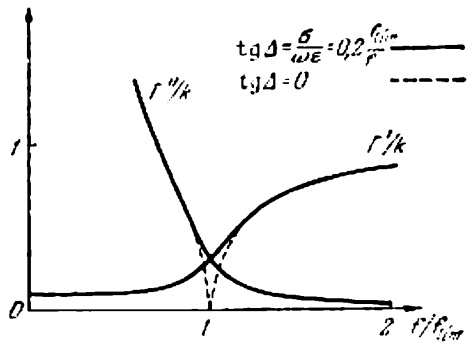


Fig. 63.1.

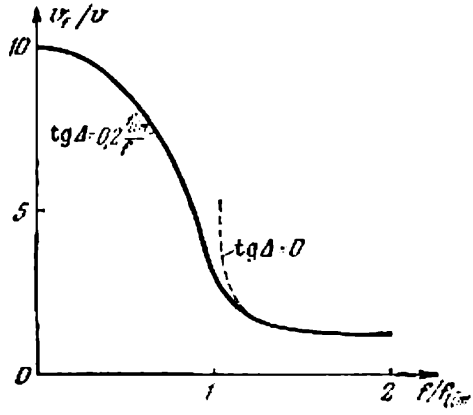


Fig. 63.2.

$$\lim_{\omega \to 0} v_f = \frac{2\,|\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}|\,\omega}{k_{\varepsilon'}^2 \operatorname{tg}\Delta} = \frac{2\chi\omega}{k_{\varepsilon'}^2 \operatorname{tg}\Delta}, \qquad (63.8)$$

y si $\varepsilon' = \varepsilon$, entonces

$$\lim_{f \to 0} v_f = 4\pi \frac{f_{crit}\,\varepsilon}{\sigma} v \qquad (63.8a)$$

(cuando $\operatorname{tg}\Delta = 0{,}2 f_{crit}/f$ de aquí obtenemos $v_f = 10v$).

En calidad de ejercicio, proponemos aclarar en el ejemplo numérico dado la región de aplicación de las fórmulas aproximadas (63.7a).

3. Método energético de determinación de la atenuación. Al investigar las ondas guiadas, con frecuencia no se puede hallar la solución exacta del problema electrodinámico al haber absorción.

En este caso, es imposible el cálculo directo de la atenuación de onda como se mostró anteriormente en el punto 2. Sin embargo, si la absorción no es considerable, resulta que se puede calcular la atenuación partiendo de la solución del problema obtenida al no haber absorción. Con este objeto, puede ser aplicado el *método energético* que se expone a continuación.

Comencemos por deducir ciertas correlaciones exactas.

Como al propagarse una onda a lo largo del eje z, las amplitudes complejas de los vectores del campo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ varían según la ley $e^{-i\dot{\Gamma}z}$, la energía que se transmite por unidad de tiempo, es decir, la potencia de onda, disminuye, en virtud de (63.1), como $e^{-i\dot{\Gamma}z}(e^{-i\dot{\Gamma}z})^* = e^{-2\Gamma''z}$. Por esta razón, si en cierta sección z la potencia que se transmite es $\bar{P}(z) = \bar{P}$, podemos, entonces, escribir que

$$\bar{P} = \bar{P}_0 e^{-2\Gamma''z}, \tag{63.9}$$

siendo $\bar{P}_0 = \bar{P}(0)$ la potencia de onda en la sección $z = 0$.

El decrecimiento de la potencia de onda al pasar un sector muy pequeño del sistema de guiado Δz, lo calculamos como

$$\Delta\bar{P} \approx -\frac{d\bar{P}}{dz}\Delta z = 2\Gamma''\bar{P}\Delta z. \tag{63.10}$$

Naturalmente que la magnitud $\Delta\bar{P}$ debe ser igual a la *energía* absorbida en el sector Δz por la unidad de tiempo, es decir, a la potencia de pérdidas $\Delta\bar{P}_p$; éstas pueden expresarse en la forma

$$\Delta\bar{P}_p = -\frac{d\bar{P}_p}{dz}\Delta z = \bar{p}_p\Delta z, \tag{63.11}$$

siendo $\bar{p}_p = d\bar{P}_p/dz$ la potencia de pérdidas referida a la unidad de longitud del sistema de guiado. Cuando $\Delta z \to 0$, las igualdades (63.10), (63.11) resultan ser exactas; de la ecuación del balance de energía $\Delta\bar{P} = \Delta\bar{P}_p$, se halla que

$$\Gamma'' = \bar{p}_p/2\bar{P}. \tag{63.12}$$

Esta es la "expresión energética" del coeficiente de atenuación.

Si al determinar la potencia de pérdidas, por cualesquiera consideraciones, resulta más cómodo dividir la magnitud $\bar{p}_p$ en partes $\bar{p}_p = \bar{p}_{p1} + \bar{p}_{p2} + \ldots$, entonces

$$\Gamma'' = \frac{\bar{p}_{p1}}{2\bar{P}} + \frac{\bar{p}_{p2}}{2\bar{P}} + \ldots,$$

es decir, el coeficiente Γ'' se representa como la suma de los coeficientes "parciales"

$$\Gamma'' = \Gamma_1'' + \Gamma_2'' + \ldots, \tag{63.13}$$

cada uno de los cuales se determina por la anterior expresión, es decir, $\Gamma_1'' = \bar{p}_{p1}/2\bar{P}$, etc.

Con objeto de determinar $\bar{p}_p$ en el numerador de la (63.12), fijemos nuestra atención en la región ΔV donde el campo existe y que corresponde al sector Δz del sistema de guiado. Evidentemente, $\Delta V = S_\perp \Delta z$ y, en virtud de la (30.14),

$$\bar{p}_p = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \frac{\omega}{2} \int_{\Delta V} (\varepsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*)\, dv =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{\omega}{2} \Delta z \int_{S_\perp} (\varepsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*)\, ds \right],$$

es decir,

$$\bar{p}_p = \frac{\omega}{2} \int_{S_\perp} (\varepsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*)\, ds. \qquad (63.14)$$

Por esto, en virtud de la (63.12) y teniendo en cuenta la (63.1)

$$\Gamma'' = \frac{\omega \int_{S_\perp} (\varepsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*)\, ds}{2 \operatorname{Re} \int_{S_\perp} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]\, ds}. \qquad (63.15)$$

Hablando en general, la permitividad $\dot{\varepsilon}$ y la permeabilidad magnética $\dot{\mu}$ son funciones de las coordenadas en el plano transversal. La sección transversal $S_\perp$ puede descomponerse en varias partes con dichas permeabilidades constantes ($\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\mu}$ son "constantes a trozos").

Con frecuencia, el sistema de guiado consta de elementos metálicos y dieléctricos. Por ejemplo, una guía de onda hueca es un tubo relleno de un dieléctrico, una línea bifilar consta de dos vástagos metálicos separados por un medio dieléctrico, etc. En estos casos, al calcular el coeficiente de atenuación por la fórmula (63.15), hay que verificar la integración respecto a la sección transversal del dieléctrico y el metal. Sin embargo, sabemos (§ 40) que en el caso del efecto Kelvin puede existir un campo más o menos perceptible sólo precisamente en las proximidades de la superficie del conductor. Cuando el efecto Kelvin es fuerte, el estado interior se define con alta precisión por las condiciones en la superficie y, precisamente, por las condiciones límites de Leontóvich. Este hecho nos permite hallar la absorción en el metal por medio del cálculo de la integral (40.10) que expresa el flujo de energía que penetra al interior.

Para hallar del modo indicado las pérdidas en el metal del sistema de guiado, reducidas a la unidad de su longitud, destaquemos en la superficie de la parte metálica (fig. 63.3) una banda ΔS de anchura Δz y escribamos:

$$\bar{p}_{pm} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \frac{1}{2\sigma\Delta^0} \int_{\Delta S} H_{m\tau}^2\, ds = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{\Delta z}{2\sigma\Delta^0} \int_{L_\perp} H_{m\tau}^2\, dl \right],$$

ya que $\Delta S = L_\perp \Delta z$, siendo $L_\perp$ el *contorno (o conjunto de contornos)* de la sección transversal de la superficie de separación entre el metal y el dieléctrico. La magnitud $\bar{p}_{pm}$ se halla, por consiguiente,

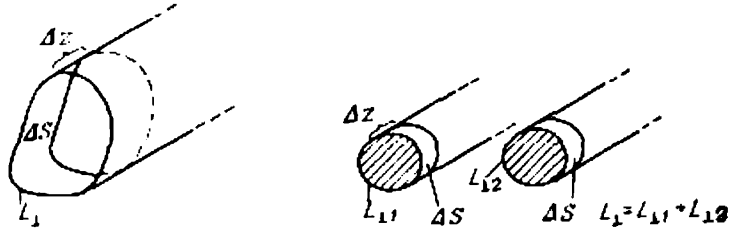


Fig. 63.3.

como la integral de contorno

$$\bar{p}_{pm} = \frac{1}{2\sigma\Delta^0} \int_{L_\perp} H_{m\tau}^2 dl, \tag{63.16}$$

mientras que el coeficiente parcial Γ_m'' que tiene en cuenta sólo las pérdidas en el metal, en virtud de la (63.12), así como de la (63.1), será igual a

$$\Gamma_m'' = \frac{\int_{L_\perp} H_{m\tau}^2 dl}{2\sigma\Delta^0 \operatorname{Re} \int_{S_\perp} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] ds}. \tag{63.17}$$

Por lo general, la fórmula (63.15) no se emplea para calcular el coeficiente total de atenuacion Γ'', sino que sólo para hallar el coeficiente parcial Γ_d'' que tiene en cuenta las pérdidas en el dieléctrico. En tal caso, en lugar de $S_\perp$ se toma la sección transversal de la región del dieléctrico $S_{\perp d}$ (conjunto de regiones). Si, como sucede con mayor frecuencia, no hay pérdidas magnéticas ($\mu'' = 0$), entonces de la (63.15) se desprende que

$$\Gamma_d'' = \frac{\omega \int_{S_{\perp d}} \varepsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* ds}{2 \operatorname{Re} \int_{S_\perp} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] ds}. \tag{63.18}$$

El coeficiente total de atenuación se halla, en virtud de (63.13), como

$$\Gamma'' = \Gamma_m'' + \Gamma_d'', \tag{63.19}$$

donde Γ_d'' y Γ_m'' se determinan por las fórmulas (63.17) y (63.18).

4. Aplicación del método energético. Ya dijimos que el método energético nos viene a ayudar cuando no se tiene la expresión analítica de $\dot{\Gamma}$ y no podemos calcular Γ'' como el $\operatorname{Im} \dot{\Gamma}$, pero las

magnitudes $\bar{P}$ y $\bar{p}_p$ pueden ser halladas aproximadamente. Por lo general, en tales casos, se utilizan las expresiones de los campos hallados como resultado del análisis de un sistema de guiado sin absorción.

Primeramente, realicemos aquellas operaciones que podemos considerar como la comprobación de tal enfoque, o sea, calcularemos con la indicada aproximación por medio de la fórmula (63.18) Γ''_d para ondas rápidas E y H, así como para las ondas TEM (el dieléctrico es homogéneo). Puesto que cuando el conductor del sistema es ideal ($\sigma \to \infty$), hay una expresión exacta $\Gamma'' = \Gamma''_d$ (punto 2), a continuación haremos la comparación de los resultados.

Después de las transformaciones del denominador de la (63.18), por medio de la (63.2), se tiene

$$\Gamma''_d = \frac{\omega\varepsilon'' W^{(E,H)}}{2} \left\{ 1 - \frac{\int\limits_{S_\perp} |\dot{E}_{mz}|^2 \, ds}{\int\limits_{S_\perp} |\dot{E}_{mt}|^2 \, ds} \right\}$$

(para una onda que se propaga sin absorción $W^{(E,H)} = W^{(E,H)}$ y $\Gamma = \Gamma$). Al tratarse de ondas H ($\dot{E}_{mz} = 0$) de aquí inmediatamente se desprende:

$$\Gamma''_d = \frac{\omega\varepsilon'' W^H}{2} = \frac{\omega^2\varepsilon''\mu}{2\Gamma} = \frac{1}{2}\frac{k^2 \operatorname{tg}\Delta}{\Gamma}, \qquad f > f_{\text{crit}}. \tag{63.20a}$$

Tomando ondas E, expresaremos $\dot{E}_{mz}$ y $\dot{E}_{mt}$ aplicando la (61.11) y tomaremos en cuenta la (62.9). Esto nos da

$$\Gamma''_d = \frac{\omega\varepsilon'' W^E}{2}\left(\frac{k}{\Gamma}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{k^2 \operatorname{tg}\Delta}{\Gamma}, \qquad f > f_{\text{crit}}. \tag{63.20b}$$

Y por fin, para las ondas TEM, haciendo en las (63.20a), (63.20b) $\Gamma = k$, se obtiene

$$\Gamma''_d = \frac{1}{2} k \operatorname{tg}\Delta. \tag{63.20c}$$

Como vemos, para $\varepsilon' = \varepsilon$ las expresiones (63.20a)—(63.20c) nos dan los mismos valores de Γ'_d que las fórmulas aproximadas (63.7a), (63.6a). En la región de corte ($f \approx f_{\text{crit}}$), las fórmulas (63.7a), como ya sabemos, no pueden ser aplicadas. El hecho de que esta misma propiedad la tienen también los resultados del método energético (63.20a), (63.20b) no nos debe sorprender. Al poner en la (63.18) las funciones $\dot{E}_m$ y $\dot{H}_m$ halladas para un sistema no absorbente, en el denominador obtenemos cero para toda la región de frecuencias $f \leqslant f_{\text{crit}}$ (que anteriormente fue excluida), lo que, naturalmente, no corresponde a la realidad, puesto que al haber absorción el flujo de energía nunca desaparece totalmente (punto 2). Por esta razón, el cálculo de $\bar{P}$ si $f \approx f_{\text{crit}}$ no puede ser exacto incluso en la región $f > f_{\text{crit}}$.

El *método energético es el medio fundamental para tener en* cuenta la absorción en los conductores de guiado, ya que, por lo general, no existe una solución rigurosa del problema cuando éstos no son ideales. Claro está que, como anteriormente, los resultados se obtienen para la región de frecuencias $f > f_{crit}$ y, cuando $f \approx f_{crit}$, *ya no son exactas. La fórmula general para* Γ_m'' *que se desprende* de la (63.17) al poner en ella las funciones $\dot{E}_m$ y $\dot{H}_m$ halladas para un sistema no absorbente, tiene el aspecto

$$\Gamma_m'' = \frac{\int_{L_\perp} H_m^2\, dl}{2\sigma\Delta^0 W^{(E,H)} \int_{S_\perp} H_{mt}^2\, ds} = \frac{\mathcal{R}_S \int_{L_\perp} H_m^2\, dl}{2W^{(E,H)} \int_{S_\perp} H_{mt}^2\, ds}. \qquad (63.21)$$

en donde se ha empleado la designación de la (40.16a); en la consideración se han incluido las ondas E, H y TEM.

11. Ondas libres en sistemas de guiado

Basándonos en la teoría expuesta anteriormente, vamos ahora a estudiar una serie de sistemas de guiado que encuentran la más extensa aplicación. Investigaremos procesos electromagnéticos libres, es decir, en esencia, cuya existencia *es posible* en dichos sistemas, sin tratar, por el momento, las condiciones de excitación de ondas.

Al definir y analizar los campos electromagnéticos, supondremos *al principio* que los elementos metálicos de los sistemas de guiado son conductores ideales, lo que en la mayoría de los casos es admisible a causa de un fuerte efecto Kelvin y hasta que no nos planteemos el objetivo de hallar la atenuación de la onda, provocada por la absorción en los metales. Este último problema lo resolveremos según el método energético.

§ 64. Guía de ondas rectangular

1. Planteamiento del problema. Ondas E. Entre las guías de onda metálicas huecas, la de mayor aplicación es de sección rectangular; esquemáticamente se muestra en la fig. 64.1. Si suponemos que la cubierta del tubo es idealmente conductora, llegamos a un sistema que puede ser analizado con facilidad. De acuerdo con el § 62, punto 1 en dicho sistema puede haber ondas TEM y, puede esperarse, que los campos libres tienen el carácter de las ondas E y H que, de forma general, se estudiaron en el § 63, punto 2, 3. Ahora

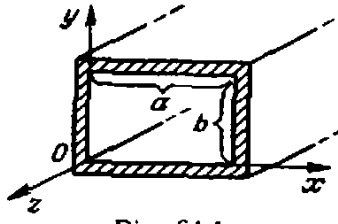


Fig. 64.1.

tenemos la posibilidad de considerar detalladamente cada ejemplo de tales ondas.

Planteándonos el objetivo de estudiar las ondas E de una guía de ondas rectangular idealizada, deberemos resolver el problema de contorno (62.8) que en el presente caso se formula en la forma (fig. 64.1)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y^2} + \chi^2 \dot{\mathcal{E}}_z = 0, \quad \begin{cases} 0 < x < a, \\ 0 < y < b; \end{cases} \\ &\dot{\mathcal{E}}_z = 0 \text{ para } \begin{cases} x = 0, \ x = a, \\ y = 0, \ y = b. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{64.1}$$

Este problema de contorno para la ecuación bidimensional de Helmholtz se resuelve en el suplemento 7. Efectivamente, las enunciaciones (64.1) y (S7.10) coinciden totalmente. Haciendo uso de los resultados acabados en forma de la fórmula (S7.11) y las siguientes, se escribe

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \dot{\mathcal{E}}_z^{mn} = \dot{E}_0 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \tag{64.2}$$

y

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad \begin{cases} m = 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{64.3}$$

($\dot{E}_0$ es un factor de cresta indeterminado).

Recordemos que $\dot{\mathcal{E}}_z^{mn}$ son las *funciones propias* del problema (64.1) y χ_{mn}^2, los *valores propios* que a ellas corresponden, es decir, los valores del parámetro χ^2 en el (64.1) para los que pueden realizarse las soluciones de $\dot{\mathcal{E}}_z^{mn}$. Estas forman un conjunto infinito caracterizando cada una de las funciones $\dot{\mathcal{E}}_z^{mn}$ la distribución en la sección transversal de la guía de onda la componente longitudinal del vector E de una a otra onda libre que llamaremos *onda del tipo* E_{mn}; también va a ser utilizada la expresión: *campo del*

Fig. 64.2.

tipo E_{mn}. En la fig. 64.2 se muestran las distribuciones de E_z para los campos del tipo E_{11}, E_{21}, E_{31} y E_{32}; a trazos se han delineado las "líneas de los nodos", en las que $E_z = 0$.

Conociendo la función $\dot{\mathcal{E}}_z^{mn}$, por medio de las fórmulas (61.10) podemos determinar las amplitudes complejas de todas las compo-

nentes del campo del tipo E_{mn}. Como resultado obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{mz} &= \dot{E}_0 \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{E}_{mx} &= -i\dot{E}_0\frac{\dot{\Gamma}\chi_x}{\chi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{E}_{my} &= -i\dot{E}_0\frac{\dot{\Gamma}\chi_y}{\chi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{H}_{mx} &= -i\dot{E}_0\frac{\omega\dot{\varepsilon}\chi_y}{\chi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{H}_{my} &= -i\dot{E}_0\frac{\omega\dot{\varepsilon}\chi_x}{\chi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\chi &= \chi_{mn}\\
\chi_x &= \frac{m\pi}{a},\quad \chi_y = \frac{n\pi}{b}
\end{aligned}\right\} \qquad (64.4)$$

donde, en virtud de las (61.3) o bien (62.16) y teniendo en cuenta (64.3),

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_{mn} = \sqrt{\dot{k}^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad (64.5)$$

es el número de onda longitudinal complejo (constante de propagación) de la onda E dada. En este caso, es preciso hacer reservas que, en esencia, el campo pierde su carácter ondulatorio si $\dot{\Gamma}$ es una magnitud puramente imaginaria (§ 62, punto 3), lo que es imposible cuando $\dot{k}$ es complejo (§ 63, punto 1). Escribamos, también, la expresión de la impedancia de onda $\dot{W}^E = \dot{W}^E_{mn}$ (62.15):

$$\dot{W}^E = \dot{W}^E_{mn} = \frac{\dot{\Gamma}_{mn}}{\omega\dot{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}}{\dot{\varepsilon}}}\sqrt{1 - \frac{1}{\dot{k}^2}\left|\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right|}. \qquad (64.6)$$

En la fig. 64.3 se muestra la estructura de diferentes campos E_{mn} de una guía de ondas rectangular para cierto momento fijado de tiempo ("fotografía instantánea" de una onda, compárese con la pág. 183). Como no hay componente longitudinal del vector $\boldsymbol{H}$, las líneas de fuerza magnéticas se encuentran en el plano de la sección transversal. El campo E_{11} ($m = 1$, $n = 1$) es el más sencillo; su estructura incluye una familia de líneas de fuerza cerradas, dispuestas simétricamente respecto al punto medio de la sección donde se encuentra el máximo de la componente longitudinal del vector $\boldsymbol{E}$. Según la fig. 64.3 es fácil hallar la correspondencia entre la estructura de los campos $\boldsymbol{E}_{mn}$ y los valores de los índices m y n: estos últimos nos indican el número de semiperiodos de la estructura para los ejes transversales x e y en los segmentos a y b. Si no hay absorción, el campo es también periódico en la dirección longitudinal z y su período es la longitud de onda Λ.

2. **Ondas *H*.** Para estudiar las ondas *H* primeramente, conviene resolver el problema de contorno (62.12), cuya enunciación para una guía de ondas rectangular (fig. 64.1), tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y^2}+\chi^2 \dot{\mathcal{H}}_z=0, \quad \begin{cases} 0<x<a, \\ 0<y<b; \end{cases} \\ &\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x}=0 \text{ con } \begin{cases} x=0, \\ x=a; \end{cases} \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y}=0 \text{ si } \begin{cases} y=0, \\ y=b, \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{64.7}$$

lo que coincide con el problema (S7.12) considerado anteriormente. Tomando el resultado acabado (S7.13), escribimos las funciones

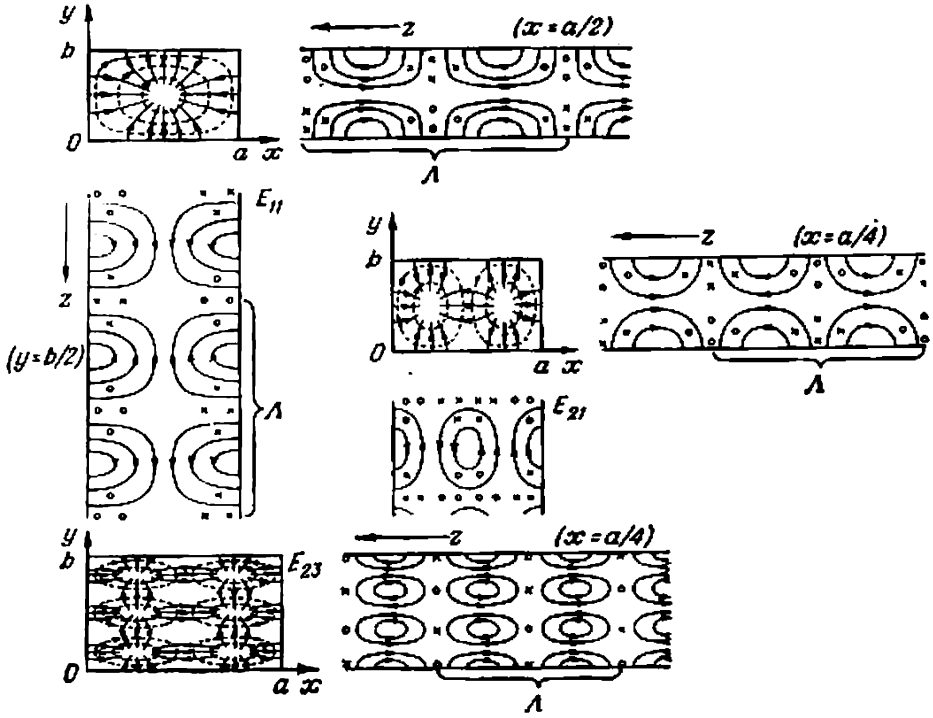


Fig. 64.3.

propias

$$\dot{\mathcal{H}}_z=\dot{\mathcal{H}}_z^{mn}=\dot{H}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{64.8}$$

y los valores propios que a ellas corresponden,

$$\chi^2=\chi_{mn}^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad \begin{cases} m=(0),\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ n=(0),\ 1,\ 2,\ \ldots \end{cases} \tag{64.9}$$

del problema (64.7); los índices m y n pueden ser por separado iguales a cero.

Cada una de la infinidad de funciones $\dot{\mathcal{H}}_z^{mn}$, caracteriza la distribución en la sección transversal del guía de ondas de la com-

ponente longitudinal del vector $\boldsymbol{H}$ del campo libre del tipo H_{mn}. En la fig. 64.4 se muestran las distribuciones H_z para los campos del tipo H_{10}, H_{01}, H_{11} y H_{32}.

Como para el caso de las ondas E, escribamos las amplitudes complejas de todas las componentes de los vectores del campo del

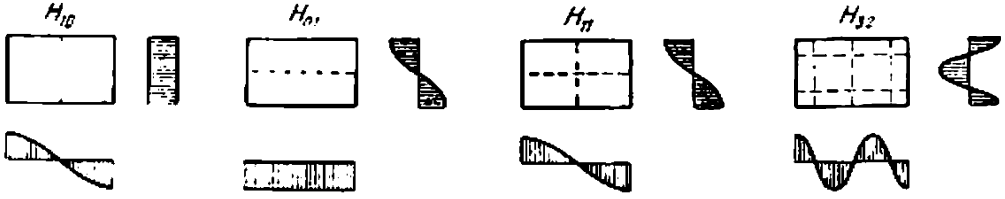


Fig. 64.4.

tipo H_{mn} que se obtienen por medio de las fórmulas y (61.11) al poner $\dot{\mathcal{H}}_z$ en (64.8):

$$\left.\begin{aligned}
\dot{H}_{mz} &= \dot{H}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{H}_{mx} &= i\dot{H}_0\frac{\dot{\Gamma}\chi_x}{\chi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{H}_{my} &= i\dot{H}_0\frac{\dot{\Gamma}\chi_y}{\chi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{E}_{mx} &= i\dot{H}_0\frac{\omega\dot{\mu}\chi_y}{\chi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{E}_{my} &= -i\dot{H}_0\frac{\omega\dot{\mu}\chi_x}{\chi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-i\Gamma z},\\
\chi &= \chi_{mn},\\
\chi_x &= \frac{m\pi}{a},\quad \chi_y = \frac{n\pi}{b}.
\end{aligned}\right\} \qquad (64.10)$$

Aquí, como anteriormente,

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_{mn} = \sqrt{\dot{k} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \qquad (64.11)$$

es decir, las constantes de propagación de las ondas E y H, cuando los índices m y n son iguales, coinciden. A cada onda H_{mn}, salvo a las ondas H_{0n} y H_{m0}, corresponde una onda E_{mn} que se propaga con igual velocidad de fase. Aquí, escribamos también la expresión de la impedancia de onda $\dot{W}^H = \dot{W}^H_{mn}$ (62.15)

$$\dot{W}^H = \dot{W}^H_{mn} = \frac{\omega\dot{\mu}}{\dot{\Gamma}_{mn}} = \frac{\sqrt{\dot{\mu}/\dot{e}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\dot{k}^2}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}}. \qquad (64.12)$$

La estructura de diferentes campos H_{mn} de una guía de ondas rectangular se muestra en la fig. 64.5 (compárese con la fig. 64.3).

Los campos más sencillos son H_{10} y H_{01}. Las líneas de fuerza magnéticas del campo H_{10} forman contornos cerrados que se encuentran en los planos $y = \text{const}$, mientras que las líneas eléctricas son paralelas al eje y; en este caso, el máximo del campo eléctrico está desviado a lo largo del eje z a un cuarto de período espacial, es decir, a $\Lambda/4$, desde el centro de la familia de líneas magnéticas. Obsérvese que entonces en el centro se haya el máximo

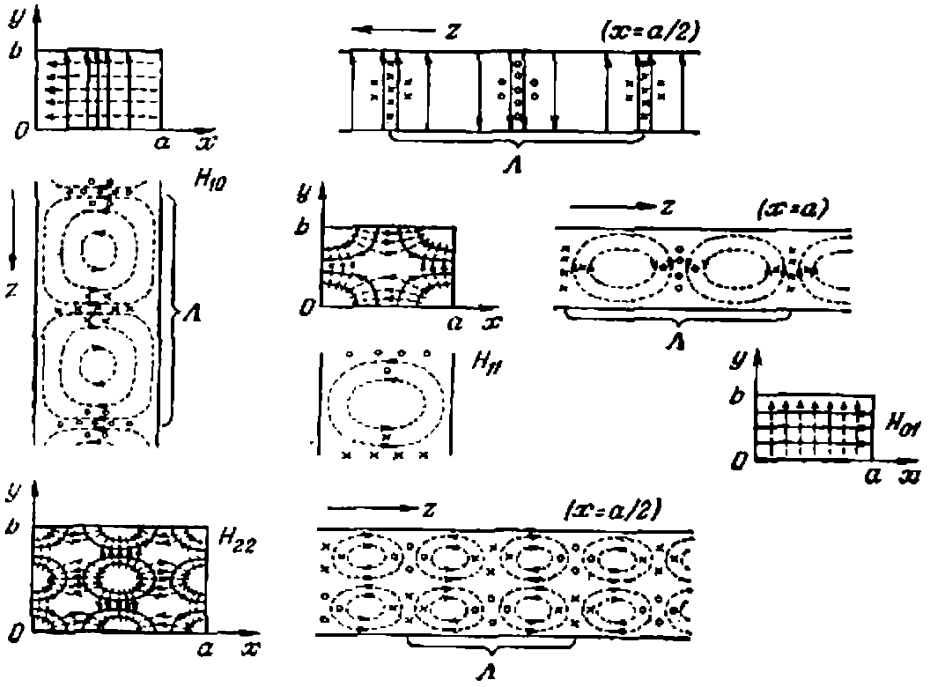


Fig. 64.5.

de la corriente de desplazamiento (recomendamos que el lector lo compruebe). Como al tratar los campos E, los índices m y n nos indican el número de semiperíodos espaciales en los segmentos a y b. Cuando uno de ellos es igual a cero, el campo a lo largo de la correspondiente dirección es homogéneo ("Cero de semiperíodos").

3. Guía de ondas sin absorción. Onda fundamental (principal). Investiguemos el carácter de la propagación de ondas en una guía de ondas rectangular con cubierta idealmente conductora, no habiendo absorción y haciendo en las (64.5), (64.11) $k = k$. En tal caso es cómodo aplicar la forma escrita en el § 62, punto 3. Concretando las expresiones (62.18)—(62.20) y otras, sólo debemos, en virtud de las (62.17) y (64.3), (64.9), hacer que

$$f_{\text{crit}} = f_{\text{crit}}^{mn} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

y

$$\lambda_{crit} = \lambda_{crit}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \qquad (64.13)$$

Uno u otro campo del tipo E_{mn} o H_{mn} tendrá el carácter de una onda que se propaga, cuando la constante de propagación $\dot{\Gamma}_{mn}$ definida por la fórmula (62.18) sea real, lo que tendrá lugar con $f > f_{crit}$ ($\lambda < \lambda_{crit}$). Si para todos los tipos de campo $f < f_{crit}$, será imposible la transmisión de energía por la guía de ondas. Sea ahora que la frecuencia f aumenta gradualmente; en aquel momento, cuando ella supere a la menor de todas las frecuencias críticas f_{crit}^{mn}, en la guía de ondas podrá propagarse *una* onda. Esta es la onda que tiene el mayor valor técnico y, generalmente, la llamamos *onda fundamental* (se supone que la guía de ondas rectangular real es muy próxima a la idealizada que investigábamos). Vamos a suponer que $a > b$, como corresponde a la fig. 64.1. Entonces, en virtud de (64.13), la frecuencia crítica mínima es igual a

$$\min f_{crit}^{mn} = f_{crit}^{10} = \frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (64.14)$$

Esta es la frecuencia crítica del campo H_{10} y, de este modo, la onda H_{10} es la fundamental para la guía de ondas rectangular.

Al continuar elevando la frecuencia f, se puede llegar a satisfacer la desigualdad $f > f_{crit}$ para dos, tres o mayor número de tipos de onda. Está claro que para cualquier guía de ondas concreta, sin absorción y con una frecuencia fijada f, sólo un número finito de campos E_{mn} y H_{mn} puede tener la forma de ondas que se propagan.

Consideremos la onda fundamental H_{10} más detalladamente. De las (64.13) se desprende una correlación que se recuerda con facilidad

$$\lambda_{crit}^{10} = 2a. \qquad (64.14a)$$

La longitud crítica de onda para el campo H_{10} (igual a la longitud de una onda TEM cuando $f = f_{crit}$ en un medio del mismo tipo que él del interior de la guía de ondas) resulta ser dos veces mayor que la dimensión transversal máxima de la guía de ondas.

Escribamos las amplitudes complejas de las componentes de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ de la onda H_{10}, haciendo en la (64.10) $m = 1$ y $n = 0$:

$$\dot{E}_{my} = -i\dot{H}_0 \frac{\lambda_{crit}}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\,e^{-i\dot{\Gamma}z}, \qquad (64.15)$$

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_0 \cos\frac{\pi x}{a}\,e^{-i\dot{\Gamma}z},$$

$$\dot{H}_{mx} = i\dot{H}_0 \frac{\lambda_{crit}}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{crit}}\right)^2}\,\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\,e^{-i\dot{\Gamma}z},$$

siendo $\lambda/\lambda_{crit} = \lambda/2a$. Las magnitudes $\dot{\Gamma}$, v_f, v_{gr}, Λ, W^H se calculan por las fórmulas (62.18)—(62.20), (62.23) y (64.12). Como la longitud crítica de onda $\lambda_{crit}^{10} = 2a$ no depende de la dimensión transversal b, todas las indicadas magnitudes conservan sus valores para todas las guías de ondas "de igual anchura" ($a = \text{const}$), independientemente de la "altura" b.

Al disminuir la frecuencia (al crecer λ), aumenta el período espacial del campo Λ (fig. 64.6, a, b) hasta que no se hace infinito

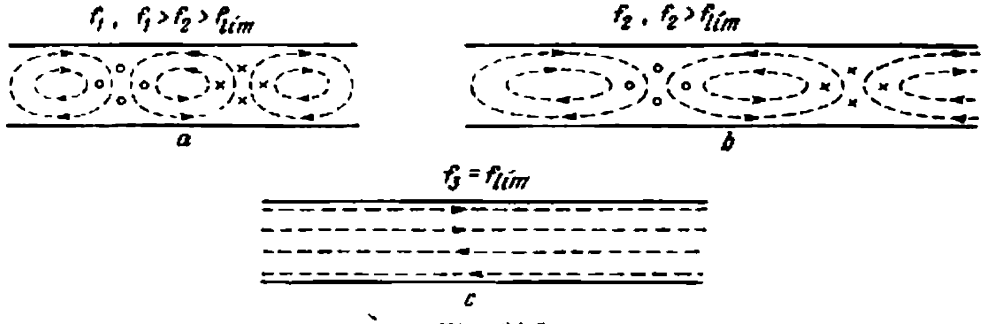


Fig. 64.6.

para $\lambda = 2a$ (fig. 64.6, c); en este caso, como se deduce de las (64.15), la componente transversal H_x desaparece. A continuación, cuando $\lambda > 2a$, $H_x \neq 0$ pero respecto al campo eléctrico el campo magnético se desfasa a 90° así que no hay transmisión de energía. Cuando $\lambda/a \to 0$ (disminución infinita de λ o "ensanchamiento" de la guía ondas), como se desprende de las (64.15)

$$\frac{\dot{H}_{mz}}{\dot{H}_{mx}} = -i\frac{\lambda}{2a}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \to 0,$$

es decir, la onda fundamental H_{10} se convierte en una onda puramente transversal y además, $W^H \to \sqrt{\mu/\varepsilon}$ y $\Lambda \to \lambda$.

4. Transmisión de energía y atenuación de ondas. Para calcular la potencia que se transmite, se aplican las fórmulas del § 63, punto 1. Tomando de nuevo la onda fundamental H_{10} sin absorción, vamos a partir del campo eléctrico; esto es más cómodo, ya que dicho campo sólo tiene una componente E_y (64.15). La magnitud $\frac{H_0\omega\mu}{\chi} = H_0\frac{2a}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = E_0$ es la amplitud del vector E en el vientre del campo ($x = a/2$). Seguidamente, vamos a establecer la relación entre E_0 y la potencia de la onda H_{10} que se propaga. En virtud de la (63.2)

$$\overline{P} = \frac{E_0^2}{2W^H}\int_0^a\int_0^b \operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{a}\,dx\,dy = \frac{abE_0^2}{4W^H}, \qquad (64.16)$$

siendo $W'' = W\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}$ según la (64.12); $W = \sqrt{\mu/\varepsilon}$.

A medida que la frecuencia se aproxima a la crítica ($\lambda \to 2a$), la intensidad del campo crece infinitamente cuando la potencia de la onda está fijada. Como es natural, este fenómeno de resonancia se conserva y al haber absorción, pero entonces E_m ya no tiende a la infinidad, como podemos fácilmente convercernos tomando $\dot{k}$ en lugar de k y sustituyendo correspondientemente en la (64.16), W'' por $\mathrm{Re}\, W''^*$.

A continuación, consideremos la atenuación de ondas.

La atenuación que se produce a causa de la absorción de energía en el dieléctrico que llena la guia de ondas, se calcula por las fórmulas (63.7), (63.7a). La primera de ellas nos da un resultado exacto cuando la cubierta es idealmente conductora. Recordemos que para la banda de frecuencias $f \gtrsim f_{crit}$ existe un resultado semejante al que obtenemos con la (63.7a) al aplicar el método energético (63.20a).

Sin embargo, en la mayoria de los casos el guia de ondas está lleno de aire, en el que la absorción es despreciablemente pequeña y por lo tanto, la atenuación se produce realmente sólo a causa de la acción del metal ($\Gamma'' - \Gamma_m''$).

Calculemos Γ_m'' para la onda principal H_{10} aplicando la fórmula (63.21). En virtud de las (64.15), la integral en el numerador de la (63.21) tiene la forma

$$\int_{L_\perp} H_m^2\, dl = 2\left[\int_0^b H_{mz}^2|_{x=0}\, dy + \int_0^a (H_{mz}^2 + H_{mx}^2)_{y=0}\, dx\right],$$

es decir,

$$\int_{L_\perp} H_m^2\, dl = 2H_0^2\left\{b + \int_0^a \left[\cos^2\frac{\pi x}{a} + \left(\frac{4a^2}{\lambda^2} - 1\right)\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{a}\right] dx\right\} =$$

$$= 2H_0^2\left(b + \frac{2a^2}{\lambda^2}\right).$$

La integral en el denominador de la (63.21) ya está, en esencia, calculada al hallar la potencia que se transmite:

$$W''\int_{S_\perp} H_{mt}^2\, ds = \frac{1}{W''}\int_{S_\perp} E_{mt}^2\, ds = H_0^2\frac{ab}{2W''}\left(\frac{\omega\mu}{\chi}\right)^2.$$

Poniendo los resultados obtenidos en la (63.21) llegamos a la siguiente expresión:

$$\Gamma_m'' = \frac{\mathcal{R}_S\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right]}{Wb\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad \left(W = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},\ \mathcal{R}_S = \frac{1}{\Delta^\circ\sigma}\right). \quad (64.17)$$

La dependencia entre Γ''_m y la frecuencia definida por esta fórmula, se representa gráficamente en la fig. 64.7. En virtud de la (64.17), $\Gamma''_m \to \infty$ cuando $\lambda \to 2a$; sin embargo, en la región de corte ($\lambda \approx 2a$) la expresión Γ''_m no es exacta (§ 63, punto 4) y, en realidad, el crecimiento de la atenuación no es infinito. Al aumentar la frecuencia, la atenuación primeramente decrece y, luego, crece lentamente a causa de la disminución de la profundidad de penetración $\Delta^\circ = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ (§ 40, punto 1). Una dependencia $\Gamma''_m(f)$ de tal forma, es típica para diversas ondas en guías de ondas huecas; la única divergencia de dicha dependencia, será estudiada más adelante (§ 65).

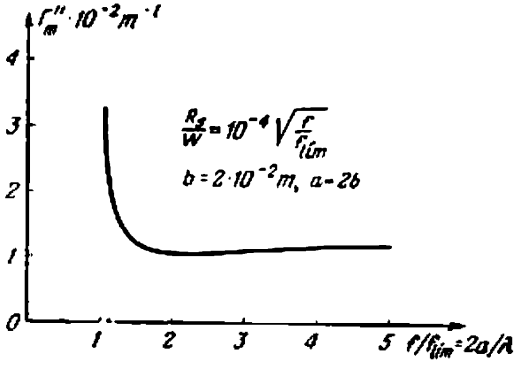


Fig. 64.7.

5. Observaciones conclusivas. El cuadro de los procesos electromagnéticos que transcurren en una guía de ondas rectangular aún necesita una serie de complementos.

Primeramente, hay que tener en cuenta que en la cubierta metálica de la guía de ondas está distribuida una corriente. Suponiendo que la cubierta es un conductor ideal, conviene constatar que en la superficie de separación interior hay corriente superficial y una carga, cuyas densidades son respectivamente iguales a $\eta = [\nu_0, H]$ y $\xi = \varepsilon E$ (§ 8, punto 1). Las líneas del vector η son ortogonales a las líneas de fuerza magnéticas de la superficie de la guía de ondas. Para la onda principal H_{10}, la distribución de corriente y carga está representada en la fig. 64.8. A las ondas del tipo E sólo acompañan corrientes longitudinales ($\eta = z_0\eta$), ya que el vector H es transversal.

En segundo lugar, señalemos que aunque la estructura de los campos en una guía de ondas metálica es muy aproximada a la representación idealizada obtenida más arriba en los puntos 1—3, no podemos no tener en cuenta el carácter de las divergencias. Por ejemplo, tomemos de nuevo la onda fundamental H_{10}. Ya que la corriente en la cubierta de la guía de ondas que a ella corresponde tiene una componente longitudinal, en virtud de la ley de Ohm ($j = \sigma E$) existe la componente longitudinal del vector E. Bien es verdad que en comparación con la transversal, dicha componente es muy pequeña, pero en tal caso, desde el punto de vista de una clasificación rigurosa, debemos ya hablar no de una onda del tipo H, sino del tipo EH.

Con anterioridad, punto (2), indicábamos que algunas de las ondas de guía de ondas rectangular con cubierta idealmente conductora tienen iguales constantes de propagación: tales ondas se

llaman *degeneradas*[1]. Tales son todas las ondas de los tipos E y H con iguales índices m y n (por ejemplo, las ondas E_{11} y H_{11}, E_{23} y H_{23}, etc.). Además, la degeneración se observa para determinadas correlaciones espaciales; así, en una guía de ondas cuadrada ($a=b$), las ondas E_{mn} y E_{nm}, H_{mn} y H_{nm} son degeneradas.

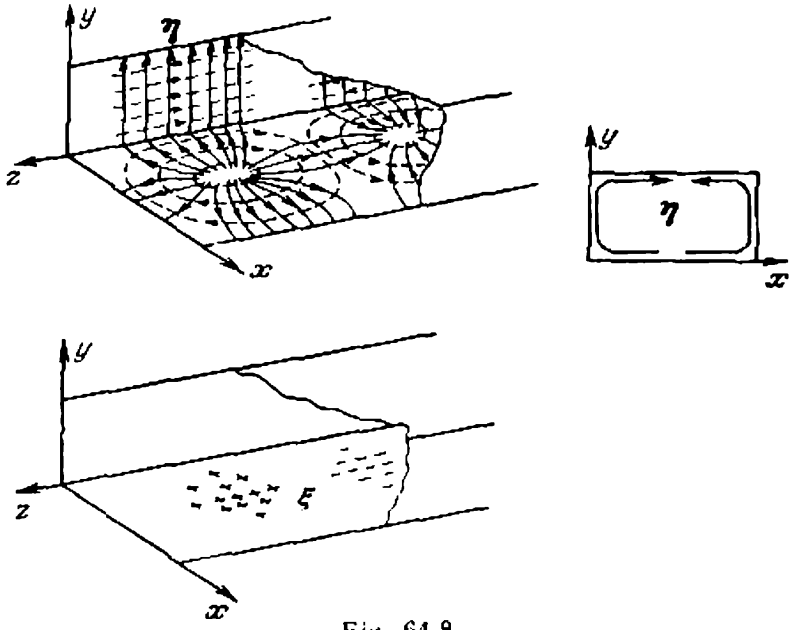


Fig. 64.8.

Las ondas que se propagan por guías de ondas reales se caracterizan por ser próximas no a las ondas degeneradas que hemos estudiado, como E_{11} y H_{11}, sino a sus combinaciones completamente determinadas. Hay ondas que pueden llamarse EH_{11} y HE_{11} partiendo del criterio de que son cercanas a las combinaciones de las ondas E_{11} y H_{11}, pero al mismo tiempo $EH_{11} \to H_{11}$ y $HE_{11} \to E_{11}$ cuando $\sigma \to \infty$, es decir, al pasar a una guía de ondas idealizada tales ondas (que no son ya degeneradas) se convierten en las ya conocidas ondas del tipo E y H. Suele decirse que la existencia de las ondas tipo EH y HE es el resultado de la relación energética entre las ondas E y H en las condiciones anteriormente indicadas.

En conclusión, retornemos a la cuestión sobre la diferencia en las condiciones de propagación de la onda fundamental H_{10} en guías de ondas de igual anchura a con variados valores de b. Anteriormente vimos que las fórmulas (62.18)—(62.20), (62.23), (64.12) en las que b no figura, no nos mostraban tales divergencias. Pero la potencia $\overline{P}$ transportada y la atenuación $\Gamma_m''l$, dependen de b.

[1]) Si en cierto problema, a diferentes funciones propias corresponden iguales valores propios, esto se denomina *degeneración*. En el caso dado se tiene en cuenta la degeneración en los problemas (64.1) y (64.7).

Para iguales valores de $\overline{P}$, la intensidad del campo es mayor en aquella guía de ondas que tenga menor sección transversal.

En lo que se refiere a la atenuación, en virtud de (64.17), ésta es inversamente proporcional a la altura de la sección transversal b.

§ 65. Guía de ondas circular

1. Planteamiento del problema. Ondas E. Del mismo modo que la guía de ondas rectangular, en la técnica se emplean extensamente las guías de onda de sección transversal circular (fig. 65.1). Vamos a considerar esta guía de ondas en un mismo plano suponiendo, primeramente, que su cubierta es idealmente conductora.

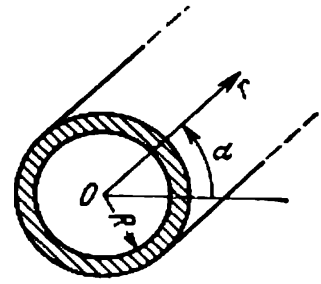


Fig. 65.1.

Al investigar las ondas E, planteemos el problema de contorno (62.8) en la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial \alpha^2}+\chi^2\dot{\mathcal{E}}_z=0 \qquad \left\{\begin{array}{l} 0\leqslant r<R, \\ 0\leqslant \alpha<2\pi, \end{array}\right. \tag{65.1}$$

$$\dot{\mathcal{E}}_z=0 \text{ siendo } r=R,$$

lo que coincide con la (S7.18). Por esta razón, en virtud de (S7.19),

$$\dot{\mathcal{E}}_z=\dot{\mathcal{E}}_z^{nm}=J_n(\chi_{nm}r)\left\{\begin{array}{l} \dot{C}\cos n\alpha+\dot{D}\operatorname{sen} n\alpha \\ \dot{Q}e^{-in\alpha}+\dot{T}e^{in\alpha} \end{array}\right\}=J_n(\chi_{nm}r)\,A(n\alpha) \tag{65.2}$$

y

$$\chi^2=\chi_{nm}^2=\left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2 \left\{\begin{array}{l} n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ m=1,\ 2,\ \ldots, \end{array}\right. \tag{65.3}$$

siendo B_{nm} las raíces de la ecuación $J_n(x)=0$, reducidas a una tabla en el Suplemento 6, punto 6. El factor $A(n\alpha)$ de la dependencia azimutal está aquí escrito en dos variaciones (renglones superior e inferior).

Cada uno de los infinitos conjuntos de funciones propias $\dot{\mathcal{E}}_z^{nm}$, define el campo de guía de ondas circular del tipo $\dot{E}_{nm}$, cuyas componentes se hallan al poner la (65.2) en las (61.10) teniendo en cuenta las (S1.8) y (S1.22). Esta operación nos da:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{E}_{mz}=J_n(\chi r)\,A(n\alpha)\,e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{E}_{mr}=-i\dfrac{\dot{\Gamma}}{\chi}J_n'(\chi r)\,A(n\alpha)\,e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{E}_{m\alpha}=-i\dfrac{n\dot{\Gamma}}{\chi^2 r}J_n(\chi r)\,A'(n\alpha)\,e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_{mr}=i\dfrac{n\omega\dot{\varepsilon}}{\chi^2 r}J_n(\chi r)\,A'(n\alpha)\,e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_{m\alpha}=-i\dfrac{\omega\dot{\varepsilon}}{\chi}J_n'(\chi r)\,A(n\alpha)\,e^{-i\dot{\Gamma}z}, \end{array}\right\}\ \chi=\chi_{nm} \tag{65.4}$$

siendo $J_n'(\chi r)$ la derivada de $J_n(\chi r)$ por el argumento χr y $A'(n\alpha)$ la derivada de $A(n\alpha)$ por el $n\alpha$:

$$A'(n\alpha) = \begin{cases} -\dot{C}\,\mathrm{sen}\,n\alpha + \dot{D}\cos n\alpha, \\ -i\dot{Q}e^{-in\alpha} + i\dot{T}e^{in\alpha}. \end{cases}$$

En las (65.4) la constante de propagación $\dot{\Gamma}$ que se calcula por las fórmulas (61.3) y (65.3), es igual a

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_{mn} = \sqrt{\dot{k}^2 - (B_{nm}/R)^2}. \qquad (65.5)$$

Antes de pasar al estudio de la estructura de diferentes tipos de campos, esclarezcamos el sentido del factor $A(n\alpha)$ de dependencia azimutal. En una de las variaciones es la combinación lineal de las funciones $\cos n\alpha$ y $\mathrm{sen}\,n\alpha$. Esto significa que cualquier solución con la distribución dada del campo respecto al radio $J_n(\chi r)$, puede tener una distribución azimutal tanto cosenoidal ($\dot{D} = 0$), como senoidal ($\dot{C} = 0$). Podemos decir que se trata de dos ondas degeneradas, puesto que para las dos soluciones n y m coinciden. Con todo, los *campos del tipo* E_{nm} *que se obtienen para* $A(n\alpha) = \dot{C}\cos n\alpha$ y $A(n\alpha) = \dot{D}\,\mathrm{sen}\,n\alpha$ sólo se diferencian por su orientación: como el $\mathrm{sen}\,n\alpha = \cos(n\alpha - 90^\circ)$, uno de los campos se convierte en el segundo al girar a 90° alrededor del eje de la guía de ondas. ¿Qué significa la combinación lineal arbitraria de las dos soluciones ($\dot{C} \neq 0$ y $\dot{D} \neq 0$)? Tomando $\dot{C}$ y $\dot{D}$ como magnitudes reales, es decir, considerando la superposición de los dos campos degenerados por fase, se tiene que

$$A(n\alpha) = C\cos n\alpha + D\,\mathrm{sen}\,n\alpha = E_0\cos(n\alpha - \psi);$$
$$E_0 = \sqrt{C^2 + D^2}, \quad \psi = \mathrm{arctg}\,\frac{D}{C}.$$

Por consiguiente, se trata de una distribución cosenoidal, girada respecto al origen de coordenadas a cierto ángulo ψ, es decir, de la posibilidad de una orientación azimutal arbitraria del campo en la guía de ondas circular, lo que es natural a causa de su simetría.

Cuando $\dot{C}$ y $\dot{D}$ son magnitudes complejas, se produce la suma de los dos indicados campos con diferentes fases. Tomemos, por ejemplo, $\dot{C} = E_0$ y $\dot{D} = \pm iE_0$. Entonces, $A(n\alpha) = E_0(\cos n\alpha \pm i\,\mathrm{sen}\,n\alpha) = E_0 e^{\pm in\alpha}$, lo que corresponde a la elección de $A(n\alpha)$ en forma de la expresión dada en el renglón inferior de las (65.2) con $\dot{Q} = E_0$ y $\dot{T} = 0$ o bien $\dot{Q} = 0$ y $\dot{T} = E_0$. Los campos con distribución azimutal de tal tipo tienen una estructura que gira respecto al eje de la guía de onda con una frecuencia angular ω (analogía con la polarización circular § 34, punto 3), dependiendo el *sentido de rotación del signo elegido* en $e^{\pm in\alpha}$.

Efectivamente, al obtener de las amplitudes complejas (65.4) las componentes del campo cuando $A(n\alpha) = e^{\pm in\alpha}$, tendremos (si $Im\,\dot{\Gamma} = 0$)

la dependencia $\begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix}(\omega t \pm n\alpha - \Gamma z)$. Fijando el plano $z = \text{const}$ vemos que toda fase local se conserva al variar monótonamente el ángulo α durante el trascurso del tiempo, es decir, al girar el campo. Subrayemos que en cierto momento de tiempo prefijado t-const la fase en el plano z-const no es constante. Una posibilidad de tal género se señaló al considerar una onda homogénea de tipo general en el § 61, punto 1.

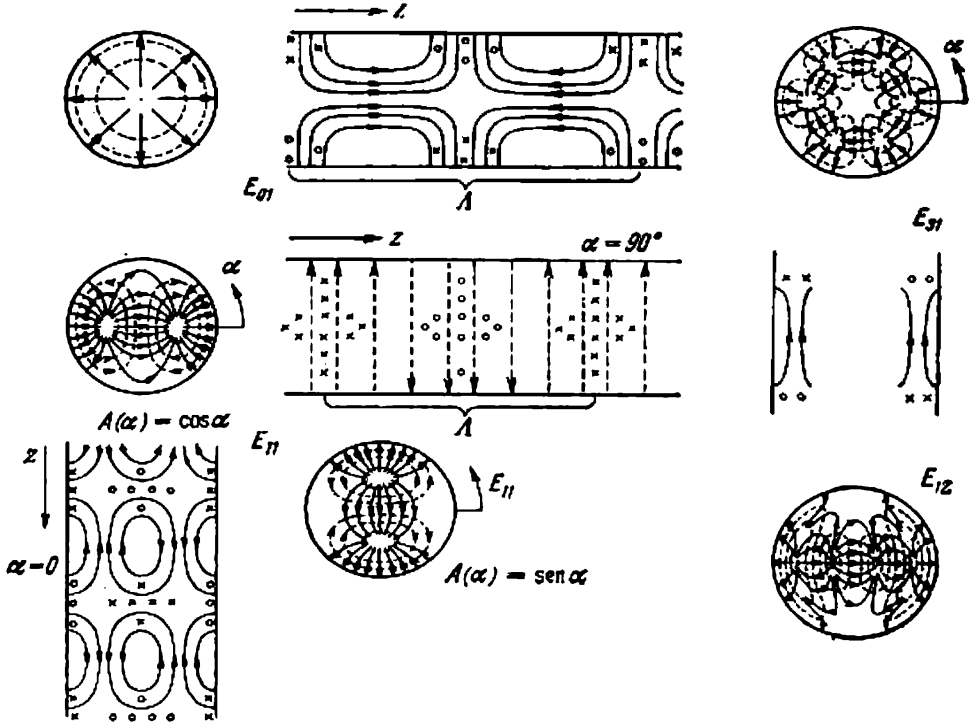


Fig. 65.2.

En el caso general, al confeccionar la combinación lineal de las funciones degeneradas $J_n(\chi r)\cos n\alpha$ y $J_n(\chi r)\,\text{sen}\,n\alpha$ o bien $J_n(\chi r)e^{-in\alpha}$ y $J_n(\chi r)e^{in\alpha}$ con los coeficientes complejos nos da una semejanza con la polarización elíptica.

Dirijámonos a la fig. 65.2, en la que se muestra la estructura de diversos campos del tipo E de una guía de onda circular. Los campos con $n = 0$, para los que la función $A(n\alpha)$ es una constante, no varian en dependencia del ángulo α, es decir, azimutalmente son homogéneos. Los demás campos están representados con una orientación que corresponde a $D = 0$ en la (65.2); sin embargo, en uno de los casos se muestra (el campo E_{11}) como varia la orientación azimutal con diferentes $A(n\alpha)$. Valiéndonos de la fig. 64.3, en la que están representados los campos del tipo E de una guía de ondas rectangular, para establecer una comparación, vemos in-

mediatamente rasgos de semejanza: al campo E_{11} de la guía de ondas rectangular es análogo el campo E_{01} de la circular, al campo E_{21} de la rectangular, el E_{11} de la circular, etc. Pero tal correspondencia no suele ser frecuente. En particular, en una guía de ondas rectangular no puede haber análogos a los campos del tipo E_{0m} de la circular, cuando $m \neq 1$.

En la fig. 65.3 que debe considerarse comparándola con la gráfica de las funciones de Bessel (fig. S6.1) y los cuadros de las líneas de fuerza en la fig. 65.2, se muestra como varía respecto al radio

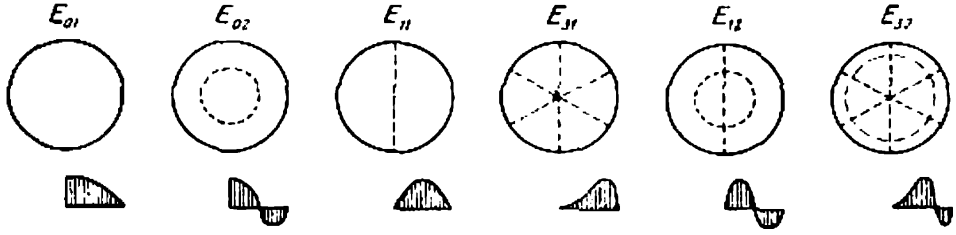


Fig. 65.3.

la componente longitudinal E_z de campos de diversos tipos. Realizando dicha comparación, el lector puede establecer fácilmente que característica del campo pueden dar los números m y n que son los índices de uno u otro tipo de E_{nm}. Como en la fig. 64.2, a trazos se muestran "líneas de nodos" en los que $E_z = 0$.

2. Ondas *H*. Planteando el segundo problema de contorno (62.12) en la forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial \alpha^2}+\chi^2 \dot{\mathcal{H}}_z = 0 \quad \begin{cases} 0 \leqslant r < R, \\ 0 \leqslant \alpha < 2\pi \end{cases} \\ &\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial r} = 0 \text{ para } r = R, \end{aligned}\right\} \quad (65.6)$$

descubrimos su coincidencia con el problema (S7.24) e, inmediatamente, escribimos la conocida solución:

$$\dot{\mathcal{H}}_z = \dot{\mathcal{H}}_z^{nm} = J_n(\chi_{nm} r)\left\{\begin{matrix} \dot{C}\cos n\alpha + \dot{D}\operatorname{sen} n\alpha \\ \dot{Q}e^{-in\alpha} + \dot{T}e^{in\alpha} \end{matrix}\right\} = J_n(\chi_{nm} r)\,A(n\alpha), \quad (65.7)$$

siendo

$$\chi^2 = \chi_{nm}^2 = \left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2 \quad \begin{cases} n = 0, 1, 2, \ldots, \\ m = 1, 2, \ldots \end{cases} \quad (65.8)$$

(A_{nm} son las raíces de las ecuaciones $J_n'(x) = 0$; véase la tabla en el Suplemento 6, punto 6).

Ahora, haciendo uso de las fórmulas (61.11) determinamos las amplitudes complejas de todas las componentes de los vectores E

y H del campo tipo H_{nm}:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{H}_{mz} &= J_n(\chi r)\, A\,(n\alpha)\, e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{H}_{mr} &= -i\,\frac{\dot{\Gamma}}{\chi}\, J_n'(\chi r)\, A\,(n\alpha)\, e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{H}_{m\alpha} &= -i\,\frac{n\dot{\Gamma}}{\chi^2 r}\, J_n(\chi r)\, A'\,(n\alpha)\, e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{E}_{mr} &= -i\,\frac{n\omega\dot{\mu}}{\chi^2 r}\, J_n(\chi r)\, A'\,(n\alpha)\, e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\dot{E}_{m\alpha} &= i\,\frac{\omega\dot{\mu}}{\chi}\, J_n'(\chi r)\, A\,(n\alpha)\, e^{-i\dot{\Gamma}z},\\
\chi &= \chi_{nm}
\end{aligned}\right\} \qquad (65.9)$$

(las designaciones, véase en el punto 1), siendo

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_{nm} = \sqrt{\dot{k}^2 - (A_{nm}/R)^2}. \qquad (65.10)$$

En la fig. 65.4 se muestra la estructura de diferentes campos H con una orientación que corresponde a $\dot{D} = 0$ en la (65.7).

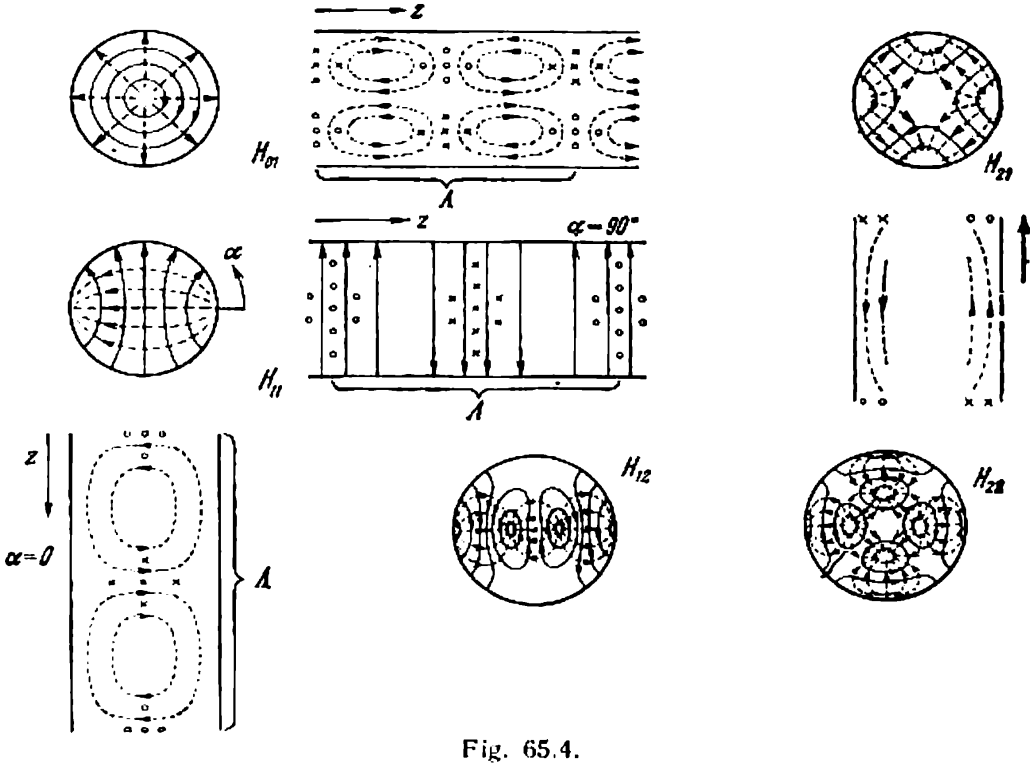


Fig. 65.4.

Lo mismo que anteriormente (punto 1) se observa una analogía entre una serie de campos de guías de ondas circular y rectangular; por ejemplo, son semejantes los campos H_{11} de la guía de ondas circular y H_{10} del rectangular. Sin embargo, como más arriba,

la analogía no se extiende a todos los tipos de campos. Así, en particular, en la guía de ondas circular no hay correspondencia con los campos H_{mn} de la guía de ondas rectangular, cuando m y n son pares. Los campos de más sencilla estructura, azimutalmente homogéneos de una guía de ondas circular H_{0m} (que no tienen análogos en la guía de ondas rectangular), son interesantes pues tienen en su cubierta sólo la componente longitudinal del vector $\boldsymbol{H}$ que, cuando $\lambda/R \to 0$, tiende a cero (esto también se refiere a otros campos, compárese con el § 64, punto 3) y, por consiguiente, al pasar al límite en la cubierta no habrá campo ni existirá corriente. La estructura de los campos se esclarece complementariamente mediante los diagramas H_z en la fig. 65.5.

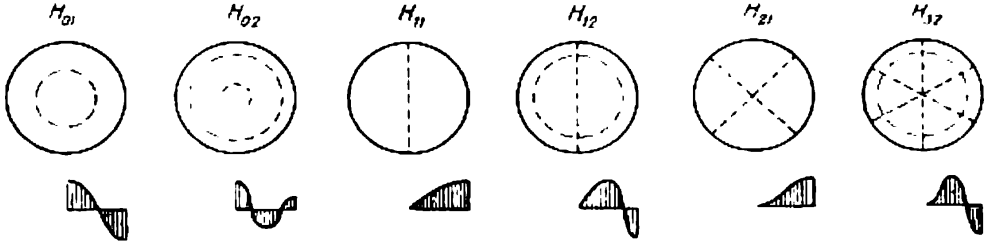


Fig. 65.5.

3. Ondas al no haber absorción. Tipos más sencillos de campos. Haciendo en las fórmulas obtenidas $\dot{\varepsilon} = \varepsilon$ y $\dot{\mu} = \mu$ ($\dot{k} = k$), llegamos al caso de una guía de ondas sin absorción en el medio interior. Al pasar a los símbolos utilizados en el § 62, punto 3, se tiene que:

para las ondas E

$$f_{\text{crít}} = f_{\text{crít}}^{nm} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{B_{nm}}{R} \quad \text{y}$$
$$\lambda_{\text{crít}} = \lambda_{\text{crít}}^{nm} = \frac{2\pi R}{B_{nm}}; \tag{65.11a}$$

para las ondas H

$$f_{\text{crít}} = f_{\text{crít}}^{nm} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{A_{nm}}{R} \quad \text{y}$$
$$\lambda_{\text{crít}} = \lambda_{\text{crít}}^{nm} = \frac{2\pi R}{A_{nm}}. \tag{65.11b}$$

Basándonos en las tablas del Suplemento 6, punto 6 se ha confeccionado la siguiente tabla de los valores de $\lambda_{\text{crít}}$ para ondas de diferentes tipos.

Sin considerar de nuevo las singularidades generales de la propagación de ondas que fue estudiada tanto en el § 62, punto 3 como en el ejemplo de la guía de ondas rectangular en el § 64, punto 3, remarquemos que en el caso dado, la onda principal es la del tipo H_{11}:

$$\min f_{\text{crít}}^{nm} = f_{\text{crít}}^{11}, \quad \max \lambda_{\text{crít}}^{nm} = \lambda_{\text{crít}}^{11} \approx 3{,}413\, R. \tag{65.12}$$

Longitudes de onda críticas λ_{crit}^{nm} reducidas a R

n \ m	1	2	3	4
	Ondas *E*			
0	2,612	1,138	0,726	0,5328
1	1,64	0,8955	0,6176	0,4716
2	1,223	0,7464	0,5407	0,4246
3	0,9847	0,6436	0,4827	0,3873
	Ondas *H*			
0	1,64	0,8955	0,6176	0,4716
1	3,413	1,178	0,736	0,5367
2	2,057	0,9369	0,6302	0,477
3	1,495	0,7839	0,5538	

Esta onda que por sus índices no es la más inferior, es, como ya se señaló, análoga según su estructura a la onda fundamental H_{10} de una guía de ondas rectangular. Nos podemos imaginar, como al convertirse gradualmente una guía de ondas circular en una rectangular, la onda H_{11} se transforma, deformándose, en la onda fundamental H_{10}.

A continuación, las longitudes de onda críticas se disponen en la siguiente sucesión:

$$\lambda_{crit}^{H_{11}} > \lambda_{crit}^{E_{01}} > \lambda_{crit}^{H_{21}} > \lambda_{crit}^{H_{01}} = \lambda_{crit}^{E_{11}} > \lambda_{crit}^{H_{31}} > \lambda_{crit}^{E_{21}} \ \ldots, \quad (65.13)$$

es decir, a medida que crece la frecuencia, tras la onda fundamental se propagará la onda E_{01}, después H_{21}, etc.

Desde el punto de vista de su definición, los campos más sencillos son E_{01} y H_{01}. El primero tiene las componentes E_z, E_r y H_α y el segundo, H_z, H_r y E_α. El campo principal H_{11} tiene todas las cinco componentes que vimos en (65.9). Proponemos al lector que escriba las expresiones para las magnitudes v_f, v_{gr}, Γ, Λ y $W^{E,H}$ para los campos E_{01}, H_{01} y H_{11} haciendo para ello uso de las fórmulas (62.18)—(62.20), (62.23), (62.15), así como de las fórmulas (65.11) y la tabla 65.1.

4. Transmisión de energía y atenuación de ondas. Calculemos la potencia que se transmite por la onda H_{11} sin absorción. En virtud de las (63.2) y (65.9) y designando, de acuerdo con las

(62.15), $\omega\mu/\Gamma = W^H$, se tiene

$$\overline{P} = \frac{W^H}{2}\int_0^R\int_0^{2\pi}(H_{mr}^2 + H_{m\alpha}^2)\,r\,dr\,d\alpha = \frac{W^H}{2}\left(\frac{\Gamma}{\chi}\right)^2\int_0^R\int_0^{2\pi}\left\{[J_1'(\chi r)\,|\,A(\alpha)|]^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{[J_1(\chi r)\,|\,A'(\alpha)\,|]^2}{\chi^2 r^2}\right\} r\,dr\,d\alpha.$$

Vamos a considerar una onda que se propaga sin rotación respecto al eje de la guía de ondas (punto 1) y hacemos que aquí $A(\alpha) = \dot{C}\cos\alpha$. Integrando respecto a α y, a continuación, verificando una sencilla sustitución de variables y teniendo en cuenta la (65.8), se tiene que

$$\overline{P} = \frac{W^H}{2}C^2\frac{\pi\Gamma^2}{\chi^4}\int_0^{A_{11}}\left[J_1'^2(x) + \frac{J_1^2(x)}{x^2}\right]x\,dx$$

y según la (S6.21), en virtud de la igualdad $J_1'(A_{11}) = 0$, se obtiene

$$\overline{P} = C^2\frac{\pi W^H\Gamma^2}{4\chi^4}(A_{11}^2 - 1)\,J_1^2(A_{11}), \qquad (65.14)$$

o bien

$$\overline{P} = E_0^2\frac{\pi R^2}{W^H}\frac{A_{11}^2 - 1}{A_{11}^2}J_1^2(A_{11}) \approx 0{,}75E_0^2\frac{R^2}{W^H}, \qquad (65.14a)$$

siendo $E_0 = (\Gamma W^H/2\chi)C$ la amplitud del vector E en el eje de la guía de ondas. Efectivamente, de las (65.9) para $A(\alpha) = \dot{C}\cos\alpha$ se desprende que

$$E_0 = E_{mr}\,|_{r=0,\ \alpha=90^\circ} = C\lim_{r\to 0}\frac{\Gamma W^H}{\chi_r^2}J_1(\chi r)\,\mathrm{sen}\,90^\circ = \frac{\Gamma W^H}{2\chi}C$$

(en el límite cuando $r \to 0$, la función $J_1(\chi r)$ se sustituye por el primer término de la serie exponencial (S6.10) $\chi r/2$).

Como podemos convencernos fácilmente, para la onda giratoria H_{11} *con* $\dot{A}(\alpha) = \dot{Q}e^{-i\alpha}$, hay que introducir en el segundo miembro *de la igualdad (65.14a) el coeficiente* 2.

Calculemos la potencia de la onda E_{01}. Tomando las fórmulas (63.2) y (65.4) ($A(n\alpha) = \dot{C}$), se escribe que

$$\overline{P} = \frac{W^E}{2}\int_0^R\int_0^{2\pi}H_{m\alpha}^2 r\,dr\,d\alpha = C^2\frac{W^E\omega^2\varepsilon^2}{2\chi^2}\int_0^R\int_0^{2\pi}J_1^2(\chi r)\,r\,dr\,d\alpha =$$
$$= \frac{\pi C^2\Gamma^2}{W^E\chi^2}\int_0^{B_{01}}J_1^2(x)\,x\,dx.$$

Teniendo en cuenta que $J_0(B_{01}) = 0$ y basandonos en la fórmula (S6.20), obtenemos

$$\overline{P} = \frac{\pi C^2 \Gamma^2 B_{01}^2 J_1^2(B_{01})}{2W^E \chi^4} = \frac{\pi C^2 \Gamma^2 R^4 J_1^2(B_{01})}{2B_{01}^2 W^E}. \qquad (65.15)$$

De forma análoga para la onda H_{01} ($A(n\alpha) = \dot{C}$)

$$\overline{P} = \frac{W^H}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} H_{mr}^2 r\, dr\, d\alpha = \frac{C^2 W^H \Gamma^2}{2\chi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_1^2(\chi r)\, r\, dr\, d\alpha =$$

$$= \frac{\pi C^2 W^H \Gamma^2}{\chi^4} \int_0^{A_{01}} J_1^2(x)\, x\, dx.$$

Pero como $J_0'(A_{01}) = 0$ (es decir, en virtud de la (S6.17) $J_1(A_{01}) = 0$), entonces, de acuerdo con la S6.20)

$$\overline{P} = \frac{\pi C^2 W^H \Gamma^2 A_{01}^2 J_0^2(A_{01})}{2\chi^4} = \frac{\pi C^2 W^H \Gamma^2 R^4 J_0^2(A_{01})}{2A_{01}^2}. \qquad (65.16)$$

Ahora, como lo hicimos al estudiar la guía de ondas rectangular (§ 64, *punto* 4), *consideremos la atenuación de ondas*. Puesto que el coeficiente Γ_d'' se halla por medio de fórmulas que ya conocemos (§ 63, punto 2), lo mismo que anteriormente será sólo necesario *tener en cuenta la absorción en el metal*.

Con objeto de determinar Γ_m'' para la onda fundamental H_{11}, calculemos primeramente la integral de contorno en el numerador de la (63.21). *Sea, como antes, que* $A(\alpha) = \dot{C}\cos\alpha$; *entonces*

$$\int_{L_\perp} H_m^2\, dl = \int_{L_\perp} (H_{m\alpha}^2 + H_{mz}^2)_{r=R}\, dl =$$

$$= C^2 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\Gamma}{\chi^2 R} \right)^2 J_1^2(\chi R) \operatorname{sen}^2\alpha + J_1^2(\chi R) \cos^2\alpha \right] R d\alpha =$$

$$= C^2 \pi J_1^2(A_{11}) \left[1 + \left(\frac{\Gamma}{\chi A_{11}} \right)^2 \right] R.$$

La integral en el denominador de la (63.21) se halla, haciendo uso del resultado acabado (65.14):

$$\int_{S_\perp} H_{mt}^2\, ds = \frac{2\overline{P}}{W^H} = C^2 \frac{\pi \Gamma^2}{2\chi^4} (A_{11}^2 - 1) J_1^2(A_{11}).$$

De forma que

$$\Gamma_m'' = \frac{\mathcal{R}_s}{W^H} \frac{1 + \frac{1}{A_{11}^2} \left(\frac{\Gamma}{\chi} \right)^2}{\left(\frac{\Gamma}{\chi} \right)^2 \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{11}^2} R} = \frac{\mathcal{R}_s \left[\left(\frac{\chi}{k} \right)^2 + \frac{1}{A_{11}^2 - 1} \right]}{W \frac{\Gamma}{k} R} =$$

$$= \frac{\mathcal{R}_s \left[\left(\frac{\lambda}{3{,}413R} \right)^2 + 0{,}418 \right]}{WR \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3{,}413R} \right)^2}}. \qquad (65.17)$$

Para la onda E_{01}

$$\int_{L_\perp} H_m^2\, dl = \int_{L_\perp} H_{m\alpha}^2\big|_{r=R}\, dl = \frac{2\pi C^2 \Gamma^2}{W^2 E^2 \chi^2} R J_1^2(B_{01}),$$

de modo que teniendo en cuenta la (65.15) y en virtud de la (63.21),

$$\Gamma_m'' = \frac{\mathcal{A}_S}{WER} = \frac{\mathcal{A}_S}{WR\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2{,}612R}\right)^2}}. \qquad (65.18)$$

Para la onda H_{01}

$$\int_{L_\perp} H_m^2\, dl = \int_{L_\perp} H_{mz}^2\Big|_{r=R}\, dl = 2\pi C^2 R J_0^2(A_{01})$$

y debido a la (65.16)

$$\Gamma_m'' = \frac{\mathcal{A}_S \chi^2}{WH\Gamma^2 R} = \frac{\mathcal{A}_S (\lambda/1{,}64R)^2}{WR\sqrt{1-(\lambda/1{,}64R)^2}}. \qquad (65.19)$$

Las fórmulas (65.17) y (65.18) obtenidas son cualitativamente parecidas a la fórmula (64.17). Efectivamente, las curvas de las dependencias $\Gamma_m''(f)$ para las ondas H_{11} y E_{01} de una guía de ondas circular, representadas en la fig. 65.6, *a*, *b*, nos recuerdan la gráfica análoga para la onda fundamental de guía de ondas rectangular (fig. 64.7). Un caracter absolutamente diferente, tiene la dependencia $\Gamma_m''(f)$ para la onda H_{01} de guía de ondas circular (fig. 65.6, *c*). Al crecer la frecuencia, el numerador de la (65.19) tiende a cero, cuando $f \to \infty$ y el coeficiente de atenuación Γ_m'' disminuye infinitamente. La explicación de este fenómeno se contiene en la observación verificada al final del punto 2. Realmente, si el campo y la corriente en la cubierta de la guía de ondas desaparecen para las ondas H_{0m} cuando $\lambda/R \to 0$, también cesa la absorción de energía que se transmite por la guía de ondas.

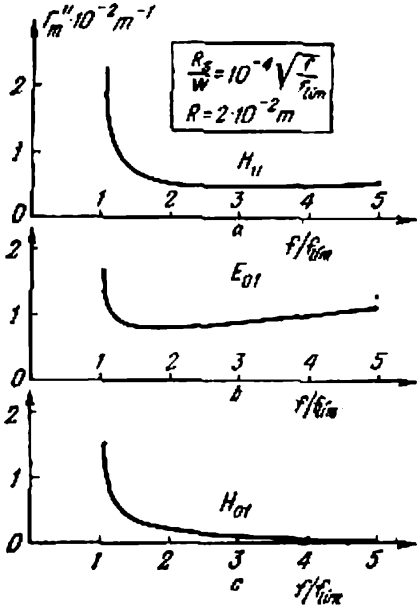


Fig. 65.6.

5. Conclusión. En la fig. 65.7 están representados los cuadros de las corrientes en la cubierta de guía de ondas para ondas H_{11}, E_{01} y H_{01}. En el primer caso, hallamos una semejanza con el cuadro de la corriente de la onda fundamental de una guía de ondas rectangular (fig. 64.8). A la onda E_{01} acompaña una corriente puramente longitudinal, mientras que a la onda H_{01}, puramente transversal (azimutal). En este último caso, la cubierta no porta carga,

Como señalamos en el punto 1, cada una de las ondas de una guía de ondas circular es doblemente degenerada. Por ejemplo, al hablar de la onda fundamental que no gira, conviene tener en cuenta dos estructuras orientadas ortogonalmente mostradas en la fig. 65.8. Este tipo de degeneración, relacionado con la simetría

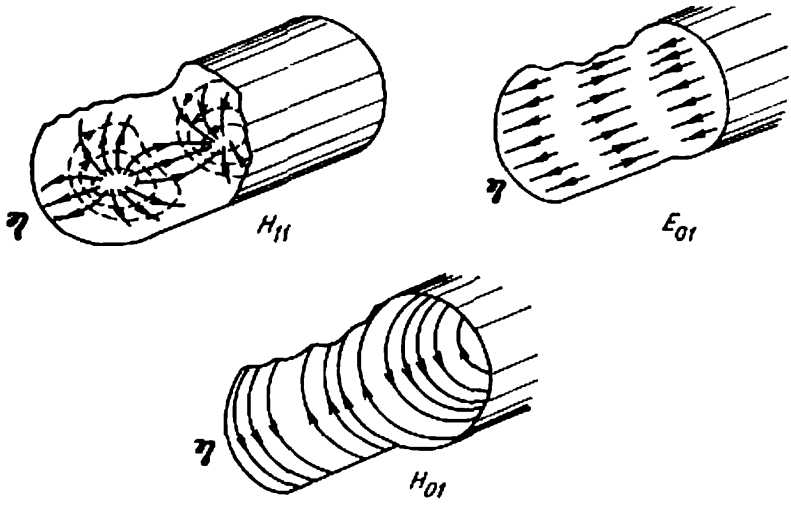


Fig. 65.7.

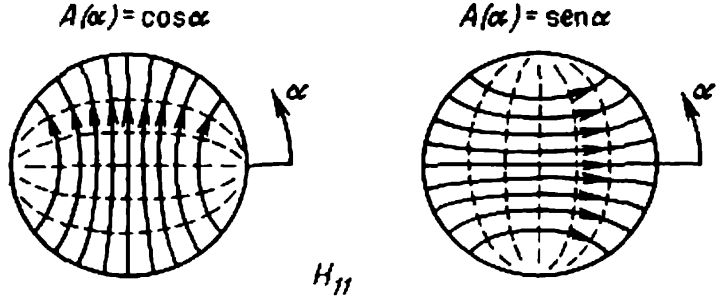


Fig. 65.8.

axial del sistema, es propio tanto para la guía de ondas idealizada, como para una real (con conductividad finita de la cubierta). A causa de la igualdad $B_{1m} = A_{0m}$ para todos los valores de m, también están degeneradas a pares las ondas E_{1m} y H_{0m} de una guía de ondas idealizada. Las respectivas ondas de una guía de ondas metálica, sólo tienen insignificantes diferencias de estructura y constantes de propagación que aunque no son iguales, son suficientemente próximas. Prácticamente, es extremadamente difícil crear las condiciones para la propagación de una sola onda H_{01} y de este modo realizar la transmisión de energía con absorción muy insignificante (punto 4).

Obsérvese que en una guía de ondas con cubierta no idealmente conductora, las ondas E_{0m} y H_{0m} azimutalmente homogéneas se

conservan (al pasar a un valor finito de σ no se crean en su lugar ondas *HE* y *EH*). Por ejemplo, la onda H_{01} que en la cubierta crea una corriente azimutal, adquiere una componente eléctrica E_α y no E_z. Sin embargo, sólo para muy pequeñas deformaciones de la guía de ondas, podemos decir que esta onda no entra en relación energética con campos de otros tipos (en particular con la onda E_{11}).

§ 66. Diferentes sistemas con dieléctrico homogéneo

1. Guías de ondas simplemente conexas. Las guías de ondas rectangular y circular (§§ 64, 65) son las más importantes entre los sistemas de guiado del tipo de tubo metálico. En la fig. 66.1, a, b, c, d se muestran varios tipos de la sección transversal de guías de ondas huecas, para las que la solución de los problemas (62.8) y (62.12) puede ser, como antes, obtenida en forma cerrada por medio de la separación de las variables. Para las regiones sectoriales (fig. 66.1, *a*, *b*) la solución de los problemas de este tipo se da en *el suplemento 7, punto 3 y el lector puede desarrollar la teoría de* las correspondientes guías de ondas repitiendo el esquema que allí

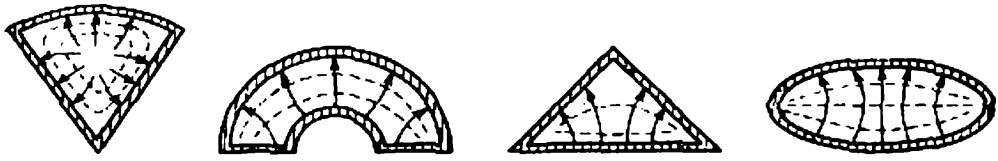


Fig. 66.1.

se emplea. Para la sección transversal triangular (fig. 66.1, *c*), los problemas (62.8) y (62.12) se resuelven en coordenadas cartesianas y para la elíptica (fig. 66.1, *d*), en coordenadas elípticas. Mientras la sección queda siendo convexa, se conserva el carácter general de la estructura de los campos y del transporte de energía; en la fig. 66.1 se muestran ciertos cuadros de las líneas de fuerza.

Las guías de ondas con sección transversal cóncava, como por ejemplo las llamadas *en Π* y *en H* (fig. 66.2, *a*) pueden tener frecuencias críticas $f_{\text{crít}}$ muy bajas (altas $\lambda_{\text{crít}}$). En este caso, el campo eléctrico de tipo principal está dispuesto en una estrecha holgura, mientras el magnético tiene una componente longitudinal relativamente pequeña, es decir, la onda es próxima a la TEM. Ciertas dependencias para la guía de ondas en *H* se muestran cualitativamente en la fig. 66.2, *b*.

Podemos demostrar que entre las ondas *E* y *H* de cualquier guía de ondas hueca, la onda *H* obligatoriamente tiene el número de onda transversal más bajo:

$$\min \chi_H^2 \leqslant \min \chi_E^2. \qquad (66.1)$$

Esto quiere decir que a la guía de ondas hueca simplemente conexa es propia la onda fundamental H.

El sistema abierto simplemente conexo más sencillo, es una línea monofilar. Al principio, en una línea monofilar formada por un conductor ideal es posible la existencia de una onda TEM. Las

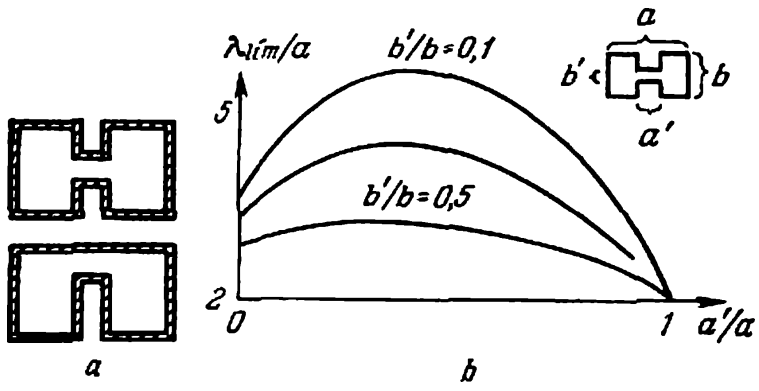


Fig. 66.2.

intensidades del campo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ deben estar, en tal caso, distribuidas por la sección transversal de la misma forma que al tratar campos estacionarios (§ 62, punto 1). Teniendo en cuenta la correlación entre $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ (62.6) y a base de las (24.1) y (62.1), escribimos que

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m = \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{\dot{I}_m}{2\pi r} e^{-i\dot{k}z}, \quad \dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{r}_0 \dot{W} \frac{\dot{I}_m}{2\pi r} e^{-i\dot{k}z} \tag{66.2}$$

cuando $r \geqslant R$ (fig. 66.3); para un conductor en el vacío $\dot{W} = W_0$, $\dot{k} = k_0$ y, calculando por medio de la fórmula (63.2) la energía que transporta la onda, se halla que

$$\overline{P} = \frac{I_m^2 W_0}{4\pi^2} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \frac{dr\, d\alpha}{r} =$$

$$= \frac{I_m^2 W_0}{2} \ln r \Big|_R^\infty \to \infty \text{ cuando}$$

$$I_m \neq 0, \tag{66.3}$$

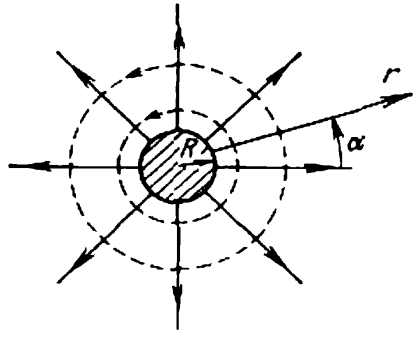


Fig. 66.3.

es decir, cuando en el conductor hay una corriente de cualquier valor finito, la potencia media resulta ser infinita. Por el contrario, una potencia finita corresponde a una corriente infinitamente pequeña y por consiguiente, a un campo infinitamente pequeño. Por esta razón, la onda que hemos considerado es físicamente inconcebible: desde este punto de vista, tal onda puede ser comparada con

una onda homogénea TEM (§ 32, 33) que tampoco es físicamente realizable.

Más adelante (§ 68), será demostrado que la cuestión varia al tener en cuenta la conductibilidad finita del metal de una linea monofilar real, pero en tal caso tiene importancia la falta de homogeneidad del medio que transporta la energia.

2. Sistemas biconexos y múltiplemente conexos. Tales sistemas biconexos y múltiplemente conexos como las lineas coaxiales, bifilares, etc. son principalmente, interesantes por su capacidad de guiar ondas TEM.

Tomando un sistema de dos conductores de tipo arbitrario, sin absorción, *demostremos que para la onda TEM las ecuaciones de* Maxwell nos llevan a las denominadas "ecuaciones telegráficas" respecto a la tensión y corriente en la línea.

El campo eléctrico de la onda TEM es potencial en cada uno de los planos transversales del sistema $z = \text{const}$, ya que es semejante a un campo electrostático (§ 62, punto 1). Por esto, podemos introducir el concepto de diferencia de potencial o bien *de la tensión* entre los conductores A y B del sistema de guiado en el plano transversal dado

$$U = \int_{(A)}^{(B)} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} \tag{66.4}$$

(cuando $z = \text{const}$, el comienzo y final del camino de integración se encuentran en diferentes conductores); como sabemos, la integral (66.4) no depende del camino de integración.

En dos planos transversales z y $z + \Delta z$ (fig. 66.4, *a*) trazamos los caminos de integración desde A hasta B y calculamos las tensiones $U(z)$ y $U(z + \Delta z)$ mediante la fórmula (66.4):

$$U(z) = \int_{(M)}^{(N)} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} \quad \text{y} \quad U(z + \Delta z) = \int_{(Q)}^{(P)} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}.$$

Al mismo tiempo

$$\oint_{(NMQP)} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\int_{(M)}^{(N)} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} + \int_{(Q)}^{(P)} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l},$$

puesto que en los conductores (sectores del camino NP y QM) $E_\tau = 0$. Por consiguiente

$$\int_{(NMQP)} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -U(z) + U(z + \Delta z) = \frac{dU}{dz}\Delta z + \ldots$$

De este modo, tomando la segunda ecuación de Maxwell (2.3), se tiene

$$\frac{dU}{dz}\Delta z + \ldots = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt}\Delta\Phi,$$

siendo S la superficie limitada por el contorno $NMQP$ y $\Delta\Phi$ el flujo magnético que pasa por ella. Al pasar al límite, cuando $\Delta z \to 0$

$$\frac{dU}{dz} = -\frac{d}{dt}\frac{d\Phi}{dz}.$$

Si $\mathscr{L}'$ es la inductancia que corresponde a la unidad de longitud del sistema (magnitud que se define para un campo *estacionario*,

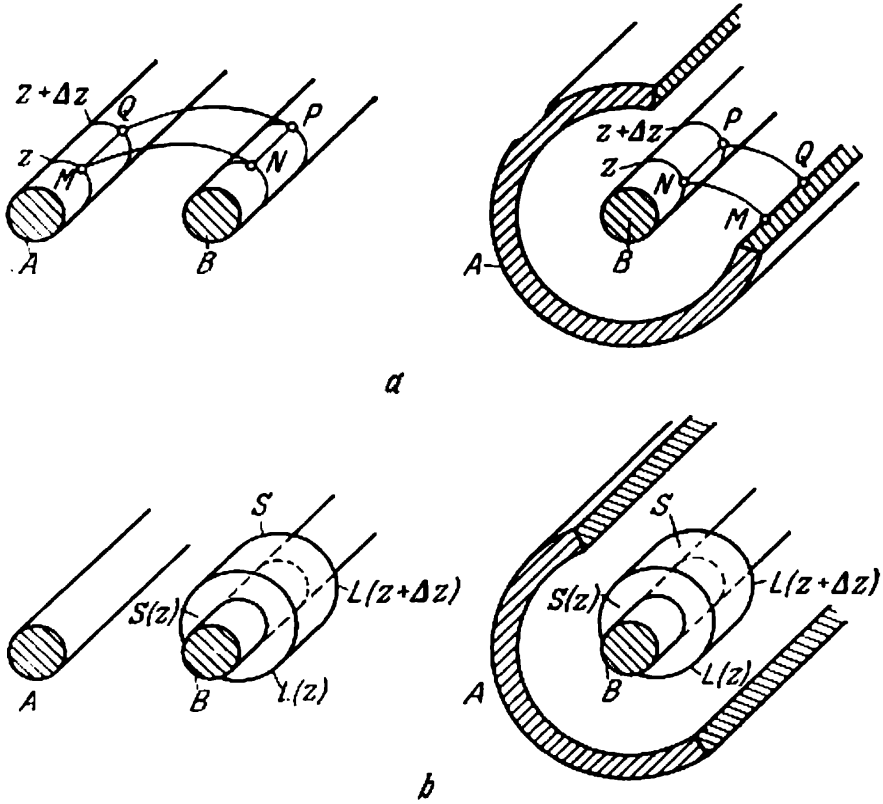


Fig. 66.4.

§ 25, punto 2), entonces $d\Phi/dz = \mathscr{L}' I$ y se obtiene que

$$\frac{dU}{dz} = -\mathscr{L}'\frac{dI}{dt}. \qquad (66.5)$$

Esta es una de las "ecuaciones telegráficas".

La segunda ecuación se halla del modo siguiente. Tomando los planos z y $z+\Delta z$ como bases, construimos un cilindro que abarca uno de los conductores (fig. 66.4, *b*). Designamos las áreas de las bases por $S(z)$ y $S(z+\Delta z)$ y la superficie lateral del cilindro, por S. Tomemos la primera ecuación de Maxwell (2.8). Aplicándola a las bases del cilindro, se tiene

$$\oint_{L(z)} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = I(z) \quad \text{y} \quad \oint_{L(z+\Delta z)} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = I(z+\Delta z),$$

siendo $L(z)$ y $L(z+\Delta z)$ los contornos de las bases del cilindro $S(z)$ y $S(z+\Delta z)$; ya que el vector $\boldsymbol{D}$ es paralelo a las bases, no hay corriente de desplazamiento (el campo TEM no tiene componente longitudinal eléctrica). Al mismo tiempo

$$\oint_{L(z)} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} - \oint_{L(z+\Delta z)} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \oint_{L} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l},$$

siendo L el contorno lateral de la superficie del cilindro S. Por esta razón

$$\oint_{L} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = I(z) - I(z+\Delta z) = -\frac{dI}{dz}\Delta z + \ldots$$

Seguidamente, en virtud de la ecuación de Maxwell (2.8) y el teorema de Gauss (3.4)

$$-\frac{dI}{dz}\Delta z + \ldots = \frac{d}{dt}\int_{S} \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{s} = \frac{d}{dt}\Delta q,$$

siendo Δq la carga del conductor en el sector Δz (como es natural, la corriente conductiva que pasa por la superficie lateral S no existe). De este modo, en el límite cuando $\Delta z \to 0$

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{d}{dt}\frac{dq}{dz}.$$

Dado C' la capacidad que corresponde a la unidad de longitud del sistema (se define al resolver el problema electrostático, § 17, punto 5). Entonces, $dq/dz = C'U$. Por consiguiente,

$$\frac{dI}{dz} = -C'\frac{dU}{dt}. \tag{66.6}$$

Esta es la segunda "ecuación telegráfica".

Pasemos a considerar una onda TEM armónica cuando el campo y, por consiguiente, la tensión y la corriente, varían según la ley $\cos(\omega t - kz - \varphi)$. Introduciendo en las ecuaciones telegráficas (66.5) y (66.6) las representaciones complejas de la corriente y la tensión $\dot{I} = I_m e^{i(\omega t - kz - \varphi_I)} = \dot{I}_m e^{i\omega t}$ y $\dot{U} = U_m e^{i(\omega t - kz - \varphi_U)} = \dot{U}_m e^{i\omega t}$, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} k\dot{U}_m &= \omega\mathscr{L}'\dot{I}_m, \\ k\dot{I}_m &= \omega C'\dot{U}_m. \end{aligned}\right\} \tag{66.7}$$

De aquí hallamos inmediatamente la expresión del número de onda $k = \omega/\sqrt{\varepsilon\mu}$ por medio de los parámetros $\mathscr{L}'$ y C' de un sistema biconexo:

$$k = \omega\sqrt{\mathscr{L}'C'}. \tag{66.8}$$

De aquí se desprende que tiene lugar la correlación

$$\varepsilon\mu = \mathscr{L}'C', \tag{66.9}$$

por ejemplo, por esto, la velocidad de fase de una onda TEM $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, será también igual a

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}'C'}}. \qquad (66.10)$$

Seguidamente, de la (66.7) se puede hallar la relación entre $\dot{U}_m$ e $\dot{I}_m$, que resulta ser igual a

$$W_t = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \sqrt{\frac{\mathscr{L}'}{C'}}. \qquad (66.11)$$

Esta es la *impedancia de onda* que se considera en la teoría de líneas de gran longitud (se trata del párrafo de la teoría de circuitos, bien conocida por el lector). Como W_t es una magnitud real, la corriente y tensión de una onda progresiva (móvil) TEM coinciden por fase (las fases iniciales φ_I y φ_U elegidas anteriormente, coinciden).

Como es natural, W_t y la impedancia de onda W introducida con anterioridad (62.6) son magnitudes diferentes. La última será para cualquier onda TEM igual a $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ (al no haber absorción). En lo que se refiere a W_t, esta impedancia de onda depende substancialmente del tipo del sistema de guiado. En virtud de lo expuesto anteriormente

$$W_t = \frac{\int_{(A)}^{(B)} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}}{\oint_L \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}}. \qquad (66.12)$$

En conclusión, escribamos las expresiones para las magnitudes $\mathscr{L}'$ y C' que se desprenden de las (66.11) y (66.10):

$$\mathscr{L}' = W_t\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{W_t}{v} \quad \text{y} \quad C' = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{W_t} = \frac{1}{W_t v}. \qquad (66.13)$$

Esto quiere decir que los parámetros $\mathscr{L}'$ y C' que se determinaban por medio de los problemas sobre los campos estacionarios, pueden también hallarse conociendo W_t y v; sin embargo para obtener W_t partiendo de (66.12), debemos, a su vez, conocer las intensidades $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ del campo de la onda TEM en el sistema que consideramos.

Y por fin, es oportuno hacer una restricción respecto a la definición de $\mathscr{L}'$, a base del problema sobre la corriente continua. El conductor del sistema de guiado se consideraba ideal ($\sigma \to \infty$), es decir, que de modo semejante al estacionario, el campo magnético de la onda TEM no existe en su interior y la corriente es superficial. Por este motivo, para hallar $\mathscr{L}'$ la corriente continua también debe tomarse superficial.

3. Onda *TEM* de una línea coaxial. La línea coaxial es importante desde un punto de vista técnico y, además, es un sistema

biconexo que se analiza sencillamente. Suponiendo que el conductor es ideal, debemos considerar las ondas E, H y TEM de dicho sistema.

Comencemos por la onda TEM. Su campo magnético tiene la misma estructura que él de un cable coaxial con corriente continua (§ 24, punto 1), mientras que el eléctrico, como el campo de un condensador coaxial (§ 17, punto 6), siendo $\dot{W}$ la relación entre $\dot{E}_m$ y $\dot{H}_m$. Por esta razón, las amplitudes complejas del campo de la onda TEM, tienen la forma

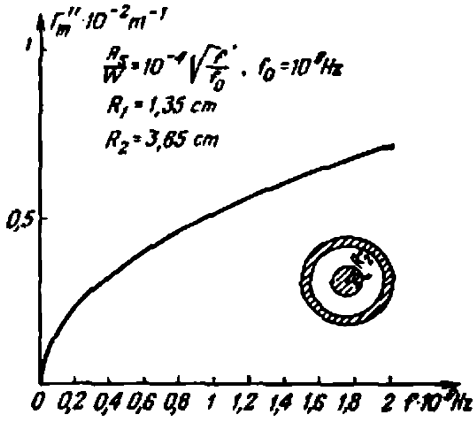


Fig. 66.5.

$$\dot{E}_m = r_0 \dot{W} \frac{\dot{I}_m}{2\pi r} e^{-ikr}, \quad (66.14)$$

$$\dot{H}_m = \alpha_0 \frac{\dot{I}_m}{2\pi r} e^{-ikr}$$

($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$). Estas expresiones sólo se diferencian de las obtenidas en el punto 1 al examinar una línea monofilar, por la región de existencia del campo (fig. 65.5) que ahora es limitada.

Calculemos la amplitud compleja de la tensión entre los conductores; a base de la (66.4)

$$\dot{U}_m = \int_{R_1}^{R_2} \dot{E}_m dr = \dot{W} \frac{\dot{I}_m}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\dot{W} \dot{I}_m}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (66.15)$$

y la impedancia de onda $\dot{W}_1$.

$$\dot{W}_1 = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{W}}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (66.16)$$

que en diferencia de la anterior es compleja, ya que hemos tomado el dieléctrico como absorbente. Para una línea llena de gas (por ejemplo, de aire) el medio interior no diverge prácticamente del vacío por sus características electrodinámicas ($\dot{W} = W = 120\pi$), de manera que

$$W_1 = 60 \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (66.16a)$$

También podemos obtener la fórmula (66.16) de acuerdo con la (66.11), tomando $\mathscr{L}'$ y C' de las soluciones de los problemas correspondientes estacionarios, cuando la región de existencia del campo es $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ (se sobreentiende que en estos problemas ε y μ son reales). Efectivamente, de acuerdo con las (17.17) y (25. 26),

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{y} \quad \mathscr{L}' = \frac{1}{2\pi} \mu \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (66.17)$$

y la raíz de sus razones nos da el resultado necesario. Una comprobación análoga demuestra que se satisface la correlación (66.10).

Al calcular la potencia de onda TEM, en virtud de (63.1) se halla

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\dot{W}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}[\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]_z\, r\, dr\, d\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\dot{W}\frac{I_m^2}{4\pi^2}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\frac{dr\, d\alpha}{r} =$$

$$= \operatorname{Re}\dot{W}\frac{I_m^2}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} = \operatorname{Re}\dot{W}_l\frac{I_m^2}{2}. \qquad (66.18)$$

La atenuación de la onda TEM debido a absorción en el dieléctrico, se halla según la fórmula general (63.6). Para poder tener en cuenta la absorción en el metal, conviene emplear el método energético, como lo hicimos al tratar las guías de ondas rectangular y circular. Al poner en (63.21)

$$\oint_{L_\perp} H_m^2\, dl = \int_0^{2\pi}(H_m^2|_{r=R_1}R_1 + H_m^2|_{r=R_2}R_2)\, d\alpha =$$

$$= \frac{I_m^2}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

y

$$\int_{S_\perp} H_{ml}^2\, ds = \frac{I_m^2}{4\pi^2}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\frac{dr\, d\alpha}{r} = \frac{I_m^2}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

se obtiene

$$\Gamma_m'' = \frac{\mathcal{R}_s(R_1+R_2)}{2WR_1R_2\ln\dfrac{R_2}{R_1}}. \qquad (66.19)$$

El coeficiente de atenuación Γ_m'' depende de la frecuencia a través de $\mathcal{R}_S$; en la fig. 66.5 se muestra un ejemplo de tal dependencia. Hay que tener en cuenta que los datos son sólo fidedignos en la región de elevado efecto Kelvin ($\Delta^\circ \ll R_1$) y, por esta razón, a bajas frecuencias no tienen sentido.

La expresión (66.19) puede hallarse de otro modo, introduciendo en la fórmula energética (63.12) $\bar{P}$ de la (66.18), para $\dot{W}_l = W_l$ y definiendo $\bar{p}_p$ como $I_m^2(\mathcal{R}_1' + \mathcal{R}_2')/2$ siendo $\mathcal{R}_1'$ y $\mathcal{R}_2'$ las resistencias de los conductores interior y exterior reducidas a la unidad de longitud; en virtud de la (40.20)

$$\mathcal{R}_1' = \frac{1}{2\pi R_1\Delta^\circ\sigma} = \frac{\mathcal{R}_s}{2\pi R_1} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_2' = \frac{1}{2\pi R_2\Delta^\circ\sigma} = \frac{\mathcal{R}_s}{2\pi R_2}$$

(fuerte efecto Kelvin). El contenido físico de tal deducción sigue siendo el mismo que antes. Al lector proponemos que lo aplique a aquel caso, en que los conductores interior y exterior de una línea coaxial son diferentes ($\sigma = \sigma_1$ y $\sigma = \sigma_2$).

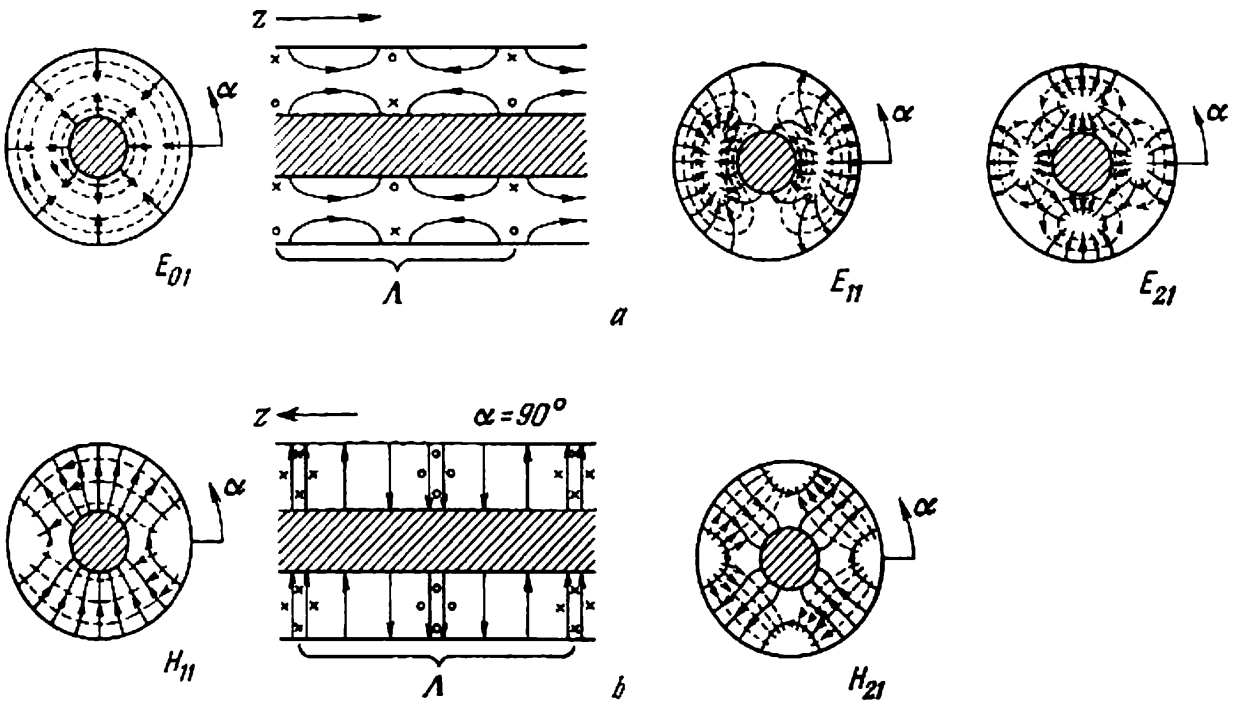


Fig. 66.6.

de onda son respectivamente las raíces de las ecuaciones (S7.21) y (S7.28). Según el conocido esquema, el lector puede escribir todas las componentes de los campos. La estructura de algunos de los campos más sencillos se muestra en la fig. 66.6. Las raíces de las ecuaciones transcendentes (S7.21) y (S7.28) se dan en los manuales (por ejemplo [K.3]). La onda de orden inferior H_{11} nos recuerda la onda semejante de una guía de ondas circular. Cuando las dimensiones R_1 y R_2 son relativamente próximas, $\lambda''_{crit} \approx \approx \pi(R_1 + R_2)$, es decir, el corte se produce cuando la longitud media de la circunferencia alrededor de la longitud de onda λ. Si $\lambda > \lambda''_{crit}$, en la línea coaxial puede sólo propagarse una onda del tipo *TEM*.

§ 67. Sistemas con medio no homogéneo

1. Sistema cilíndrico abierto. Solución general. Vamos a considerar una región en forma de un cilindro circular infinito homogéneo, ubicado en un medio homogéneo con otras propiedades (la sección transversal del sistema se muestra en la fig. 67.1); en su conjunto, el sistema no es homogéneo *transversalmente*. En dependencia de las propiedades de cada uno de los medios, el sistema que consideramos manifiesta diversas singularidades. Por ejemplo, si el medio exterior es un metal, y el interior, un dieléctrico, significa que se trata de una guía de ondas hueca, mientras que cuando la correlación es inversa, se tratará de una línea monofilar; si el medio interior es un dieléctrico con mayor densidad que el exterior, tendremos una guía de ondas dieléctrica.

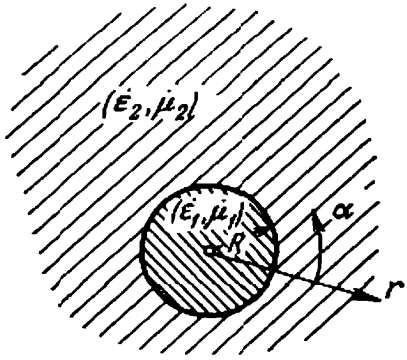


Fig. 67.1.

Expresemos la solución de las ecuaciones de electrodinámica para el sistema que investigamos en forma de la onda guiada del tipo más general que tiene componentes longitudinales tanto eléctrica como magnética. Las funciones $\dot{\mathcal{E}}_z$ y $\dot{\mathcal{H}}_z$ son las soluciones de las ecuaciones escalares de Helmholtz, obtenidas al proyectar (61.4) y (61.5) en el eje z y, por esto, podemos escribirlas inmediatamente (con el debido grado de indeterminación) haciendo uso de la forma general de solución del suplemento 7, punto 3. Tomemos $\dot{\mathcal{E}}_z$ y $\dot{\mathcal{H}}_z$ en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_z &= \dot{C}_1 J_n(\dot{\chi}_1 r)\cos n\alpha, \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= \dot{C}_2 J_n(\dot{\chi}_1 r)\cos(n\alpha - \psi) \text{ para } r \leqslant R, \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= \dot{C}'_1 H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)\cos n\alpha, \\ \dot{\mathcal{H}}_z &= \dot{C}'_2 H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)\cos(n\alpha - \psi) \text{ para } r \geqslant R, \end{aligned} \tag{67.1}$$

siendo, en virtud de la (61.3)

$$\dot{\chi}_1^2 - \dot{k}_1^2 - \dot{\Gamma}^2 \quad \text{y} \quad \dot{\chi}_2^2 = \dot{k}_2^2 - \dot{\Gamma}^2, \tag{67.2}$$

donde $\dot{k}_1^2 = \omega^2 \dot{\varepsilon}_1 \dot{\mu}_1$ y $\dot{k}_2^2 = \omega^2 \dot{\varepsilon}_2 \dot{\mu}_2$.

Las fórmulas (67.1) necesitan ciertas aclaraciones. La elección de la dependencia radial $J_n(\dot{\chi}_1 r)$ ($B = 0$ en la (S7.17)), cuando $r \leqslant R$ corresponde a la exigencia de la limitación de la solución para $r \to 0$ (véase el suplemento 6, punto 1). La elección de la dependencia $H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)$ cuando $r \geqslant R$ ($P = 0$ en la (S7.17)), satisface a la condición (S6.9); si $P \neq 0$ para un medio absorbente, tendríamos una solución ilimitadamente creciente en la infinidad. La dependencia azimutal en (67.1) describe cierta orientación fijada del campo (compárese con el § 65, punto 1); por el momento, el desplazamiento azimutal ψ de las distribuciones de $\dot{\mathcal{E}}_z$ y $\dot{\mathcal{H}}_z$ no lo conocemos. La identicidad de la dependencia azimutal en ambos medios, se desprende de la exigencia de la continuidad de $\dot{\mathcal{E}}_z$ y $\dot{\mathcal{H}}_z$ en la superficie de separación; partiendo de estas consideraciones, a continuación, se tiene

$$\dot{C}_1' = \dot{C}_1 \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)} \quad \text{y} \quad \dot{C}_2' = \dot{C}_2 \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}. \tag{67.3}$$

De las (67.2) se desprende que:

$$\dot{\chi}_1^2 - \dot{\chi}_2^2 = \dot{k}_1^2 - \dot{k}_2^2. \tag{67.4}$$

A base de las (67.1), expresemos las dependencias transversales de todas las componentes de los vectores del campo por medio de las fórmulas (61.9).

Cuando $r < R$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_r &= -i\dot{C}_1 \frac{\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_1} J_n'(\dot{\chi}_1 r)\cos n\alpha + i\dot{C}_2 \frac{n\omega\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1^2 r} J_n(\dot{\chi}_1 r)\operatorname{sen}(n\alpha - \psi),\\
\dot{\mathcal{E}}_\alpha &= i\dot{C}_1 \frac{n\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_1^2 r} J_n(\dot{\chi}_1 r)\operatorname{sen} n\alpha + i\dot{C}_2 \frac{\omega\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1} J_n'(\dot{\chi}_1 r)\cos(n\alpha - \psi),\\
\dot{\mathcal{H}}_r &= -i\dot{C}_1 \frac{n\omega\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\chi}_1^2 r} J_n(\dot{\chi}_1 r)\operatorname{sen} n\alpha - i\dot{C}_2 \frac{\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_1} J_n'(\dot{\chi}_1 r)\cos(n\alpha - \psi),\\
\dot{\mathcal{H}}_\alpha &= -i\dot{C}_1 \frac{\omega\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\chi}_1} J_n'(\dot{\chi}_1 r)\cos n\alpha + i\dot{C}_2 \frac{n\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_1^2 r} J_n(\dot{\chi}_1 r)\operatorname{sen}(n\alpha - \psi);
\end{aligned}\right\} \tag{67.5}$$

si $r > R$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_r = -i\frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}\Big[&\dot{C}_1 \frac{\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2} H_n^{(2)\prime}(\dot{\chi}_2 r)\cos n\alpha -\\
&- \dot{C}_2 \frac{n\omega\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2^2 r} H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)\operatorname{sen}(n\alpha - \psi)\Big],
\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_\alpha &= i\,\frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}\left[\dot{C}_1\frac{n\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2^2 r}H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)\operatorname{sen} n\alpha + \right.\\
&\left. + \dot{C}_2\frac{\omega\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2}H_n^{(2)\prime}(\dot{\chi}_2 r)\cos(n\alpha-\psi)\right],\\
\dot{\mathcal{H}}_r &= -i\,\frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}\left[\dot{C}_1\frac{n\omega\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\chi}_2^2 r}H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)\operatorname{sen} n\alpha + \right.\\
&\left. + \dot{C}_2\frac{\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2}H_n^{(2)\prime}(\dot{\chi}_2 r)\cos(n\alpha-\psi)\right],\\
\dot{\mathcal{H}}_\alpha &= -i\,\frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}\left[\dot{C}_1\frac{\omega\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\chi}_2}H_n^{(2)\prime}(\dot{\chi}_2 r)\cos n\alpha - \right.\\
&\left. - \dot{C}_2\frac{n\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2^2 r}H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)\operatorname{sen}(n\alpha-\psi)\right].
\end{aligned}
\right\} \quad (67.5)
$$

Exigiendo la continuidad de las componentes tangenciales de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ en la superficie de separación de los medios igualamos las dos expresiones de $\dot{\mathcal{E}}_\alpha$ y $\dot{\mathcal{H}}_\alpha$ para $r=R$. Esta operación nos da que

$$
\dot{C}_1 \operatorname{sen} n\alpha\,\frac{n\dot{\Gamma}}{R}J_n(\dot{\chi}_1 R)\left(\frac{1}{\dot{\chi}_1^2}-\frac{1}{\dot{\chi}_2^2}\right) =
$$

$$
= \omega\dot{C}_2\cos(n\alpha-\psi)\left[-\frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1}J_n'(\dot{\chi}_1 R)+\frac{\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2}\frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}H_n^{(2)\prime}(\dot{\chi}_2 R)\right]
$$

y

$$
\omega\dot{C}_1\cos n\alpha\left[-\frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1}J_n'(\dot{\chi}_1 R)+\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\chi}_2}\frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}H_n^{(2)\prime}(\dot{\chi}_2 R)\right] =
$$

$$
= \dot{C}_2\operatorname{sen}(n\alpha-\psi)\frac{n\dot{\Gamma}}{R}J_n(\dot{\chi}_1 R)\left(\frac{1}{\dot{\chi}_1^2}-\frac{1}{\dot{\chi}_2^2}\right).
$$

Las igualdades escritas pueden sólo cumplirse cuando las dependencias azimutales en sus miembros primero y segundo son idénticas, lo que exige que: $\psi = 90°$.

Después de sencillas transformaciones y teniendo en cuenta la (67.4), se escribe

$$
\dot{C}_1\frac{n\dot{\Gamma}}{\omega\dot{\mu}_2}\frac{\dot{k}_1^2-\dot{k}_2^2}{\dot{\chi}_1\dot{\chi}_2} = \dot{C}_2\left[\frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\mu}_2}\dot{\chi}_2 R\frac{J_n'(\dot{\chi}_1 R)}{J_n(\dot{\chi}_1 R)}-\dot{\chi}_1 R\frac{H_n^{(2)\prime}(\dot{\chi}_2 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}\right] \quad (67.6)
$$

y

$$
-\dot{C}_2\frac{n\dot{\Gamma}}{\omega\dot{\varepsilon}_2}\frac{\dot{k}_1^2-\dot{k}_2^2}{\dot{\chi}_1\dot{\chi}_2} = \dot{C}_1\left[\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2}\dot{\chi}_2 R\frac{J_n'(\dot{\chi}_1 R)}{J_n(\dot{\chi}_1 R)}-\dot{\chi}_1 R\frac{H_n^{(2)\prime}(\dot{\chi}_2 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}\right] \quad (67.7)
$$

Y por fin, de las (67.6) y (67.7) pueden ser eliminados los factores de cresta $\dot{C}_1$ y $\dot{C}_2$ y como resultado, se obtiene la siguiente ecuación transcendente respecto a los números de onda transver-

sales $\dot{\chi}_1$ y $\dot{\chi}_2$ que se considera conjuntamente con la (67.4):

$$-n^2\frac{\dot{\Gamma}^2k_2^2}{\dot{\chi}_1^2\dot{\chi}_2^2}\left(\frac{\dot{k}_1^2}{\dot{k}_2^2}-1\right)^2=\left[\frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\mu}_2}\dot{\chi}_2R\frac{J_n'(\dot{\chi}_1R)}{J_n(\dot{\chi}_1R)}-\dot{\chi}_1R\frac{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2R)}\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2}\dot{\chi}_2R\frac{J_n'(\dot{\chi}_1R)}{J_n(\dot{\chi}_1R)}-\dot{\chi}_1R\frac{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2R)}\right]. \qquad (67.8)$$

2. Guía de ondas dieléctrica. Primeramente, empleemos los resultados obtenidos para estudiar un sistema de guiado en forma de un cilindro dieléctrico situado en un medio ópticamente menos denso (por lo general, este medio es el aire).

Como nos muestran las fórmulas (67.5), en el caso general, el campo de una guía de ondas dieléctrica no puede ser clasificado como del tipo E o bien como del H. Sin embargo, por ejemplo, la comparación de las expresiones para las componentes de los vectores $\dot{\mathfrak{E}}$ y $\dot{\mathfrak{H}}$ siendo $r<R$ con las fórmulas para una guia de ondas hueca (65.4) y (65.9), nos lleva a la deducción de que, al parecer, se trata de las combinaciones de los campos de los tipos E y H, ya conocidos.

$$\dot{\mathfrak{E}}=\dot{C}_1\dot{\mathfrak{E}}^E+\dot{C}_2\dot{\mathfrak{E}}^H,\quad \dot{\mathfrak{H}}=\dot{C}_1\dot{\mathfrak{H}}^E+\dot{C}_2\dot{\mathfrak{H}}^H. \qquad (67.9)$$

Además, es posible la existencia de campos de los tipos puramente E y H. Suponiendo que en la (67.8) $n=0$, o sea, considerando que los campos son azimutalmente homogéneos, reducimos a cero el primer miembro de dicha ecuación transcendente. Esto significa que es igual a cero una de las expresiones entre corchetes en el segundo miembro. Sea, por ejemplo, que hemos elegido el primer factor entre corchetes. Del hecho que lo reducimos a cero, se desprende la eliminación del segundo miembro de la igualdad (67.6) y de donde $\dot{C}_1=0$. Esto significa que el campo azimutalmente homogéneo es de la clase H. Pero si es igual a cero el segundo factor del segundo miembro de la (67.8), junto con él también se elimina el segundo miembro de la igualdad (67.7); en este caso, $\dot{C}_2=0$ y, por lo tanto, tenemos un campo del tipo E. Así los campos azimutalmente homogéneos de una guía de ondas dieléctrica pueden ser del tipo H o del tipo E.

Para los campos azimutalmente homogéneos ($n=0$), la ecuación (67.8) se "descompone" en dos ecuaciones más sencillas que corresponden a la eliminación de uno de los factores en el segundo miembro. Después de realizar insignificantes transformaciones, teniendo en cuenta la (S6.17), escribimos las ecuaciones anteriormente indicadas:

$$\frac{\dot{\mu}_2}{\dot{\mu}_1}\dot{\chi}_1R\frac{J_0(\dot{\chi}_1R)}{J_1(\dot{\chi}_1R)}=\dot{\chi}_2R\frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2R)}\ \text{(ondas } H\text{)} \qquad (67.10)$$

y

$$\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}\dot{\chi}_1R\frac{J_0(\dot{\chi}_1R)}{J_1(\dot{\chi}_1R)}=\dot{\chi}_2R\frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2R)}\ \text{(onda } E\text{)}. \qquad (67.11)$$

Como podemos ver, al ser iguales las razones $\dot{\mu}_2/\dot{\mu}_1 = \dot{\varepsilon}_2/\dot{\varepsilon}_1$ las dos ecuaciones coinciden de modo que en tales condiciones los campos azimutalmente homogéneos E y H resultan ser degenerados.

El carácter de la propagación de ondas en una guía de ondas dieléctrica ya se investigó en el § 39, punto 4 al considerar un sencillo ejemplo de simulación. Leyes análogas podemos ahora observar en el caso de un vástago dieléctrico. Detengámonos en la investigación de las ondas azimutalmente homogéneas E, sin ($\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1$, $\dot{\mu}_1 = \mu_1$ y $\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2$, $\dot{\mu}_2 = \mu_2$, es decir, $\dot{k}_1 = k_1$ y $\dot{k}_2 = k_2$). Supongamos que el número de onda transversal $\dot{\chi}_1$ es real y, por esta razón, también es real el primer miembro de la ecuación (67.11); para que esta última pueda tener solución, el número $\dot{\chi}_2$ debe ser puramente imaginario, ya que sólo en este caso será real el segundo miembro (se recomienda que el lector verifique la correspondiente comprobación mediante la fórmula (56.8) para un cilindro de radio infinito). Como $\dot{\chi}_1^2 > 0$ y $\dot{\chi}_2^2 < 0$, entonces, en virtud de la (67.2)

$$k_1^2 > \Gamma^2 > k_2^2 \tag{67.12}$$

(compárese con la (39.24)), es decir, que las ondas siendo rápidas respecto a la parte interior del vástago continúan siendo lentos para el medio exterior. A causa de que $\dot{\chi}_2$ es imaginario (para el debido signo: $\dot{\chi}_2 = -i\beta$, $\beta > 0$), las funciones de Hankel de segundo orden en las (67.5) expresan el carácter superficial de dichas ondas.

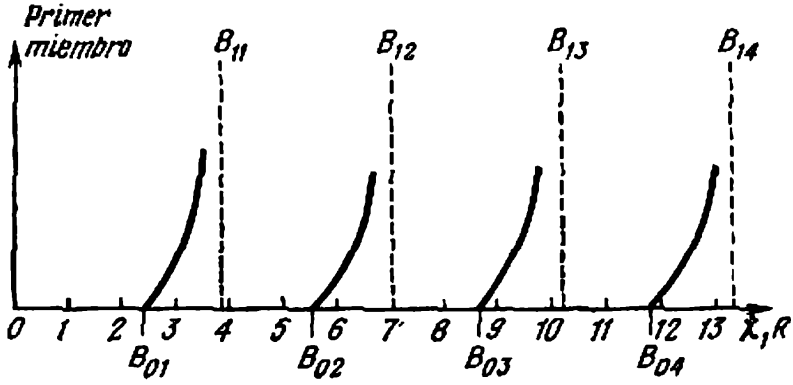


Fig. 67.2.

En la fig. 67.2 se muestra cualitativamente la dependencia del módulo del primer miembro de la ecuación (67.11) de su argumento $\chi_1 R$. La curva forma una serie de ramas que comienzan en puntos en el eje de las abscisas, para los que el numerador $J_0(\chi_1 R)$ es igual a cero y que asintóticamente son tangentes a las rectas verticales que corresponde a la conversión del denominador $J_1(\chi_1 R)$ en cero. De este modo, la primera rama se encuentra en la región de los

valores del argumento $B_{01} < \dot{\chi}_1 R < B_{11}$, es decir, $2{,}405 < \dot{\chi}_1 R < 3{,}832$ y, en general, para una rama arbitraria

$$B_{0m} < \dot{\chi}_1 R < B_{1m}. \tag{67.13}$$

En estos límites se encuentran las raíces de la ecuación (67.11). Cada una de estas raíces puede ser hallada gráficamente por la intersección de las curvas que representan las funciones en los miembros primero y segundo de (67.11); esto se muestra en la fig. 67.3.

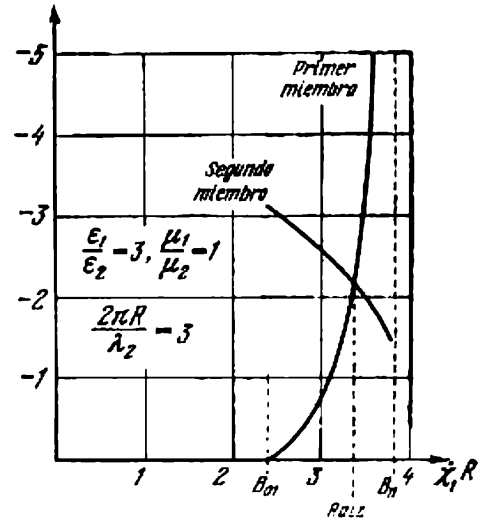


Fig. 67.3.

Cercioremonos de que la superficie de un cilindro dieléctrico se comporta como una superficie inductiva de impedancia, es decir, en la correlación del tipo (62.30) que tiene el aspecto

$$\dot{E}_m(R) = \dot{z}_s [\dot{H}_m(R), -r_0] \tag{67.14}$$

será $\dot{z}_S = i\dot{x}_S$, $\dot{x}_S > 0$. Aplicando las (67.1) y (67.5), se tiene que

$$\dot{z}_S = \frac{\dot{E}_{mz}}{\dot{H}_{m\alpha}} = -i \frac{\dot{\chi}_1}{\omega \varepsilon_1} \frac{J_0(\dot{\chi}_1 R)}{J_1(\dot{\chi}_1 R)}.$$

La correlación exigida se satisface, puesto que en las regiones del argumento (67.13), las funciones $J_1(\dot{\chi}_1 R)$ y $J_0(\dot{\chi}_1 R)$ tienen diferentes signos, lo que fácilmente se comprende en la fig. S6.1.

El grado de concentración de la energía que se transmite por un vástago dieléctrico (rapidez de decrecimiento del campo en el sentido radial fuera de la guía de ondas), depende directamente de la magnitud $\dot{\chi}_2 = -i\beta$. Mientras menor sea β, más débil será el decrecimiento del campo. Debemos considerar que la frecuencia crítica para la onda de una guía de ondas dieléctrica, es aquella con la que χ_2 se reduce a cero:

$$\dot{\chi}_2(\omega) = 0 \text{ cuando } \omega = \omega_{crit}. \tag{67.15}$$

En tal caso, a base de las (67.2) y (67.11), tenemos que

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= k_2, \\ J_0(\dot{\chi}_1 R) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \omega = \omega_{crit}, \tag{67.16}$$

o sea, para $\omega = \omega_{crit}$, el argumento $\dot{\chi}_1 R$ es igual a B_{0m}. Cuando $\omega = \omega_{crit}$, la igualdad (67.4) nos da $(B_{0m}/R)^2 = \omega_{crit}^2 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)$, es decir,

$$\omega_{crit} = \frac{B_{0m}}{R} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}} \tag{67.17}$$

(compárese con la (39.31)). A la frecuencia crítica, el vástago no concentra energía; tampoco hay retardación: en virtud del primer renglón de la (67.16)

$$v_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \quad \text{cuando } \omega = \omega_{crit}. \tag{67.18}$$

En el medio exterior tenemos una onda *TEM* que se propaga a lo largo de la dirección del vástago; mientras que la parte de energía en su interior es infinitamente pequeña. Para aclarar la esencia del proceso de nuevo debemos utilizar la construcción en la fig. 39.9 que ya fue examinada por nosotros: la onda del tipo dado se destruyó, ya que para $\omega = \omega_{crit}$ dejó de cumplirse en la superficie de separación del vástago la condición de la reflexión total de las ondas parciales interiores que las componen.

Todas las consideraciones se referían directamente a las ondas azimutalmente homogéneas E; ellas también transpasan casi sin variaciones, a las ondas H, pues las diferencias entre las ecuaciones (67.10) y (67.11) son insignificantes. En lo que se trata a las demás ondas de una guía de ondas dieléctrica que tienen componentes longitudinales de los dos vectores del campo, su análisis es ya más complicado, pero las leyes de propagación generales son parecidas. Forma una exclusión la onda fundamental de la guía de ondas dieléctrica EH_{11} ($n = 1$ en la (67.8); raíz de orden inferior), cuya frecuencia crítica resulta ser igual a cero. Esta onda no sufre a ninguna frecuencia la destrucción descrita anteriormente, lo que, sin embargo, no significa que la guía de ondas dieléctrica es capaz de canalizar energía para frecuencias arbitrariamente bajas.

Al disminuir la frecuencia, la parte de energía que se propaga por el interior del vástago es cada vez más pequeña, lo que se ilustra en la gráfica de la fig. 67.4, *b*; en la fig. 67.4, *a* están representadas dependencias entre la velocidad de fase de la onda EH_{11} y la densidad y grosor del vástago.

A medida que disminuye la frecuencia la estructura del campo de la onda EH_{11} fuera de la guía de ondas se aproxima a la de la onda del espacio libre del tipo más sencillo, es decir, a una onda homogénea *TEM* que fue estudiada en los §§ 32,33. Parece como si el vástago perturbara una onda homogénea *TEM* ya existente. Naturalmente que al cumplir la condición de carácter cuasiestacionario ($R \ll \lambda_1$), el campo en el interior del vástago se halla con facilidad partiendo de que conocemos la onda *TEM* no perturbada. Sea para ella $\dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{x}_0 \dot{A} e^{-ik_1 z}$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m = \boldsymbol{y}_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} e^{-ik_1 z}$. Entonces, en el interior de un cilindro dieléctrico

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m \approx \boldsymbol{x}_0 \frac{2\dot{A}\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2} e^{-ik_2 z}$$

y

$$\dot{H}_m \approx y_0 \frac{2\dot{A}\dot{\mu}_3}{\dot{W}_2(\dot{\mu}_1+\dot{\mu}_3)} e^{-ik_z z}.$$

Este resultado se ha obtenido generalizando directamente las fórmulas (20.19) y (21.8), compárese con el § 50, punto 4.

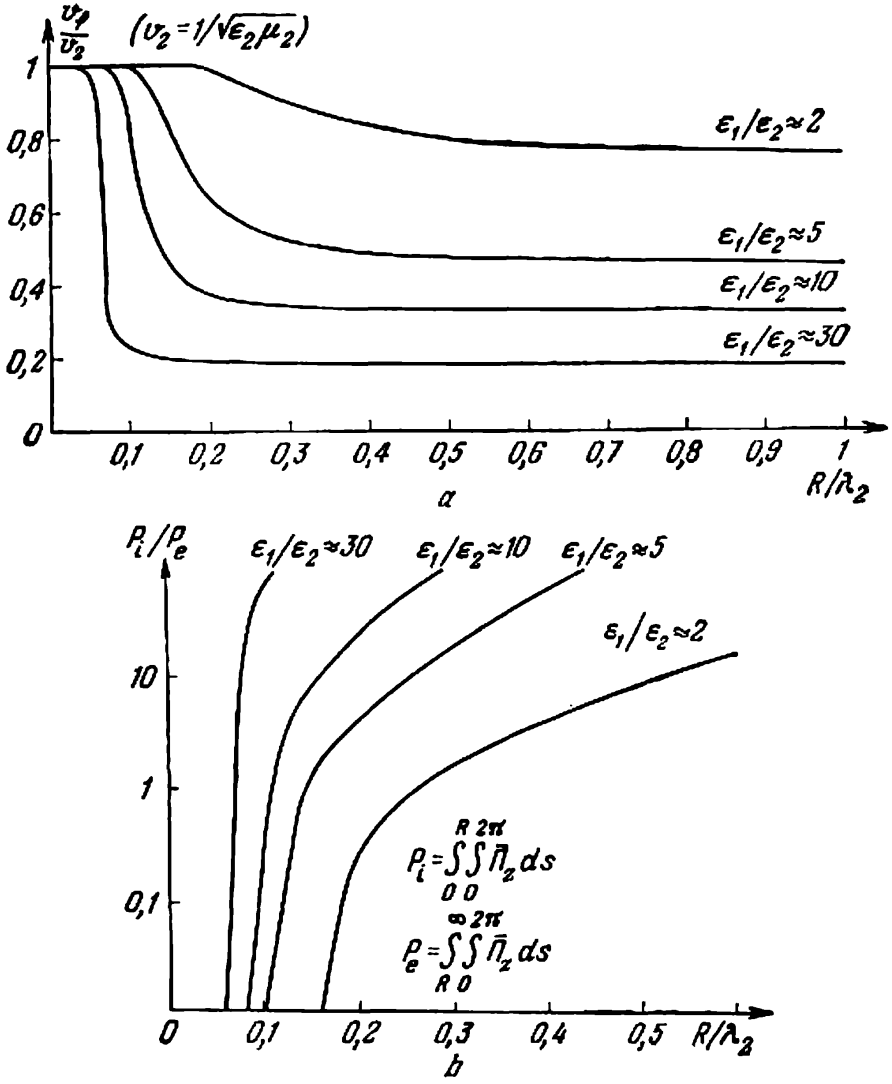


Fig. 67.4

Las guías de ondas dieléctricas tienen aplicación, en particular, en el diapasón óptico; en este caso son filiformes y se denominan "fibras ópticas". De lo dicho anteriormente se desprende que en una guía de ondas diléctrica de diámetro suficientemente pequeño puede existir sólo una onda guiada EH_{11}. No obstante, para ello

es preciso que las frecuencias críticas que corresponden a los demás tipos de ondas sean más elevadas que la frecuencia de trabajo. Examinemos, por ejemplo, la onda E_{np}. De acuerdo con la igualdad (67.17) las frecuencias críticas son tanto más elevadas mientras menor sea el tamaño transversal de la guía de ondas dieléctrica (radio R) y más próximas por su densidad óptica sean los medios interior y exterior; efectivamente bajo la raíz del denominador se halla la diferencia de las magnitudes $\varepsilon_1\mu_1$ y $\varepsilon_2\mu_2$ (también se puede hablar sobre la diferencia de los números de onda o de los factores de refracción). Como en el caso de una guía de ondas óptica la disminución de R choca rápidamente con dificultades tecnológicas, para la creación de un régimen unimodal (así se denominan las condiciones de propagación de una onda de orden inferior) es preciso emplear fibras con densidad óptica próxima a la densidad del medio ambiente. Este medio se crea artificialmente, introduciendo la guía de ondas dieléctica en una cubierta dieléctrica suficientemente maciza (fig. 67.5). En realidad, este sistema de guiado resulta ser más complicado que el mostrado en la fig. 67.1: es de tres capas. Pero siendo la cubierta de grosor suficientemente grande no es necesario efectuar un análisis complementario, puesto que el campo que se atenúa radialmente en ella es despreciablemente pequeño en la superficie de separación exterior (compárese con los razonamientos en el § 40, punto 2).

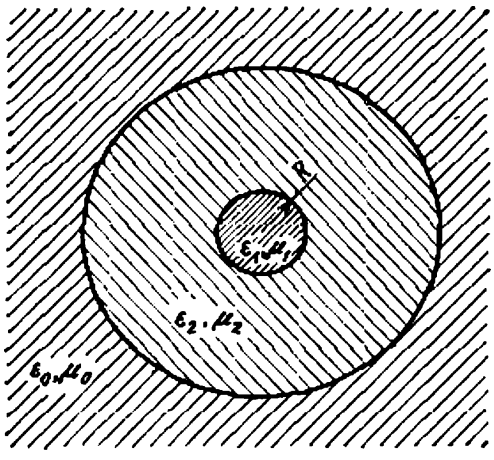


Fig. 67.5.

3. Guía de ondas dieléctrica con vástago de conducción ideal. La anterior consideración puede ser fácilmente divulgada a aquel caso, cuando en el interior de un cilindro dieléctrico está coaxialmente situado un vástago de conducción ideal. Esta es la representación de la línea monofilar que se emplea en la técnica para guiar una onda superficial (denominada, a veces, línea de Goubot).

En el caso que tratamos, en la región $0 \leqslant r < R_1$ (fig. 67.6, *a*) no hay campo. Representando $\dot{\mathcal{E}}_z$ en la capa $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ ya no podemos, como en las (67.1), eliminar en (S7.17) la función de Neiman y debemos escribir:

$$\dot{\mathcal{E}}_z = [\dot{C}_1 J_n(\dot{\chi}_1 r) + \dot{C}_2 N_n(\dot{\chi}_1 r)] \cos n\alpha,$$

$R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, pero la correlación de los coeficientes $\dot{C}_1$ y $\dot{C}_2$ se halla inmediatamente partiendo de la exigencia de que $\dot{\mathcal{E}}_z = 0$ siendo

$r = R_1$:

$$\frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = -\frac{J_n(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_n(\dot{\chi}_1 R_1)}.$$

Por esta razón, en lugar de las (67.1), se tiene que

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \begin{cases} \dot{C}_1 \left[J_n(\dot{\chi}_1 r) - \dfrac{J_n(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_n(\dot{\chi}_1 R_1)} N_n(\dot{\chi}_1 r) \right] \cos n\alpha, & R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \\ \dot{C}_1' H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \cos n\alpha, & r \geqslant R_2, \end{cases} \tag{67.19}$$

y seguidamente

$$\dot{\mathcal{H}}_z = \begin{cases} \dot{C}_2 \left[J_n(\dot{\chi}_1 r) - \dfrac{J_n'(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_n'(\dot{\chi}_1 R_1)} N_n(\dot{\chi}_1 r) \right] \operatorname{sen} n\alpha, & R_1 < r \leqslant R_2, \\ \dot{C}_2' H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \operatorname{sen} \alpha, & r \geqslant R_2, \end{cases} \tag{67.20}$$

Aquí se ha tenido en cuenta que para $r = R_1$ debe cumplirse la condición límite $\partial \dot{H}_z / \partial r = 0$, así como que $\psi = 90°$ (ahora esto puede fácilmente preverse, véase el punto 1).

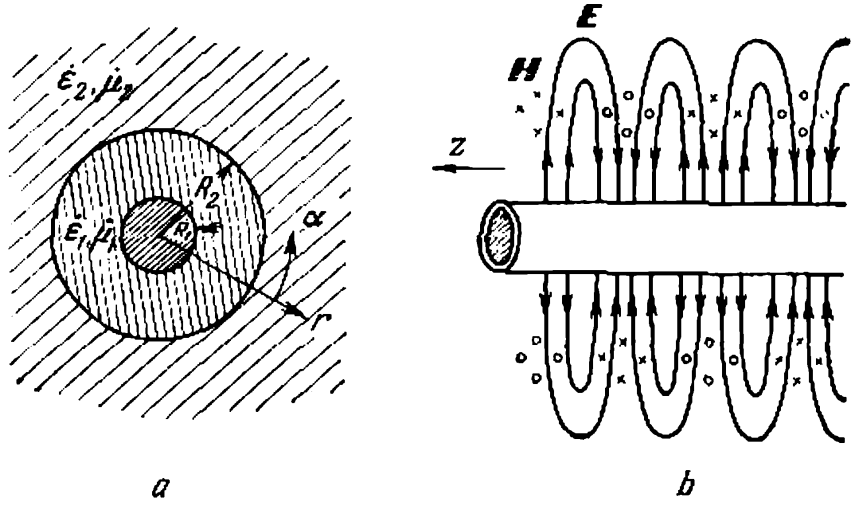


Fig. 67.6.

Las siguientes operaciones deben repetir los razonamientos del punto 1, con la sóla diferencia de que las funciones de Bessel de las (67.1) se sustituyen por una combinación de las funciones cilíndricas de los primeros renglones de las (67.19), (67.20). De esta manera, el lector, en lugar de las fórmulas (67.3), (67.5), (67.6) y (67.7), obtiene con facilidad otras análogas que, bien es verdad, ocuparán bastante mayor lugar. Limitémonos a escribir la ecuación

transcendente que corresponde a la (67.8):

$$-n^2\frac{\dot\Gamma^2 k_2^2}{\dot\chi_1^2\dot\chi_2^2}\left(\frac{\dot k_1^2}{k_2^2}-1\right)^2=$$

$$=\left[\frac{\dot\mu_1}{\dot\mu_2}\dot\chi_2R_2\frac{J_n'(\dot\chi_1R_2)-\frac{J_n'(\dot\chi_1R_1)}{N_n'(\dot\chi_1R_1)}N_n'(\dot\chi_1R_2)}{J_n(\dot\chi_1R_2)-\frac{J_n'(\dot\chi_1R_1)}{N_n'(\dot\chi_1R_1)}N_n(\dot\chi_1R_2)}-\dot\chi_1R_2\frac{H_n^{(2)'}(\dot\chi_2R_2)}{H_n^{(2)}(\dot\chi_2R_2)}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\dot\varepsilon_1}{\dot\varepsilon_2}\dot\chi_2R_2\frac{J_n'(\dot\chi_1R_2)-\frac{J_n(\dot\chi_1R_1)}{N_n(\dot\chi_1R_1)}N_n'(\dot\chi_1R_2)}{J_n(\dot\chi_1R_2)-\frac{J_n(\dot\chi_1R_1)}{N_n(\dot\chi_1R_1)}N_n(\dot\chi_1R_2)}-\dot\chi_1R_2\frac{H_n^{(2)'}(\dot\chi_2R_2)}{H_n^{(2)}(\dot\chi_2R_2)}\right]. \quad (67.21)$$

En el caso de campos azimutalmente homogéneos ($n=0$) esta ecuación también se descompone en dos, una de las cuales responde a las ondas H y la segunda, E. Esta última se obtiene igualando a cero la magnitud del segundo corchete de la (67.21); después de sencillas transformaciones, se obtiene que

$$\frac{\dot\varepsilon_2}{\dot\varepsilon_1}\dot\chi_1R_2\frac{J_0(\dot\chi_1R_2)-\frac{J_0(\dot\chi_1R_1)}{N_0(\dot\chi_1R_1)}N_0(\dot\chi_1R_2)}{J_1(\dot\chi_1R_2)-\frac{J_0(\dot\chi_1R_1)}{N_0(\dot\chi_1R_1)}N_1(\dot\chi_1R_2)}=\dot\chi_2R_2\frac{H_0^{(2)}(\dot\chi_2R_2)}{H_1^{(2)}(\dot\chi_2R_2)} \quad (67.22)$$

(compárese con la (67.11). Tiene el mayor interés la onda azimutalmente homogénea del orden inferior del tipo E, designada por E_{00}; ella no tiene frecuencia crítica ($\omega_{crit}=0$) y puede considerarse como la onda fundamental de una línea monofilar perturbada por una capa dieléctrica (§ 66, punto 1).

Suponiendo que en la (67.19) $n=0$ y haciendo uso de las fórmulas (67.10), expresemos las amplitudes complejas de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ de una onda azimutalmente homogénea E fuera de la capa dieléctrica

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}_m&=\dot E_0\left[\boldsymbol{z}_0H_0^{(2)}(\dot\chi_2r)+\boldsymbol{r}_0\frac{i\dot\Gamma}{\dot\chi_2}H_1^{(2)}(\dot\chi_2r)\right]e^{-i\dot\Gamma z},\\ \dot{\boldsymbol{H}}_m&=\boldsymbol{\alpha}_0\dot E_0\frac{i\omega\dot\varepsilon_2}{\dot\chi_2}H_1^{(2)}(\dot\chi_2r)e^{-i\dot\Gamma z},\end{aligned}\right\}\ r>R_2. \quad (67.23)$$

La estructura del campo de la E_{00} se representa esquemáticamente en la fig. 67.6, *b*.

Es natural que como en el caso de una guía de ondas dieléctrica corriente (punto 2), para las ondas que se propagan sin absorción $\dot\chi_1^2>0$ y $\dot\chi_2^2<0$ ($\dot\chi_2=-i\beta$, $\beta>0$); la constante de propagación se encuentra en los límites indicados por la correlación (67.12). Tomando la fórmula (67.15) puede demostrarse fácilmente que la

superficie exterior del dieléctrico tiene impedancia inductiva; esta demostración se la dejamos al lector.

4. Conclusión. La investigación de sistemas de simetría axial será continuada más adelante en el § 68; entonces, estudiaremos los casos cuando en una de las regiones el medio es un conductor real. Como conclusión de lo anteriormente expuesto, detengámonos en algunos otros ejemplos de sistemas con dieléctrico no homogéneo.

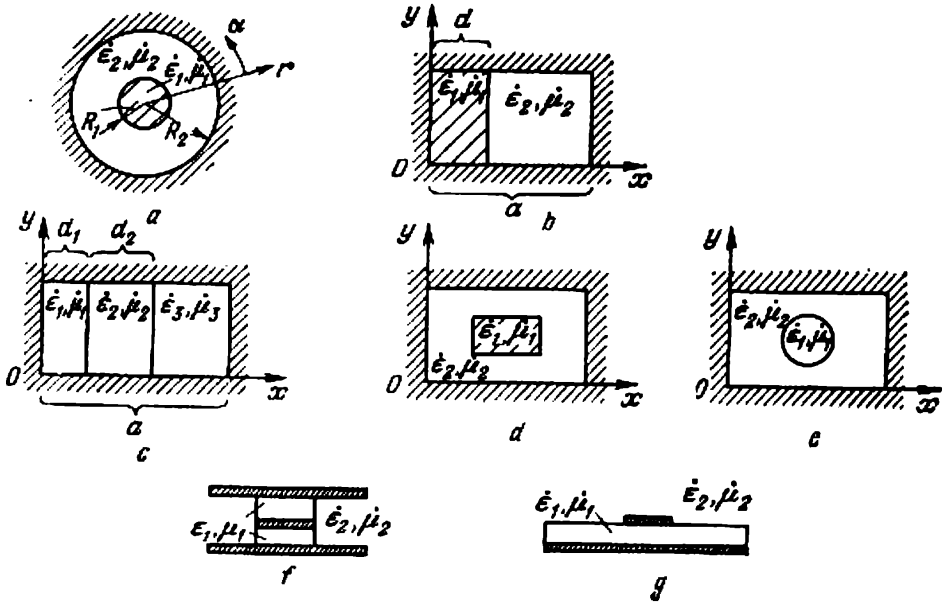


Fig. 67.7.

Sea que en una guía de ondas circular, cuya cubierta se supone que es conductor ideal, se ha introducido un cilindro coaxial dieléctrico (fig. 67.7, *a*). Tal sistema se analiza con facilidad haciendo uso de los anteriores métodos. Las funciones $\dot{\mathcal{E}}_z$ y $\dot{\mathcal{H}}_z$ tienen la forma

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \begin{cases} \dot{C}_1 J_n(\dot{\chi}_1 r)\cos n\alpha, & 0 \leqslant r \leqslant R_1, \\ \dot{C}_n' \left[J_n(\dot{\chi}_2 r) - \dfrac{J_n(\dot{\chi}_2 R_2)}{N_n(\dot{\chi}_2 R_2)} N_n(\dot{\chi}_2 r) \right] \cos n\alpha, & R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \end{cases} \tag{67.24}$$

y

$$\dot{\mathcal{H}}_z = \begin{cases} \dot{C}_2 J_n(\dot{\chi}_1 r)\operatorname{sen} n\alpha, & 0 \leqslant r \leqslant R_1, \\ \dot{C}_2' \left[J_n(\dot{\chi}_2 r) - \dfrac{J_n'(\dot{\chi}_2 R_2)}{N_2'(\dot{\chi}_2 R_2)} N_n(\dot{\chi}_2 r) \right] \operatorname{sen} n\alpha, & R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \end{cases} \tag{67.25}$$

(compárese con las (67.1) y (67.19), (67.20)). En calidad de ejercicio, proponemos hallar el campo y deducir la ecuación transcendente para los números de onda transversales. Obsérvese, que como anteriormente todas las ondas, salvo las azimutalmente homo-

géneas, tendrán componentes longitudinales tanto eléctrica como magnética. Dichas ondas se dividen en las del tipo EH y HE. Al pasar a un medio homogéneo (o sea, $R_1 \to 0$ o bien $\dot{k}_1 \to \dot{k}_2$), las primeras se transforman en ondas H y las segundas del tipo E de una guía de ondas circular.

Pasemos al ejemplo de una guía de ondas rectangular con medio dieléctrico de dos capas (fig. 67.7, *b*). El problema es muy sencillo. Limitándonos al caso de campos del tipo H que sólo dependen de la coordenada x, se escribe que:

$$\dot{\mathcal{H}}_z = \begin{cases} \dot{C}_1 \cos \dot{\chi}_1 x, & 0 < x \leqslant d, \\ \dot{C}_2 \cos \dot{\chi}_2 (a-x), & d \leqslant x < a \end{cases} \tag{67.26}$$

(*se satisface la condición límite* $\partial \dot{\mathcal{H}}_z / \partial x = 0$ *cuando* $x = 0$ *y* $x = a$, compárese con el § 64, punto 2). Partiendo de la condición de la continuidad de la componente longitudinal del vector $\boldsymbol{H}$ en la superficie de separación de los medios ($x = d$), se tiene que

$$\dot{C}_1 \cos \dot{\chi}_1 d = \dot{C}_2 \cos \dot{\chi}_2 (a-d). \tag{67.27}$$

Según las fórmulas (61.11), se obtiene que

$$\dot{E}_m = \begin{cases} -y_0 \dot{C}_1 \dfrac{i\omega\mu_1}{\dot{\chi}_1} \operatorname{sen} \dot{\chi}_1 x e^{-i\dot{\Gamma}z}, & 0 \leqslant x \leqslant d, \\ y_0 \dot{C}_2 \dfrac{i\omega\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2} \operatorname{sen} \dot{\chi}_2 (a-x) e^{-i\dot{\Gamma}z}, & d \leqslant x \leqslant a, \end{cases} \tag{67.28a}$$

y

$$\dot{H}_m = \begin{cases} \dot{C}_1 \left[z_0 \cos \dot{\chi}_1 x + x_0 \dfrac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_1} \operatorname{sen} \dot{\chi}_1 x \right] e^{-i\dot{\Gamma}z}, & 0 < x < d, \\ \dot{C}_2 \left[z_0 \cos \dot{\chi}_2 (a-x) - x_0 \dfrac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2} \operatorname{sen} \dot{\chi}_2 (a-x) \right] e^{-i\dot{\Gamma}z}, & d < x < a. \end{cases} \tag{67.28b}$$

Igualando en la superficie de separación de los medios las componentes tangenciales del vector $\dot{E}$, se escribe

$$-\dot{C}_1 \frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1} \operatorname{sen} \dot{\chi}_1 d = \dot{C}_2 \frac{\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2} \operatorname{sen} \dot{\chi}_2 (a-d) \tag{67.29}$$

y ahora, en virtud de las (67.27) y (67.29), hallamos las siguientes ecuaciones respecto a los números de onda transversales:

$$\frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1} \operatorname{tg} \dot{\chi}_1 d + \frac{\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2} \operatorname{tg} \dot{\chi}_2 (a-d) = 0. \tag{67.30}$$

Como anteriormente, los números $\dot{\chi}_1$ y $\dot{\chi}_2$ se someten a las igualdades (67.2) relacionadas entre sí por medio de la correlación (67.4).

Recomendamos al lector los siguientes ejercicios: a) prefijándose las propiedades de los medios y las dimensiones relativas de las

regiones, hallar gráficamente varias soluciones de la ecuación (67.30) y estudiar la distribución del campo; b) obtener una solución del problema que dependa de x e y (¿tendrán o no los campos componentes longitudinales eléctrica y magnética?); c) considerar un sistema de tres capas (fig. 67.7, *c*).

Hay que marcar que el enfoque para la solución de los problemas de sistemas de guiado con medios no homogéneos que ha sido mostrado en el presente párrafo, no es universal. Este método es posible si en la sección transversal hay varias regiones homogéneas, a cada una de las cuales puede ser aplicado el método de separación de variables, siendo realizable la superposición de las condiciones en las superficies de separación en la forma cerrada (suele decirse "cosido de soluciones"). De estos límites, por ejemplo, sale el problema sobre una guía de ondas rectangular con vástago dieléctrico del tipo mostrado en la fig. 67.7, *d*. Para configuraciones de esta clase o más complicadas ("irregulares transversalmente", § 66, punto 1) pueden emplearse los métodos de proyección, § 76, Suplemento 8, punto 4 [1.3].

También podemos incluir al tipo de sistemas de guiado con medio no homogéneo a diversas líneas de bandas paralelas (fig. 67.7, *f*, *g*) que tiene gran importancia en la técnica. Prácticamente se emplea una onda fundamental de un sistema tal en que ésta sea del tipo *TEM* para un dieléctrico homogéneo (y conductor ideal), pero en virtud de la influencia del elemento insertado de mayor densidad óptica resulta estar retardada con relación al medio exterior. El campo decrece rápidamente en el sentido transversal fuera del elemento insertado y esta propiedad manifiesta su papel positivo.

§ 68. Acción de un conductor real

1. Efecto Kelvin (efecto pelicular) en un conductor cilíndrico. Retornemos primeramente al problema sobre el efecto pelicular que estudiamos en el § 40. Ahora, después del análisis de una serie de sistemas de guiado definidos en coordenadas cilíndricas (§§ 65—67), podemos con toda facilidad considerar el efecto Kelvin en un conductor.

Dado que por un conductor cilíndrico de radio R pasa corriente alterna. Suponiendo que por el azimut ($\partial/\partial\alpha = 0$) su distribución es uniforme, así como teniendo también en cuenta que con una conducción finita del medio la corriente siempre está acompañada por un campo eléctrico longitudinal, podemos llegar a la conclusión de que en su total, el campo electromagnético tendrá el aspecto de una onda E azimutalmente homogénea (§ 67, puntos 1—2), es decir, que

$$\dot{E}_{mz} = \dot{C} J_0(\dot{\chi}_1 r)\, e^{-i\dot{\Gamma}z},\quad r \leqslant R.$$

El campo eléctrico tiene, además, una componente radial E_r (cuando la función de Bessel es de orden nulo, $E_\alpha = 0$). Sin embargo, tomando el caso cuando las frecuencias son relativamente, bajas, podemos considerar que la corriente es invariable a lo largo del conductor ($\partial/\partial z - 0$) y suponiendo respectivamente que $\dot{\Gamma} = 0$, en virtud de las (67.5), hallamos que $\dot{E}_{mr} = 0$; en este caso, también $\dot{\chi}_1 = \dot{k}_1$. De este modo,

$$\dot{E}_m = z_0 \dot{C} J_0(\dot{k}_1 r), \quad r \leqslant R, \tag{68.1}$$

o bien

$$\dot{E}_m = z_0 \dot{E}_{mr} \frac{J_0(\dot{k}_1 r)}{J_0(\dot{k}_1 R)}, \quad r \leqslant R, \tag{68.1a}$$

ya que la componente tangencial del vector $\dot{E}_m$ en la superficie del conductor es igual a $\dot{C} J_0(\dot{k}_1 R)$ en virtud de (68.1). De acuerdo con las (33.17) y (40.3) para el conductor

$$\dot{k}_1 = \dot{k} = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \frac{1 - i}{\Delta^0}, \tag{68.2}$$

siendo Δ^0 un parámetro que refleja la "profundidad de penetración", *cuando la superficie de separación es plana (§ 40, punto 1)*.

La fórmula (68.1a) obtenida nos da la ley de distribución del campo y de la densidad de corriente ($\dot{j} = \sigma \dot{E}$) en el interior del conductor. Varias curvas de la dependencia

$$\frac{E_m(r)}{E_{mr}} = \frac{j_m(r)}{j_{mr}} = \left| \frac{J_0(\dot{k}r)}{J_0(\dot{k}R)} \right|$$

se muestran en la fig. 68.1, *a*. Vemos que el efecto peliculer se manifiesta más débilmente a medida que $|\dot{k}R|$ o bien

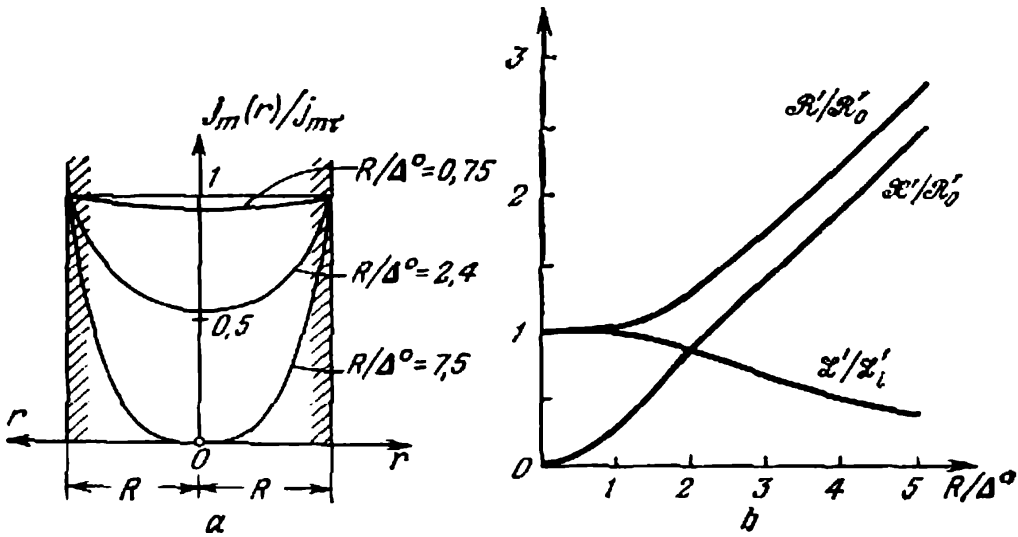


Fig. 68.1.

R/Δ^0 ($\sqrt{2R}/\Delta^0 = |\dot{k}R|$) disminuye; dicho efecto es ya extremadamente pequeño para $R \approx \Delta^0$ (como es lógico, hay que recordar que Δ^0 no es en el problema que consideramos la profundidad de penetración como lo era en el § 40, sino sólo parámetro convencional).

Integrando la magnitud $j_m = \sigma \dot{E}_m$ respecto a la sección transversal del conductor, hallaremos la amplitud compleja de la corriente conductiva que por él pasa:

$$\dot{I}_m = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \dot{E}_m r dr\, d\alpha = \frac{2\pi\sigma \dot{E}_{m\tau}}{J_0(\dot{k}R)} \int_0^R J_0(\dot{k}r)\, r\, dr.$$

Puesto que en virtud de la (S6.18),

$$\int_0^R J_0(\dot{k}r)\, r\, dr = \frac{r}{\dot{k}} J_1(\dot{k}r)\Big|_0^R = \frac{R}{\dot{k}} J_1(\dot{k}R),$$

entonces,

$$\dot{I}_m = \frac{2\pi R\sigma \dot{E}_{m\tau} J_1(\dot{k}R)}{\dot{k} J_0(\dot{k}R)}. \tag{68.3}$$

La relación

$$\dot{Z}' = \frac{\dot{E}_{m\tau}}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{k}}{2\pi R\sigma} \frac{J_0(\dot{k}R)}{J_1(\dot{k}R)} \tag{68.4}$$

es ni más ni menos que la resistencia del conductor reducida a la unidad de su longitud.

Tomemos el caso límite, cuando $R/\Delta^0 \to \infty$ ($|\dot{k}R| \to \infty$), o sea, que podemos decir que desaparece la curvatura relativa del conductor. En este caso, a base de la (S6.5),

$$\frac{J_0(\dot{k}R)}{J_1(\dot{k}R)} \to \frac{\cos\left(\dot{k}R - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\dot{k}R - \frac{3\pi}{4}\right)} = i \frac{e^{i\left(\dot{k}R - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\dot{k}R - \frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\left(\dot{k}R - \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\dot{k}R - \frac{\pi}{4}\right)}}$$

y, a continuación,

$$\lim_{|\dot{k}R| \to \infty} \frac{J_0(\dot{k}R)}{J_1(\dot{k}R)} = i,$$

ya que $e^{-i(\dot{k}R - \pi/4)} \to 0$. La expresión de $\dot{Z}'$ en (68.4) toma en el límite la forma

$$\dot{Z}' = \frac{1+i}{2\pi R\sigma\Delta^0} = \frac{\dot{Z}_S}{2\pi R}, \tag{68.5}$$

lo que coincide con la fórmula aproximada (40.2) obtenida al cumplir la condición de un fuerte efecto Kelvin (40.17).

Si por el contrario, $R/\Delta^0 \ll 1$ ($|\dot{k}R| \ll 1$) y el efecto Kelvin es muy débil entonces, haciendo uso del desarrollo (S6.10), se tiene que

$$\frac{J_0(\dot{k}R)}{J_1(\dot{k}R)} = \frac{2}{\dot{k}R}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{k}R}{2}\right)^2 + \ldots\right].$$

Como resultado, obtenemos que

$$\dot{\mathcal{Z}}' = \frac{1}{\pi R^2 \sigma}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{R^2(1-i)^2}{4\Delta^{0^2}} + \ldots\right]. \qquad (68.6)$$

El primer miembro expresa la resistencia al no haber efecto Kelvin, es decir, con corriente continua.

La dependencia entre $\dot{\mathcal{Z}}' = \mathcal{R}' + i\mathcal{X}'$ y R/Δ^0 se ilustra mediante las curvas de la fig. 68.1, *b*, confeccionadas según la fórmula exacta (68.4). Todas las magnitudes están referidas a sus valores límites con corriente continua ($\omega \to 0$). La resistencia tiene carácter inductivo ($\mathcal{X}' > 0$), lo que se advierte fácilmente en los casos límites, tomando las fórmulas (68.5) y (68.6). En la fig. 68.1, *b* está también trazada la curva de la inductancia de la unidad de longitud del conductor $\mathcal{L}'$; esta magnitud reducida a la inductancia $\mathcal{L}_i' = \mu/8\pi$ obtenida para corriente continua según la fórmula (25.25).

2. Línea monofilar y guía de ondas circular. En el § 66, punto 1 se habló de una línea monofilar en forma de un cilindro de conducción ideal. Ahora, tomemos una línea formada por un conductor real y consideremos su onda fundamental que, como es de comprender, será una onda E azimutalmente homogénea. Aplicando la ecuación transcendente (67.11), supongamos que la constante de propagación de esta onda es muy próxima al número de onda de una onda TEM en el medio exterior (caso de un conductor ideal) es decir, $\dot{\Gamma} \approx \dot{k}_2$ (fig. 67.1). Entonces, en virtud de la (67.2), $|\dot{\chi}_2|$ será una magnitud extremadamente pequeña. Teniendo también en cuenta que $|\dot{k}_1| \gg |\dot{k}_2|$, de la (67.4) se desprende que: $\dot{\chi}_1 \approx \dot{k}_1$. Esto nos permite escribir la ecuación (67.11) en la forma

$$\omega \dot{e}_2 \dot{W}_1 R \frac{J_0(\dot{k}_1 R)}{J_1(\dot{k}_1 R)} = \dot{\chi}_2 R \frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)} \qquad (68.7)$$

($\dot{W}_1 = \sqrt{\dot{\mu}_1/\dot{e}}$). Luego, como se trata de un efecto Kelvin fuerte, la relación de las funciones de Bessel en el primer miembro puede considerarse igual a i (véase más arriba, punto 1) de forma que la ecuación aún más se simplifica:

$$i\omega \dot{e}_2 \dot{W}_1 R = \dot{\chi}_2 R \frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}. \qquad (68.8)$$

Puede comprobarse con facilidad que podemos llegar a esta ecuación negándonos a considerar el campo interior (siendo $r < R$) y en su lugar, imponiendo al exterior cuando $r = R$ la condición (límite)

de Leontovich (§ 40, punto 2) que en el caso presente se convierte en la razón

$$\frac{\dot{E}_{mz}(R)}{\dot{H}_{m\alpha}(R)} = \dot{W}_1.$$

Introduciendo aquí las magnitudes $\dot{E}_{mz}(R) = \dot{C}_1 H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)$ y $\dot{H}_{m\alpha}(R) = i\dot{C}_1 \frac{\omega \dot{\varepsilon}_2}{\dot{\chi}_2} H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)$ que se desprenden de las (67.1), y (67.5), teniendo en cuenta las (67.3), obtenemos la (68.8); señalemos, que también se puede hacer uso de las fórmulas (67.23).

Ya que, como anteriormente se ha mostrado, la magnitud $|\dot{\chi}_2|$ es muy pequeña y siendo R suficientemente pequeño, las funciones de Hankel en el segundo miembro de la (68.8) que casi no se diferencian respectivamente de $-iN_0(\dot{\chi}_2 R)$ y $-iN_1(\dot{\chi}_2 R)$ (esto se desprende del Suplemento 6, punto 1), pueden ser representadas por medio de las correlaciones (S6.12). De este modo, se obtiene la ecuación [1]

$$(\dot{\chi}_2 R)^2 \ln \frac{2}{\gamma \dot{\chi}_2 R} = i\omega \dot{\varepsilon}_2 \dot{W}_1 R. \qquad (68.9)$$

Sin profundizar en el método de su solución, consideremos un ejemplo conocido en la literatura. Un conductor de cobre de diámetro $2R = 2$ mm está situado en el aire ($\dot{k}_2 = k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$) y la frecuencia es igual a 10^9 Hz ($\lambda_2 = 30$ cm). Resulta que $\dot{\chi}_2$ es una pequeña magnitud compleja y la constante de propagación determinada por la fórmula $\dot{\Gamma} = \sqrt{\dot{k}_0^2 - \dot{\chi}_2^2}$, es igual a $\dot{\Gamma} = k_0(1{,}00006 - i\,0{,}000064)$.

El resultado obtenido no es inesperado: la onda fundamental que se propaga a lo largo del conductor es una onda lenta ($\Gamma'' > k_0$) que se atenúa a causa de la absorción en el conductor. Es próxima a una onda TEM de una línea monofilar de conducción ideal, pero que en diferencia de dicha onda es un objeto físico real: cuando $I \neq 0$, la integral del tipo (66.3) se reduce a la infinidad ya que en sentido radial el campo decrece con mayor rapidez que $1/r$ (dependencia $H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)$. Siendo lenta, la onda tiene carácter superficial (§ 62, punto 4) lo que está acondicionado por la impedancia inductiva en la superficie de separación del metal (véase más arriba, punto 1). En principio, la onda es de la clase E y, según su estructura (fuera del conductor), repite la ya conocida estructura de la onda E_{00} de un conductor con cubierta dieléctrica (fig. 67.5, *b*); las componentes del campo se definen por las fórmulas (67.23). Pero la componente longitudinal del vector E es, en comparación con la transversal, extremadamente pequeña; efectivamente, en virtud de

[1] Una ecuación de tal tipo ya fue obtenida por Sommerfeld (véase por ejemplo, [A.3]) y múltiples veces se consideró en los cursos modernos [B. 2,4].

las (67.23),

$$\frac{\dot{E}_{mz}}{\dot{E}_{mr}} = -i\frac{\dot{\chi}_z}{\dot{\Gamma}}\frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)} \approx -i\frac{\dot{\chi}_z}{\dot{\Gamma}}\dot{\chi}_2 r \ln\frac{2}{\gamma\dot{\chi}_2 r} \quad (r \geqslant R),$$

donde hay que tener en cuenta la pequeñez de $\dot{\chi}_2$.

Señalemos que prestando atención al resultado que acabamos de examinar, es fácil llegar a la deducción sobre la realidad física de la onda cofásica de un sistema de guiado arbitrario múltiplemente conexo (véase el comienzo del punto 4 en el § 66).

Las ondas de orden superior de una línea monofilar formada por un conductor real no va a ser estudiada por nosotros. Su análisis [A. 3] muestra que estas ondas (en diferencia de la fundamental) sufren elevada absorción, ya que sus campos están ubicados principalmente en el conductor (compárece con la guía de ondas dieléctrica).

Por fin, haremos varias observaciones sobre la guía de ondas hueca circular que estudiamos en el § 65, suponiendo, principalmente, que su cubierta tiene una conductibilidad ideal. Esta guia de ondas puede ser interpretada como un canal en un conductor infinito y a tal sistema se divulgan todas las operaciones verificadas en el § 67, punto 1, siendo para esto suficiente dar los valores necesarios a los parámetros $\dot{k}_1$ y $\dot{k}_2$ en las (67.2). Por esta razón, los números de onda transversales de una guía de ondas circular deben buscarse, hablando con propiedad, como las raíces de la ecuación transcendente (67.8), siendo tolerables substanciales simplificaciones de dicha ecuación a causa del fuerte efecto Kelvin en el conductor. La siguiente ecuación, es análoga a la (68.8):

$$-i\omega\dot{e}_1\dot{W}_2 R = \dot{\chi}_1 R\frac{J_0(\dot{\chi}_1 R)}{J_1(\dot{\chi}_1 R)}. \qquad (68.10)$$

Es fácil obtener esta ecuación basándose en la condición límite Leontovich, lo que proponemos que haga el lector.

Como se desprende de las fórmulas (67.5), el campo de una guia de ondas circular no puede clasificarse en un caso general (como al tratar de una guía de ondas dieléctrica, § 67, punto 2) ni como de la clase E, ni de la H. Los campos puros E y H, son azimutalmente homogéneos (E_{0m} y H_{0m}); esto se demuestra del mismo modo que lo hicimos en el § 67, punto 2. Los demás campos se pueden dividir en los de las clases EH y HE en dependencia de las correlaciones de los coeficientes $\dot{C}_1$ y $\dot{C}_2$ en las fórmulas (67.11) que, como es natural, siguen siendo válidas. Al pasar al caso de conductibilidad ideal de la cubierta, las ondas EH se convierten en ondas $H(\dot{C}_1/\dot{C}_2 \to 0)$, mientras que las ondas HE, en ondas $E(\dot{C}_2/\dot{C}_1 \to 0)$.

De este modo, se afirman ahora las consideraciones manifestadas en el § 65, punto 5.

III. Oscilaciones libres de resonadores de cavidad

El modelo más sencillo de un resonador de cavidad fue considerado en el § 36, punto 4 y era un sistema de planos idealmente conductores. Diversos resonadores de cavidad en forma de cavidades metálicas, encuentran extensa aplicación en la radiotecnia de frecuencias ultraelevadas. A continuación, van a ser considerados los campos libres de los resonadores (§ 28, punto 1); en este caso, las ecuaciones de electrodinámica nos llevan a problemas sobre los valores propios.

§ 69. Propiedades generales de los resonadores de cavidad

1. Sistema de guiado y resonador. El movimiento de energía en un volumen aislado puede tener carácter cíclico o bien oscilatorio (fig. 69.1, *a*, *b*). Este último es propio de toda onda estacionaria que, en término medio, no transporta energía. Como ya sabemos (§ 34, punto 4, § 36, punto 4), la onda electromagnética estacionaria más sencilla se crea al superponerse dos ondas planas homogéneas con iguales amplitudes que se desplazan al encuentro. De modo semejante aparecen las ondas estacionarias en los sistemas de guiado.

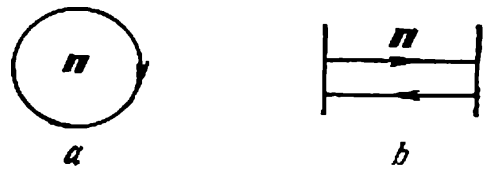


Fig. 69.1.

Está claro que campos del tipo de onda estacionaria sólo pueden existir en la región de un sistema de guiado delimitada por planos idealmente conductores que reflejan las ondas móviles (compárese § 36, punto 4). En la fig. 69.2 se muestran esquemáticamente tales regiones formadas por una guía de ondas dieléctrica (*a*), línea bifilar (*b*), línea coaxial (*c*), por guías de ondas rectangular y circulares (*d*, *e*). En los tres últimos casos se crean volúmenes que pueden considerarse como un conductor ideal totalmente aislado.

Estudiemos con más detalle los sistemas de los tipos mostrados en la fig. 69.2. En la región delimitada no puede, como es natural, existir una sola onda estacionaria. Tomando su componente eléctrica transversal en forma de su amplitud compleja

$$\dot{E}_{mt} = \dot{\mathcal{E}}_t e^{-i\Gamma z},$$

nos convencemos inmediatamente que en los planos transversales introducidos no se satisface la condición de la igualdad a cero de la componente tangencial del vector $\boldsymbol{E}$, puesto que para esto debe ser

$$\dot{E}_{mt} = 0 \text{ para } \begin{cases} z=0, \\ z=L. \end{cases} \tag{69.1}$$

Tomemos, seguidamente, la superposición de dos ondas que se desplazan en sentidos contrarios; entonces

$$\dot{E}_{ml} = \dot{\mathcal{E}}_l^{+} e^{-i\dot{\Gamma}z} + \dot{\mathcal{E}}_l^{-} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \tag{69.2}$$

donde $\dot{\mathcal{E}}_l^{+}$ y $\dot{\mathcal{E}}_l^{-}$ pueden sólo diferenciarse por su coeficiente constante, ya que las distribuciones transversales de los campos de ambas ondas son iguales [1].

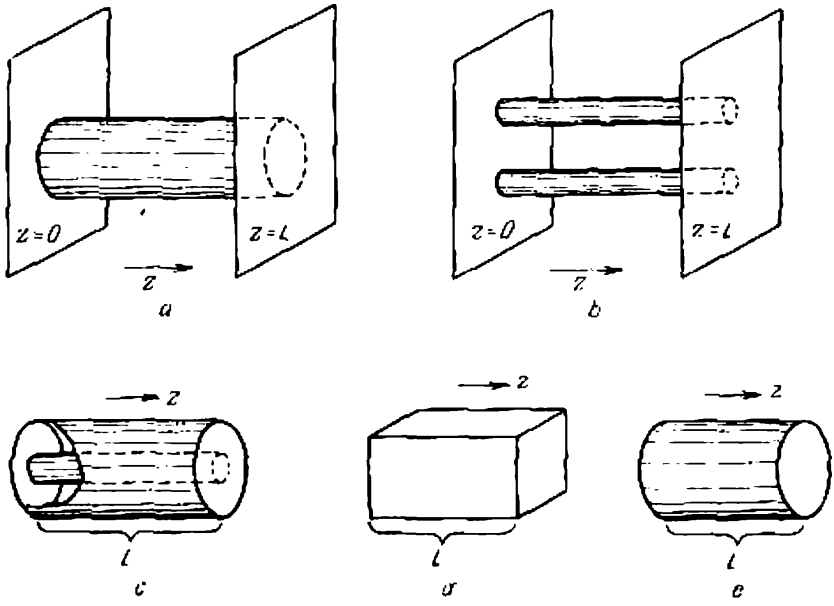


Fig. 69.2.

En el caso dado, la exigencia (69.1) puede cumplirse con facilidad; subordinándole la función $\dot{E}_{ml}$ (69.2), se obtiene que

$$\begin{aligned} &\dot{\mathcal{E}}_l^{+} + \dot{\mathcal{E}}_l^{-} = 0, \\ &\dot{\mathcal{E}}_l^{+} e^{-i\dot{\Gamma}L} + \dot{\mathcal{E}}_l^{-} e^{-i\dot{\Gamma}L} = 0, \end{aligned} \tag{69.3}$$

y este sistema de ecuaciones respecto a $\dot{\mathcal{E}}_l^{+}$ y $\dot{\mathcal{E}}_l^{-}$ siempre puede ser resuelto.

Haciendo uso del primer renglón del (69.3), reducimos la expresión (69.2) a la forma

$$\dot{E}_{ml} = -i2\dot{\mathcal{E}}_l^{+} \operatorname{sen} \dot{\Gamma}z. \tag{69.4}$$

El segundo renglón del (69.3) es equivalente a la igualdad

$$\operatorname{sen} \dot{\Gamma}L = 0, \tag{69.5}$$

[1] Cuando el medio es anisótropo, esta afirmación puede resultar ser injusta.

de la que se desprende que

$$\dot{\Gamma} = \frac{p\pi}{L}, \quad p = (0),\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{69.6}$$

Nos resta interpretar los resultados obtenidos. Vemos que en el volumen cortado puede existir la superposición de dos ondas que se desplazan en sentidos contrarios y que crean una onda estacionaria. La cualidad característica de esta última es la independencia de la fase del campo de las coordenadas (§ 36, punto 4); las fórmulas (69.4), (69.6) nos lo muestran. Es muy importante que la constante de propagación $\dot{\Gamma}$ toma una serie de valores (69.6), a cada uno de los cuales responde determinado tipo de onda estacionaria; este hecho se esclarece en la fig. 69.3 donde se muestran diferentes distribuciones longitudinales de la componente E_{ml} que corresponden a diversos valores de $\dot{\Gamma}$ en la (69.4).

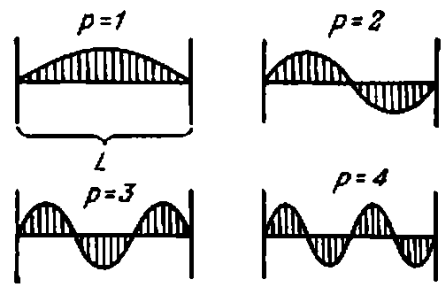


Fig. 69.3.

Para aclarar a qué se reducen las condiciones de existencia de los tipos de onda estacionaria entre las paredes laterales idealmente conductoras apliquemos la correlación general (61.3)

$$\dot{k}^2 = \dot{\chi}^2 + \dot{\Gamma}^2.$$

Introduciendo a esta fórmula los valores de $\dot{\Gamma}$ de la (69.6), se tiene que

$$\dot{k}^2 = \dot{\chi}^2 + \dot{\chi}_z^2, \qquad \dot{\chi}_z = \frac{p\pi}{L} \tag{69.7}$$

(la nueva designación χ_z es análoga a χ_x y χ_y en el § 64). Los valores "tolerados" de $\dot{\Gamma} = \chi_z$ (69.6) son reales, lo que, como ya sabemos, es posible al no haber absorción en el sistema de guiado, de forma que $\dot{k} = k$; bien es verdad, que más adelante se dará un importante complemento (véase el punto 3). Pongamos en la (69.7) $\dot{k}^2 = \omega^2\varepsilon\mu$. Inmediatamente se desprende la deducción de que de ningún modo, cualquier frecuencia puede tener su campo en el volumen cortado; a cada tipo de onda estacionaria corresponde *su frecuencia propia*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\dot{\chi}^2 + \dot{\chi}_z^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\dot{\chi}^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}. \tag{69.8}$$

Podemos decir que dicho volumen tiene la propiedad de selectividad frecuencial, o sea, que es un *resonador*.

El resonador de cavidad que consideramos es un sistema con un número infinito de grados de libertad.

Sus propias frecuencias circulares ω_0 forman la sucesión

$$0 < \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n \leqslant \ldots , \qquad (69.9)$$

obteniendo estas magnitudes no sólo poniendo todas las p en la (69.8), en correspondencia con la (69.6), sino que además, eligiendo diferentes números de onda transversales del sistema de guiado $\chi = \chi_{mn}$ (diversos tipos de ondas). Naturalmente que podemos hablar tanto de las frecuencias circulares propias $\omega_0 = \omega_n$, como de las frecuencias propias corrientes $f_0 = \omega_0/2\pi$ o bien de las longitudes de onda propias $\lambda_0 = v/f_0 = 1/f_0 \sqrt{\varepsilon\mu}$ y de los números de onda propios $k_0 = \omega_0/v = \omega_0 \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Haciendo uso de la correlación (61.2), llegaremos a una sencillísima deducción. Al comparar las (61.2) y (69.6), se obtiene

$$L = p\frac{\Lambda}{2}, \quad p = (0),\ 1,\ 2,\ \ldots , \qquad (69.10)$$

es decir, la condición para la existencia del campo, resulta ser la multiplicidad de la largura L del resonador respecto a la mitad de la longitud de onda $\Lambda/2$ en el sistema de guiado.

El caso cuando $p = 0$ exige una atención particular. En virtud de las (69.4) y (69.6), vemos que para $p = 0$ el campo eléctrico está absolutamente privado de su componente transversal. Esto puede sólo tener lugar al cortar la onda E por medio de un sistema de guiado hueco; en tal caso, el campo eléctrico es longitudinal, como se muestra en la fig. 69.4 (en los planos transversales idealmente conductores se cumplen, como es de origen, las condiciones límites). Como al cortar $\Lambda \to \infty$, entonces, en virtud de (69.10), la largura del resonador es indeterminada:

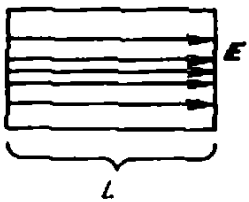


Fig. 69.4.

$$L = 0 \cdot \infty, \qquad \text{siendo } p = 0, \qquad (69.10a)$$

en realidad dicha largura puede adquirir cualquier valor, ya que al variar L las condiciones para la existencia del campo no se afectan. La magnitud $\dot{\Gamma} = 0$ que se desprende de la (69.6) para $p = 0$, corresponde precisamente al caso de corte ($f = f_{crit}$). Aquí, la fórmula de las frecuencias propias (69.8) toma el aspecto

$$\omega_0 = \frac{\chi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (69.11)$$

Efectivamente, las frecuencias propias son críticas (compárese la magnitud $f_{crit} = \chi/2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}$ (62.17) y $f_0 = \omega_0/2\pi$).

Señalemos una importante propiedad que tienen los campos electromagnéticos en forma de ondas estacionarias puras. Si el campo eléctrico tiene en todo lugar fase constante, es decir, en la expresión de la amplitud compleja $\dot{E}_m = E_m e^{i\varphi_E}$, la fase φ_E no depende

de las coordenadas, entonces

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m = \frac{i}{\omega\mu} \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{H}_m e^{i\left(\varphi_E + \frac{\pi}{2}\right)},$$

siendo $\boldsymbol{H}_m = \frac{1}{\omega\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_m$. De este modo,

$$\varphi_H = \varphi_E + \frac{\pi}{2}, \tag{69.12}$$

es decir, los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ están desfasados en 90°, fig. 69.5; en ciertos momentos en el resonador sólo existe un campo eléctrico ($\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_m$, $\boldsymbol{H} = 0$), y hay tales momentos, cuando, por el contrario, sólo existe un campo magnético ($\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_m$, $\boldsymbol{E} = 0$). A la condición (69.12) en cualquier región del resonador no hay, en término medio, transmisión de energía: $\overline{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\boldsymbol{E}}_m, \dot{\boldsymbol{H}}_m^*] = 0$.

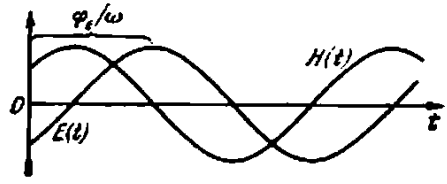


Fig. 69.5.

Como conclusión, hagamos una observación respecto a los resonadores con flujos cíclicos de energía (fig. 69.1, *a*). En un volumen limitado se puede crear un campo del tipo de onda móvil, formando del sistema de guiado un circuito cerrado; por ejemplo, se toma una guía de ondas combada hasta formar un aro (fig. 69.6, *a*). Como es natural, en una guía de ondas anular es también posible la existencia de una onda estacionaria creada como la superposición de dos ondas que se desplazan al encuentro. Por otro lado, no debe pensarse que flujos cíclicos de energía pueden observarse

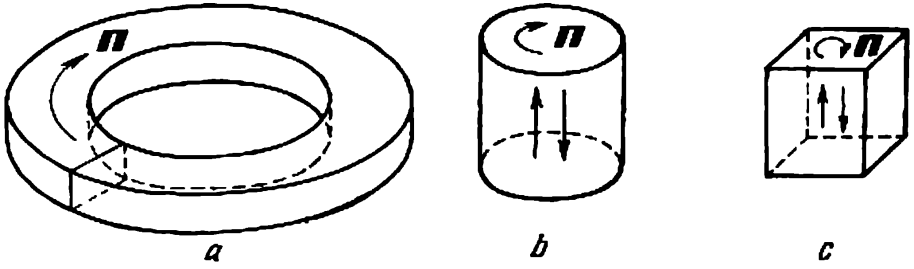


Fig. 69.6.

sólo en regiones biconexas. Como ya sabemos (§ 65, punto 1), en una guía de ondas circular los campos pueden ser giratorios; se comprueba con facilidad que en la sección transversal la onda giratoria crea un flujo cíclico de energía ($\overline{\Pi}_\alpha \neq 0$). Si tal onda resona en un volumen cilíndrico (fig. 69.2, *e*) el movimiento de energía a lo largo del eje z es oscilatorio y cíclico cuando $z = \text{const}$, lo que se muestra esquemáticamente en la fig. 69.6, *b*. Este mismo fenómeno es posible en una cavidad de sección cuadrada, por ejemplo, al resonar las ondas H_{10} y H_{01}, cuyas fases difieren en 90°

(fig. 69,6, *c*). Más adelante (§ 70), retornaremos al examen de semejantes casos.

2. Resonadores huecos. El *problema sobre un resonador acotado* por una cubierta idealmente conductora puede fácilmente plantear independientemente del estudio de una guia de ondas hueca. En principio, la forma de la cavidad es arbitraria y el resonador hueco no debe obligatoriamente formar un sector cortado de la guia de ondas. El enfoque general tiene aún más importancia, ya que en la técnica (y sobre todo en electrónica de frecuencias superaltas) en ciertas ocasiones, se emplean resonadores huecos de formas considerablemente complicadas.

El problema del resonador hueco se plantea como problema de contorno para las ecuaciones de Maxwell o bien para ecuaciones derivadas de segundo orden. Tomando las ecuaciones (29.16) y (29.17), al examinar los campos libres ($\dot{f}^{ex} = 0$) en una cavidad V con frontera S, se tienen los problemas de contorno siguientes que son problemas de valores propios:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\,\dot{\mu}^{-1}\operatorname{rot}\,\dot{\boldsymbol{E}}_m - \omega^2\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m = 0 \text{ en } V,\\ &\dot{E}_{m\tau} = 0 \text{ para } S,\\ &\operatorname{rot}\,\dot{\varepsilon}^{-1}\operatorname{rot}\,\dot{\boldsymbol{H}}_m - \omega^2\dot{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_m = 0 \text{ en } V,\\ &(\dot{\varepsilon}^{-1}\operatorname{rot}\,\dot{\boldsymbol{H}}_m)_\tau = 0 \text{ para } S. \end{aligned}\right\} \tag{69.13}$$

Cuando el medio es homogéneo e isótropo

$$\operatorname{div}\,\dot{\boldsymbol{E}}_m = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{div}\,\dot{\boldsymbol{H}}_m = 0, \tag{69.14}$$

y, por lo tanto, las ecuaciones iniciales se transforman en las ecuaciones de *Helmholzt* (29.20) y (29.21), *mientras que los problemas* (69.13) toman el aspecto

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\dot{\boldsymbol{E}}_m + \dot{k}^2\dot{\boldsymbol{E}}_m = 0 \text{ en } V,\\ &\dot{\boldsymbol{E}}_{m\tau} = 0 \quad \text{para } S \end{aligned}\right\}$$

y (69.15)

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\dot{\boldsymbol{H}}_m + \dot{k}^2\dot{\boldsymbol{H}}_m = 0 \text{ en } V,\\ &(\operatorname{rot}\,\dot{\boldsymbol{H}}_m)_\tau = 0 \quad \text{para } S \end{aligned}\right\}$$

($\dot{k}^2 = \omega^2\dot{\varepsilon}\dot{\mu}$). También conviene tener en cuenta las condiciones (69.14) al determinar los campos de los resonadores de (69.15). Por ejemplo, la solución potencial $\dot{\boldsymbol{E}}_m = \operatorname{grad}\dot{\varphi}_m$ del primer problema (69.15), para el que $\operatorname{div}\,\dot{\boldsymbol{E}}_m \neq 0$ en V (lo que es posible, salvo para la frontera S), se omite. Dicha solución no tiene contenido electrodinámico: *en un medio homogéneo, obligatoriamente* $\operatorname{div}\,\dot{\boldsymbol{E}}_m = 0$ si no hay carga espacial ($\dot{\rho}_m = 0$). Al mismo tiempo, la función $\dot{\boldsymbol{E}}_m = \operatorname{grad}\dot{\varphi}_m$ puede ser la solución de un problema de contorno más general (S5.29).

Es conveniente comparar los problemas tridimensionales (69.15) con los bidimensionales (62.8) y (62.12) que se plantean al considerar las guías de ondas huecas. En nuestro caso, aplicando la fórmula (S5.32) y teniendo en cuenta (69.14) para los problemas (69.15), se obtiene que

$$\dot{k}^2 = k_0^2 = \frac{\int\limits_V |\operatorname{rot} \dot{E}_m|^2\, dv}{\int\limits_V |\dot{E}_m|^2\, dv} = \frac{\int\limits_V |\operatorname{rot} \dot{H}_m|^2\, dv}{\int\limits_V |\dot{H}_m|^2\, dv} > 0. \qquad (69.16)$$

Se recomienda que el lector deduzca (69.16) directamente de las (69.15).

Una serie de resonadores concretos serán estudiados en el § 70.

3. Oscilaciones habiendo absorción. En los resonadores reales se produce la absorción de energía, a causa de lo cual las oscilaciones libres se convierten en atenuadas. El decremento exponencial de la reserva de energía en un sistema aislado ya se consideró en el § 12, punto 1. Sea que ahora tenemos un sistema en forma de un resonador con cubierta idealmente conductora y que contiene un medio absorbente.

Si el resonador está confeccionado a base de una guía de ondas hueca (que no es, posiblemente, simplemente conexa como una línea coaxial), entonces, en la fórmula (69.7) $\dot{\chi}^2 = \chi^2 \geqslant 0$ (§ 62, puntos 1—2) y, por lo tanto, obtenemos la desigualdad

$$\dot{k}^2 = k_0^2 > 0. \qquad (69.17)$$

Idéntico sentido tiene la forma arbitraria de la correlación (69.16), hallada para los resonadores huecos. De este modo, los números de onda propios $k_0 = \omega_0 \sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}$ son *reales*, lo que a causa de la complejidad de la permitividad y de la permeabilidad magnética es sólo posible si la magnitud ω_0 es compleja. Aquí hemos llegado a la representación sobre las *frecuencias propias complejas* del resonador con absorción [1]) que vamos a designar por

$$\dot{\omega}_0 = \omega_0' + i\omega_0''. \qquad (69.18)$$

En el caso dado, en lugar de la (69.8), de las (69.7) se desprende que:

$$\dot{\omega}_0 = \frac{1}{\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}} \sqrt{\chi^2 + \chi_z^2} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}} \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}. \qquad (69.19)$$

Suponiendo $\omega_0' > 0$, podemos convencernos fácilmente (compárese con el § 33, punto 1) de que para medios absorbentes corrientes $\omega_0'' > 0$.

---

[1]) Es oportuno remarcar que se conserva la representación de dos ondas móviles que forman el campo del resonador (punto 1). La constante de propagación $\dot{\Gamma} = \sqrt{\omega_0^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu} - \dot{\chi}^2}$ sigue siendo una magnitud real a pesar de haber absorción.

¿Cuál es el sentido de la frecuencia propia compleja? Deseando expresar las intensidades del campo en el resonador, se escribe que:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \mathrm{Re}\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{i\dot{\omega}_0 t} = \boldsymbol{E}_m e^{-\omega_0'' t}\cos(\omega_0' t + \varphi_E), \\ \boldsymbol{H} &= \mathrm{Re}\dot{\boldsymbol{H}}_m e^{i\dot{\omega}_0 t} = \boldsymbol{H}_m e^{-\omega_0'' t}\cos(\omega_0' t + \varphi_H) \end{aligned}\right\} \qquad (69.20)$$

(para el caso cuando todas las componentes de los vectores tienen iguales fases), es decir, como era de esperar, éstas oscilando decrecen. En tal caso, la frecuencia circular de las oscilaciones es parte real de la frecuencia propia compleja $\omega_0' = \mathrm{Re}\,\dot{\omega}_0$; mientras que la parte imaginaria $\omega_0'' = \mathrm{Im}\,\dot{\omega}_0$ es el coeficiente de atenuación.

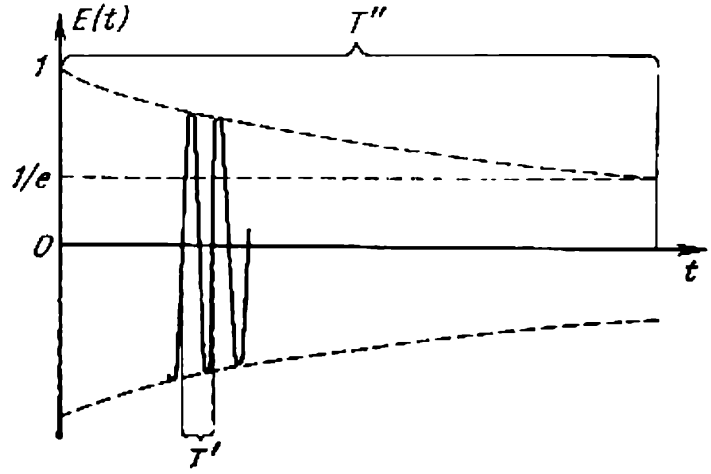


Fig. 69.7.

Generalmente $\omega_0'' \ll \omega_0'$ y el proceso resulta ser casi periódico. Efectivamente, introduzcamos las magnitudes: $T' = 2\pi/\omega_0'$ que es la integral doble entre los valores nulos más cercanos de $E(t)$ o bien $H(t)$ y $T'' = 1/\omega_0''$ que es la "constante del tiempo" que nos indica de que intervalo, el valor de $E(t)$ o bien $H(t)$ disminuye $e \approx 2{,}71$ veces. La desigualdad escrita más arriba significa que $T' \ll T''$ (fig. 69.7); T' puede considerarse como el período del proceso, basándonos en que durante varios T' podemos decir que las oscilaciones no divergen de ciertas oscilaciones armónicas con frecuencia $f_0' = \omega_0'/2\pi$.

Supongamos que con pequeña absorción ($\omega_0'' \ll \omega_0'$) es lícita la interpretación energética (30.18) de la igualdad (30.11b). Tomando $\overline{W}^e$ y $\overline{W}^m$ como los valores medios durante el período T', para las oscilaciones libres de un sistema aislado ($\dot{P}^{ex} = 0$, $\boldsymbol{\Pi} = 0$, para S), en virtud de la (30.18), se tiene que

$$\overline{W}^e = \overline{W}^m. \qquad (69.21)$$

Además,

$$\overline{W} = \overline{W}^e + \overline{W}^m = 2\overline{W}^e = 2\overline{W}^m = \\ = \frac{1}{2} e^{-2\tilde{\omega}_0' t} \int_V \varepsilon' E_m^2 dv = \frac{1}{2} e^{-2\tilde{\omega}_0' t} \int_V \mu' H_m^2 dv, \quad (69.22)$$

donde fueron tomadas las expresiones de las intensidades (69.20); la sustitución de t por $t \pm T'$ sólo debe cambiar $\overline{W}$ insignificantemente. De esta manera

$$\overline{W}(t) = \overline{W}(0) e^{-2\tilde{\omega}_0'' t} \quad (69.23)$$

Es fácil convencerse de que con la anterior aproximación $\overline{W}(t) = W(t)$. La correlación de fase (69.12) para las intensidades (69.20) se conserva con alto grado de precisión, ya que $\mathrm{Re}(\dot{\omega}_0 \dot{\mu}) \gg \gg |\mathrm{Im}(\dot{\omega}_0 \dot{\mu})|$ (véase la deducción en el punto 1). Por esta razón

$$W(t) = \frac{1}{2} e^{-2\tilde{\omega}_0'' t} \left[\cos^2(\omega_0' t + \varphi_E) \int_V \varepsilon' E_m^2 dv + \mathrm{sen}^2(\omega_0' t + \varphi_E) \cdot \right. \\ \left. \int_V \mu' H_m^2 dv \right] = \frac{1}{2} e^{-2\tilde{\omega}_0'' t} \int_V \varepsilon' E_m^2 dv = \frac{1}{2} e^{-2\tilde{\omega}_0'' t} \int_V \mu' H_m^2 dv \quad (69.24)$$

(en virtud de la (69.22)), es decir,

$$W(t) = W^e_{\text{máx}}(t) = W^m_{\text{máx}}(t) = \overline{W}(t). \quad (69.25)$$

Introduzcamos la magnitud, llamada *factor de calidad* del resonador. Esta es la relación

$$Q = \frac{\omega_0' W}{\overline{P}_p} = 2\pi \frac{W}{\Delta W_{T'}}, \quad (69.25)$$

siendo $\overline{P}_p = \overline{P}_p(t)$ la potencia media que se consume para la absorción y $\Delta W_{T'} = WT'$ decremento de la reserva de energía $W = W(t)$ durante el período T'. Pues teniendo en cuenta lo anterior

$$\overline{P} = -\frac{dW}{dt} = 2\tilde{\omega}_0'' W,$$

será justo que

$$Q = \omega_0'/2\omega_0''. \quad (69.26)$$

Nos quedan por hacer ciertas generalizaciones. No deja lugar a dudas que el decremento exponencial de la energía de las oscilaciones libres (69.23) es propio no sólo en el caso cuando la absorción trascurre solamente en el dieléctrico interior. Teniendo en cuenta la absorción de energía en los elementos metálicos (que en realidad no son idealmente conductores), así como, es posible, la radiación (por ejemplo, por el orificio en la cubierta de un

resonador hueco), no perderemos el derecho de hacer uso de los conceptos de frecuencia propia compleja y factor de calidad. En el caso general en la (69.25) $\bar{P}_p = \bar{P}_d + \bar{P}_m + \bar{P}_\Sigma$, donde se han tenido en cuenta los factores enumerados: los sumandos corresponden a cada uno de ellos por separado (los índices significan: d, dieléctrico; m, metal; Σ, radiación). De la (69.25) se desprende que

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_m} + \frac{1}{Q_\Sigma}, \\ &Q_d = \frac{\omega_0' W}{\bar{P}_d}, \quad Q_m = \frac{\omega_0' W}{\bar{P}_m}, \quad Q_\Sigma = \frac{\omega_0' W}{\bar{P}_\Sigma}, \end{aligned}\right\} \tag{69.27}$$

siendo Q_d, Q_m y Q_Σ los "factores de calidad parciales" (compárese con las (63.13)). A base de las (69.18) y (69.26) y conociendo el factor de calidad Q y la frecencia propia $\omega_0 - \omega_0'$, nos es más fácil determinar la frecuencia propia compleja:

$$\dot{\omega}_0 = \omega_0 \left(1 + i \frac{1}{2Q}\right). \tag{69.28}$$

En conclusión, vamos a detenernos en la definición de los factores de calidad parciales Q_d y Q_m. Si $\mu'' = 0$, en virtud de las (69.27), (69.24) y (30.14), se obtiene que

$$Q_d = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{1}{\operatorname{tg} \Delta} \tag{69.29}$$

(en la (30.14) $\dot{E}_m$ se sustituye, de acuerdo con las (69.20), por $\dot{E}_m e^{-\omega_0'' t}$ y ω por ω_0'; el medio es homogéneo debido a que ε' y ε'' se sacan fuera del signo de la integral).

Para determinar Q_m hacemos uso de la fórmula (40.10), según la cual y, en virtud de las (69.20)

$$\bar{P}_m = \frac{1}{2\sigma\Delta^0} e^{-2\omega_0'' t} \int_S H_m^2 ds = \frac{1}{2} \mathcal{R}_S \quad e^{-2\omega_0'' t} \int_S H_m^2 ds$$

($H_m = H_{m\tau}$). Introduciendo esto en la expresión Q_m (69.27) y representado W de acuerdo con la (69.24), por medio de H_m, se obtiene que

$$Q_m = -\frac{\omega_0' \mu'}{\mathcal{R}_S} \frac{\int_V H_m^2 dv}{\int_V H_m^2 ds} = \frac{2\mu'}{\Delta^0 \mu_m} \frac{\int_V H_m^2 dv}{\int_V H_m^2 ds}, \tag{69.30}$$

donde μ' caracteriza el medio interior (dieléctrico) y μ_m, el metal (generalmente, $\mu_m = \mu_0$). Al utilizar estas fórmulas, H_m se halla para un sistema con conductor ideal (véase el § 40, punto 2), es decir, como se hacía al determinar Γ_m'' según la fórmula (63.21).

§ 70. Resonadores de cavidad más importantes

1. Resonador rectangular. El campo de un resonador rectangular que tiene la forma de un paralelepipedo hueco (fig. 70.1, *a*) con la superficie idealmente conductora, puede hallarse resolviendo los problemas de contorno (69.15), teniendo en cuenta las (69.14). Con este objeto, los vectores $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ se proyectan en los ejes de un sistema cartesiano de coordenadas y en las soluciones generales

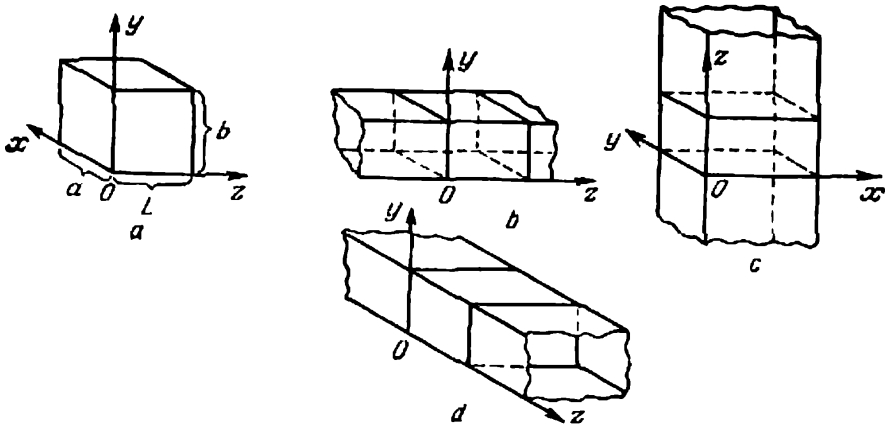


Fig. 70.1.

de las ecuaciones escalares de Helmholzt que se obtienen, se superponen las condiciones límites indicadas para las (69.15). Obsérvese que los problemas de contorno respecto a las componentes de los vectores $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ que en tal caso se formulan, en diferencia de los problemas (S5.27), (S5.28), son "mixtos" (las condiciones del tipo $u=0$ en una parte de la superficie y $\partial u/\partial \nu=0$, en la otra). El lector puede probar el enfoque, empleando el material que se da en el Suplemento 7.

Otro camino que se basa en la representación de una onda estacionaria en forma de dos móviles que se desplazan al encuentro (§ 69, punto 1), en el caso dado resulta ser más corto, puesto que ya tenemos las expresiones para todas las componentes de dichas ondas (§ 64). Es sólo necesario satisfacer las condiciones límites, cuando $z=0$ y $z=L$, como lo hicimos en el § 69, punto 1. Considerando sucesivamente las ondas E y H de una guía de ondas rectangular, en virtud de las fórmulas (64.4) y (64.10),

hallamos los campos E

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{mz} &= \dot{E}_0 \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{E}_{mx} &= -\dot{E}_0\frac{\chi_x\chi_z}{\chi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{E}_{my} &= -\dot{E}_0\frac{\chi_y\chi_z}{\chi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sen}\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{H}_{mx} &= i\dot{E}_0\frac{\dot{\omega}_0\dot{\varepsilon}\chi_y}{\chi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{H}_{my} &= -i\dot{E}_0\frac{\dot{\omega}_0\dot{\varepsilon}\chi_x}{\chi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{L}
\end{aligned}\right\} \qquad (70.1)$$

y los campos H

$$\left.\begin{aligned}
\dot{H}_{mz} &= \dot{H}_0\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{H}_{mx} &= -\dot{H}_0\frac{\chi_x\chi_z}{\chi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{H}_{my} &= -\dot{H}_0\frac{\chi_y\chi_z}{\chi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{E}_{mx} &= i\dot{H}_0\frac{\dot{\omega}_0\dot{\mu}\chi_y}{\chi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{E}_{my} &= -i\dot{H}_0\frac{\dot{\omega}_0\dot{\mu}\chi_x}{\chi^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{p\pi z}{L}
\end{aligned}\right\} \qquad (70.2)$$

de un resonador rectangular. Aquí, $\chi_x = m\pi/a$, $\chi_y = n\pi/b$, $\chi_z = p\pi/L$, $\chi = \chi_{mn}$, $\dot{\omega}_0 = \dot{\omega}_{mnp}$; en estos casos, en las (70.1) $m = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots, p = 0, 1, 2, \ldots$, mientras que en las (70.2) $m = (0), 1, 2, \ldots, n = (0), 1, 2, \ldots, p = 1, 2, \ldots$ Los coeficientes indeterminados $\dot{E}_0$ y $\dot{H}_0$ se diferencian de estos mismos en el § 64 por ser su módulo dos veces mayor. La magnitud χ_{mn} se determina por la fórmula (64.3) y la frecuencia propia $\dot{\omega}_0$, por la fórmula (69.19) que toma el aspecto

$$\dot{\omega}_0 = \omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}}\sqrt{\chi_{mn}^2 + \chi_z^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2}. \qquad (70.3)$$

Escribamos también la expresión de la longitud de onda propia $\lambda_0 = 2\pi/k_0$:

$$\lambda_0 = \lambda_{mnp} = 2\Big/\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2}. \qquad (70.4)$$

Las funciones vectoriales $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$, formadas por las componentes (70.1) y (70.2), son las *funciones propias* de los problemas (69.15); a ellas corresponden los *valores propios* $k_{mnp}^2 = \dot{\omega}_{mnp}^2\dot{\varepsilon}\dot{\mu}$ que para ambos problemas son iguales.

De modo semejante al caso de una guía de ondas rectangular cuando se hablaba de los *tipos de ondas* E_{mn} y H_{mn}, introduzcamos ahora la representación de los *tipos de oscilaciones* (campos) E_{mnp} y H_{mnp} de un resonador rectangular, cuyo origen podemos ver en la superposición de dichas ondas. Tres números enteros positivos cualesquiera, m, n y p (por el momento omitimos el cero), determinan los tipos de los campos E_{mnp} (70.1) y H_{mnp} (70.2) que tienen iguales frecuencias propias ω_{mnp} (70.3). Si $a \neq b \neq L$, sólo existen estos dos tipos de oscilaciones con una frecuencia ω_{mnp}, o sea, como suele decirse, la degeneración es doble (compárese con el § 64, punto 5). Pero, por ejemplo, al tratarse de un resonador cúbico ($a = b = L$), para $m \neq n \neq p$, los tipos de oscilaciones con la misma frecuencia ya son doce: E_{mnp}, E_{mpn}, E_{npm}, E_{nmp}, E_{pmn}, E_{pnm}, H_{mnp}, H_{mpn}, H_{npm}, H_{nmp}, H_{pmn} y H_{pnm} (ellas se diferencian, por lo menos, por la orientación del campo). De las consideraciones expuestas en el § 64, puntos 1, 2 y el § 69, punto 1, se desprende que sólo uno de los números m, n y p puede tener valor nulo; en las (70.1) es el número p y en las (70.2), m o bien n.

Remarquemos que en diferencia de la guía de ondas, para un resonador rectangular la elección del eje longitudinal z es arbitraria. Dicho eje puede establecerse de tres diferentes formas, lo que corresponde a la obtención del resonador cruzando por planos transversales tres diferentes guías de ondas (fig. 70.1, *b*, *c*, *d*). De este modo, a cada uno de los tipos reales de campos se le puede confrontar tres diferentes interpretaciones.

Se suele llamar fundamental, el tipo de oscilaciones con el menor número de onda propio $k_{mnp} = \omega_{mnp}\sqrt{\varepsilon\mu}$ (con la longitud de onda propia máxima $\lambda_{mnp} = 2\pi/k_{mnp}$). Sea L la arista más corta del paralelepípedo ($L < a$, $L < b$), entonces

$$\min k_{mnp} = k_{110} = \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}, \qquad (70.5)$$

es decir, el tipo fundamental de oscilaciones es E_{110}. Cuando $b < a$, $b < L$, el tipo fundamental será H_{101}, mientras que con $a < b$, $a < L$, H_{011}. Por lo demás, los campos respectivos sólo se diferencian por su orientación, de ese modo al sustituir las coordenadas $x \to z$, $y \to x$, $z \to y$, será necesario cambiar las designaciones $E_{110} \to H_{101}$, mientras que cuando $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$, $E_{110} \to H_{011}$. El tipo fundamental de oscilaciones siempre será aquél, con el que no hay variaciones del campo a lo largo de la arista más pequeña.

Escribamos las componentes del campo H_{101} en amplitudes complejas (70.2):

$$\dot{E}_{my} = -i\dot{H}_0 \frac{a\omega_0\dot{\mu}}{\pi} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{\pi z}{L}, \qquad (70.6)$$

$$\dot{H}_{mz} = H_0 \cos\frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{\pi z}{L}, \quad \dot{H}_{mx} = -\dot{H}_0 \frac{a}{L} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi z}{L}$$

$(\omega_0 = (\pi/\sqrt{\varepsilon\mu})\sqrt{1/a^2 + 1/L^2})$. La estructura del campo se muestra en la fig. 70.2. Comparando este cuadro con la "fotoinstantánea" de la *onda* H_{10} *de la guía de ondas rectangular* (*fig.* 64.5), vemos que en comparación con ella los campos eléctrico y magnético del resonador están desviados por el eje z a una distancia $\Lambda/4$; gracias a esto, podemos decir que para $z = 0$ y $z = L$ se satisfacen las condiciones límites. Cuando las coordenadas se cambian del modo correspondiente, el campo representado puede considerarse como E_{110} y, entonces, lo podemos identificar con la onda E_{11} con frecuencia crítica (§ 69, punto 1).

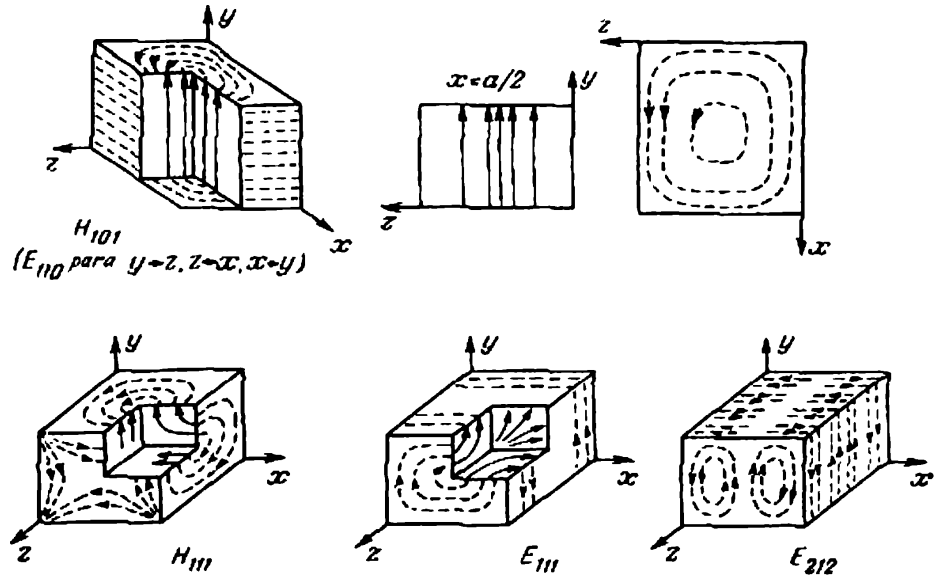


Fig. 70.2.

La fig. 70.2 también nos da una representación de los tipos de campos de orden superior del resonador; una comparación con las figs. 64.4 y 64.6 nos lleva a una *deducción análoga sobre las correlaciones* de los campos de un resonador y una guía de ondas. Señalemos, que el campo E_{111} puede considerarse como la superposición de dos campos que se interpretan como H_{111} en sistemas de coordenadas obtenidos al sustituir respectivamente $x \to z$, $y \to x$, $z \to y$ e $y \to z$, $z \to x$, $x \to y$. Otros campos de orden superior se definen de modo semejante.

En el ejemplo de un resonador rectangular, se puede fácilmente mostrar la *posibilidad de la existencia de oscilaciones libres* con flujo cíclico de energía (§ 69, punto 3). Tomando los campos H_{101} y H_{011} con amplitudes iguales y desfasajes de $\pm 90°$ (en

las (70.2) $\dot{H}_0 = A$ para H_{101} y $\dot{H}_0 = \pm iA$ para H_{011}), se obtiene

$$\overline{\Pi} = \pm \frac{A^2 \omega_0 \mu}{2} (-x_0 \chi_x^{-1} \operatorname{sen} \chi_x x \cos \chi_y y + y_0 \chi_y^{-1} \cos \chi_x x \operatorname{sen} \chi_y y) \operatorname{sen}^2 \chi_z z \tag{70.7}$$

($\dot{\varepsilon} = \varepsilon$, $\dot{\mu} = \mu$). En la fig. 70.3 para una sección cuadrada ($a = b$) se muestra la dirección del vector $\overline{\Pi}$ en los puntos $x = \frac{a}{2} \pm a/4$, $y = \frac{b}{2} \pm b/4$ y $0 < z < L$, cuando en la (70.7) se elige el signo positivo.

Por fin, vamos a dar el cálculo mediante la fórmula (69.30) del factor de calidad Q_m de un resonador rectangular para el tipo de oscilaciones H_{101}. Las integrales en el numerador y denominador se hallan despreciando la absorción. En virtud de las (70.6), $H_m^2 = H_0^2 \left(\cos^2 \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{L} + \frac{a^2}{L^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi z}{L} \right)$ y al integrar respecto al volumen, obtenemos

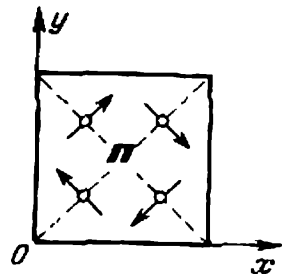


Fig. 70.3.

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^L H_m^2 \, dx \, dy \, dz = H_0^2 \frac{abL}{4} \left(1 + \frac{a^2}{L^2} \right),$$

mientras que al integrar respecto a la superficie, se obtiene que

$$2 \int_0^L \int_0^a H_m^2 \, dz \, dx + 2 \int_0^a \int_0^b H_m^2 \Big|_{z=0} dx \, dy + 2 \int_0^b \int_0^L H_m^2 \Big|_{x=0} dy \, dz =$$
$$= H_0^2 \left[\frac{aL}{2} \left(1 + \frac{a^2}{L^2} \right) + \frac{a^2 b}{L^2} + bL \right].$$

De este modo,

$$Q_m = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu'}{\mu_m} \frac{abL (L^2 + a^2)}{aL (L^2 + a^2) + 2b (L^3 + a^3)}. \tag{70.8}$$

Al aumentar proporcionalmente las dimensiones del resonador m veces, igual número de veces crece el multiplicador de $1/\Delta^0$ y disminuye la frecuencia propia (70.3) y, por esto la profundidad de penetración Δ^0 aumenta $\sqrt{m}$ veces; esto significa que el factor de calidad Q_m también crece como $\sqrt{m}$. En el caso particular, cuando el resonador es cúbico ($a = b = L$), la fórmula (70.8) toma el aspecto

$$Q_m = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu'}{\mu_m} \frac{a}{3}, \tag{70.8a}$$

mientras que para $a \gg b$ y $L \gg b$,

$$Q_m \approx \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu'}{\mu_m} b. \tag{70.8b}$$

Como la frecuencia propia de las oscilaciones del tipo H_{10l} no depende de b (en la (70.3) $n = 0$), el factor de calidad de tal resonador plano decrece proporcionalmente al disminuir b.

2. **Resonadores cilíndricos simplemente conexo y biconexo.** De la misma manera que en el caso de un resonador rectangular, los

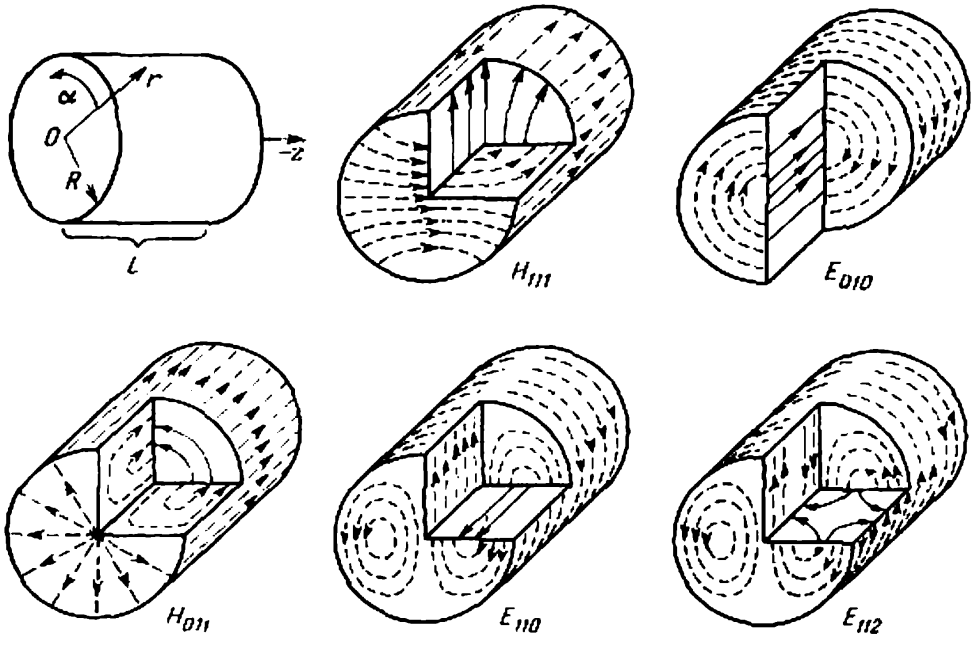


Fig. 70.4.

campos de un resonador en forma de un cilindro circular (fig. 70.4), se hallan al superponer las ondas que se propagan al encuentro de la respectiva guía de ondas (§ 69, punto 1) a base de las fórmulas (65.4) y (65.9), lo que nos da los campos E

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{mz} &= J_n(\chi r)\, A(n\alpha) \cos\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{E}_{mr} &= -\frac{\chi_z}{\chi} J_n'(\chi r)\, A(n\alpha) \operatorname{sen}\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{E}_{m\alpha} &= -\frac{n\chi_z}{\chi^2 r} J_n(\chi r)\, A'(n\alpha) \operatorname{sen}\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{H}_{mr} &= i\frac{n\omega_0 \varepsilon}{\chi^2 r} J_n(\chi r)\, A'(n\alpha) \cos\frac{p\pi z}{L},\\
\dot{H}_{m\alpha} &= -i\frac{\omega_0 \varepsilon}{\chi} J_n'(\chi r)\, A(n\alpha) \cos\frac{p\pi z}{L},
\end{aligned}\right\} \quad \left(\chi_z = \frac{p\pi}{L},\ \chi = \chi_{nm}\right) \qquad (70.9)$$

($p = 0, 1, 2, \ldots$), determinando $\chi = \chi_{nm}$ por medio de la fórmula (65.3) y en virtud de las (69.19),

$$\dot{\omega}_0 = \dot{\omega}_{nmp} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}} \sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2},$$

$$\lambda_0 = \lambda_{nmp} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}} \qquad (70.10)$$

(los números B_{nm} están reducidos a una tabla en el suplemento 6, punto 6); campos H

$$\left.\begin{aligned}
\dot{H}_{mz} &= J_n(\chi r)\, A(n\alpha) \operatorname{sen} \frac{p\pi z}{L}, \\
\dot{H}_{mr} &= \frac{\chi_z}{\chi} J_n'(\chi r)\, A(n\alpha) \cos \frac{p\pi z}{L}, \\
\dot{H}_{m\alpha} &= \frac{n\chi_z}{\chi^2 r} J_n(\chi r)\, A'(n\alpha) \cos \frac{p\pi z}{L}, \\
\dot{E}_{mr} &= -i \frac{n\dot{\omega}_0\dot{\mu}}{\chi^2 r} J_n(\chi r)\, A'(n\alpha) \operatorname{sen} \frac{p\pi z}{L}, \\
\dot{E}_{m\alpha} &= i \frac{\dot{\omega}_0\dot{\mu}}{\chi} J_n'(\chi r)\, A(n\alpha) \operatorname{sen} \frac{p\pi z}{L}
\end{aligned}\right\} \left(\chi_z = \frac{p\pi}{L},\ \chi = \chi_{nm}\right), \qquad (70.11)$$

($p = 1, 2, \ldots$); aquí $\chi = \chi_{nm}$ se determina por la fórmula (65.8) de forma que

$$\dot{\omega}_0 = \dot{\omega}_{nmp} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}} \sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}, \quad \lambda_0 = \lambda_{nmp} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}} \qquad (70.12)$$

(los números A_{nm}, véase la tabla en el suplemento 6, punto 6).

Está claro que las funciones vectoriales $\dot{E}_m$ y $\dot{H}_m$ que se confeccionan de las componentes (70.9) y (70.11), son las funciones propias de los problemas (69.15), mientras que mediante las fórmulas (70.10) y (70.12) se hallan los respectivos valores propios de $k^2_{nmp} = \dot{\omega}_{nmp}\dot{\varepsilon}\dot{\mu}$ que son iguales para los dos problemas.

Ya que en diferencia del resonador rectangular, en el caso que tratamos la dirección z se destaca a causa de la simetría axial de la región, esto quiere decir que la división de los campos en las clases E y H ya no es relativa. La degeneración de las oscilaciones tiene también aquí otro carácter y está principalmente acondicionada por las circunstancias que fueron descritas al estudiar una guía de ondas circular (§ 65, puntos 1 y 5). En particular, las frecuencias propias de los tipos de oscilaciones E_{nmp} y H_{nmp} no coinciden. La estructura de ciertos campos se muestra en la fig. 70.4; se recomienda compararla con las figs. 65.2 y 65.4.

Es interesante que en función de la forma del resonador cilíndrico, es decir, de la relación entre R y L, el tipo fundamental de oscilaciones puede ser H_{111} o bien E_{010}. Efectivamente, como se desprende de las (70.10) y (70.12), los números de onda $k^H_{111} = \omega^H_{111}\sqrt{\varepsilon\mu}$ y $k^E_{010} = \omega^E_{010}\sqrt{\varepsilon\mu}$ son iguales, cuando

$$\left(\frac{B_{01}}{R}\right)^2 = \left(\frac{A_{11}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2,$$

es decir, en el caso cuando las dimensiones del resonador responden a la correlación

$$\frac{L}{R} = \frac{\pi}{\sqrt{B^2_{01} - A^2_{11}}} \approx 2{,}03 \qquad (70.13)$$

las oscilaciones H_{111} y E_{010} son degeneradas. Para otras correlaciones entre L y R uno de los números de onda indicados será el mínimo, a saber:

$$\min k_{nmp} = \begin{cases} k^E_{010} \text{ para } L/R < 2{,}03 \\ k^H_{111} \text{ para } L/R < 2{,}03 \end{cases} \qquad (70.14)$$

Esto significa que E_{010} es el tipo fundamental de oscilaciones de un resonador plano, mientras que H_{111} de un resonador alargado.

Es fácil convencerse que los campos giratorios de un resonador cilíndrico ($A(n\alpha) = Ce^{\pm in\alpha}$) crean un flujo de energía azimutal (§ 69, punto 3). Así, en virtud de las (70.11), para el tipo de oscilaciones H_{11p}, obtenemos

$$\overline{\Pi} = \pm \alpha_0 \frac{C^2}{2} \frac{\omega_0\mu}{\chi^2} \frac{J_1^2(\chi r)}{r} \sin^2 \chi_z z \qquad (\dot{\varepsilon} = \varepsilon,\ \dot{\mu} = \mu). \quad (70.15)$$

Pasemos al *cálculo del* factor de calidad Q_m. Para un tipo arbitrario de oscilaciones H_{nmp} para dependencia azimutal $A(n\alpha) = C\cos n\alpha$ sin absorción,

$$E^2_m = C^2 \frac{\omega_0^2\mu^2}{\chi^2}\left[\frac{n^2J^2(\chi r)}{\chi^2 r^2}\operatorname{sen}^2 n\alpha + J'^2_n(\chi r\cos^2 n\alpha\right] \operatorname{sen}^2 \frac{p\pi z}{L} \text{ y teniendo en cuenta} \qquad (69.21)$$

$$\int_V H^2_m\, dv = \frac{\varepsilon}{\mu}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L E^2_m r\overline{dr}\, d\alpha dz =$$

$$= \delta C^2 \frac{k_0^2}{\chi^4}\pi L \int_0^{A_{nm}}\left[\frac{n^2J_n^2(x)}{x^2} + J'^2_n(x)\right] x\, dx =$$

$$= \delta C^2 \frac{k_0^2}{2\chi^4}\pi L\,(A^2_{nm} - n^2)\, J^2_n\,(A_{nm}),$$

siendo $\delta = 1$ para $n = 0$ y $\delta = 1/2$ para $n \neq 0$ (véase la (S6.21)). A continuación,

$$H_m^2 = C^2 J_n^2(\chi r)\cos^2 n\alpha \operatorname{sen}^2 \frac{p\pi z}{L} +$$

$$+ C^2 \frac{\chi_z^2}{\chi^2}\left[J_n'^2(\chi r)\cos^2 n\alpha + \frac{n^2}{\chi^2 r^2} J_n^2(\chi r)\operatorname{sen}^2 n\alpha\right]\cos^2 \frac{p\pi z}{L}.$$

Por esta razón

$$\int_S H_m^2\, ds = 2\int_0^R \int_0^{2\pi} H_m\big|_{z=0}\, r\, dr\, d\alpha + R\int_0^{2\pi}\int_0^L H_m^2\big|_{r=R}\, d\alpha\, dz =$$

$$= \delta C^2\left\{4\pi\left(\frac{\chi_z}{\chi^2}\right)^2 \int_0^{A_{nm}}\left[\frac{n^2 J_n^2(x)}{x^2} + J_n'^2(x)\right] x\, dx + \pi L R J_n^2(A_{nm})\times\right.$$

$$\left.\times\left(1 + \frac{n^2\chi_z^2}{\chi^4 R^2}\right)\right\} = \delta C^2 \pi\left[\frac{2\chi_z^2}{\chi^4}(A_{nm}^2 - n^2) + LR\left(1 + \frac{n^2\chi_z^2}{\chi^4 R^2}\right)\right] J_n^2(A_{nm})$$

($\delta = 1$ siendo $n = 0$ y $\delta = 1/2$ siendo $n \neq 0$).

Introduciendo los resultados obtenidos en la (69.30) y después de ciertas transformaciones, se halla que

$$Q_m = \frac{1}{\Delta^0}\frac{\mu'}{\mu_m}\frac{RL}{(2R - L)\left(\frac{\chi_z}{k_0}\right)^2 + L\frac{A_{nm}^2}{A_{nm}^2 - n^2}} \qquad (70.16)$$

($n \neq 0$ y $n = 0$).

De manera análoga se deducen las fórmulas para el factor de calidad Q_m de los campos de la clase E. Nos limitaremos a escribir el resultado para el tipo de oscilaciones E_{010}:

$$Q_m = \frac{1}{\Delta^0}\frac{\mu'}{\mu_m}\frac{RL}{R + L}. \qquad (70.17)$$

Proponemos obtenerlo independientemente en calidad de ejercicio.

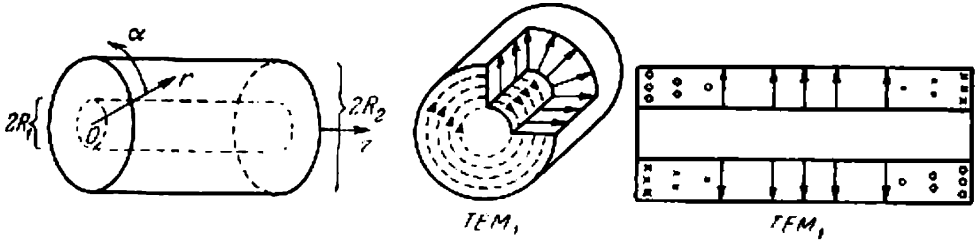


Fig. 70.5.

Para terminar, consideremos un resonador cilíndrico biconexo construido sobre la base de una línea coaxial (fig. 70.5). Para nosotros, en el caso dado, tienen el mayor interés los campos de la clase TEM. Las amplitudes complejas de los vectores $\dot{E}$ y $\dot{H}$ de

las oscilaciones propias se hallan, como anteriormente, confeccionando la superposición de ondas TEM dirigidas en sentidos contrarios (§ 69, punto 1) y empleando para esto las fórmulas (66.14):

$$\dot{E}_m = -r_0 \dot{A} \frac{i\dot{W}}{r} \operatorname{sen} \frac{p\pi z}{L}, \qquad \dot{H}_m = \alpha_0 \dot{A} \frac{1}{r} \cos \frac{p\pi z}{L} \tag{70.18}$$

($p = 1, 2, \ldots$), al mismo tiempo $\dot{W} = \sqrt{\dot{\mu}/\dot{\varepsilon}}$ y $\dot{A} = \dot{I}_m/2\pi$, donde $\dot{I}_m$ es la amplitud compleja de la corriente en el vientre. Vamos a llamar los tipos de oscilaciones TEM_p; en la fig. 70.5 se muestra la estructura de los campos. Las frecuencias propias correspondientes se determinan por medio de la fórmula (69.19):

$$\dot{\omega}_0 = \frac{1}{\sqrt{\dot{\mu}\dot{\varepsilon}}} \frac{p\pi}{L}, \qquad \lambda_0 = \frac{2L}{p}. \tag{70.19}$$

Determinemos el factor de calidad Q_m para el tipo de oscilaciones TEM_p. Es evidente que

$$\int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{L} H_m^2 r\, dr\, d\alpha\, dz = \pi L A^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

y que

$$2 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} H_m^2 \Big|_{z=0} r\, dr\, d\alpha + \int_0^{2\pi} \int_0^{L} \left(R_1 H_m^2 \Big|_{r=R_1} + R_2 H_m^2 \Big|_{r=R_2} \right) d\alpha\, dz = \pi A^2 \left[4 \ln \frac{R_2}{R_1} + L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right],$$

de modo que, según la (69.30),

$$Q_m = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu'}{\mu_m} \frac{2L \ln \frac{R_2}{R_1}}{4 \ln \frac{R_2}{R_1} + L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}. \tag{70.20}$$

3. Resonadores de cavidad próximos a los cuasiestacionarios. Los sistemas resonadores cuasiestacionarios (véase la Introducción (I. 1)), generalmente llamados "circuitos oscilantes", tienen la propiedad de que sus campos eléctricos y magnéticos pueden considerarse separados espacialmente (§ 27, punto 2): los primeros están prácticamente localizados en los elementos capacitivos, y los segundos, en los inductivos. Desde este punto de vista son próximos a ellos ciertos resonadores de cavidad que, principalmente, se emplean en la electrónica de las frecuencias superaltas. Por ejemplo, son de este tipo los sistemas oscilatorios de los klistrones, magnetrones y de los generadores de triodos de frecuencias superaltas que

se muestran esquemáticamente en la fig. 70.6, *a*, *b*, *c*. Se puede decir que sus campos eléctricos están localizados en las estrechas holguras cuasiestacionarias ($d \ll \lambda$) dentro o cerca de las que se produce la interacción entre las oscilaciones del sistema y el flujo electrónico (la calidad cuasiestacionaria de la holgura está enlazada con

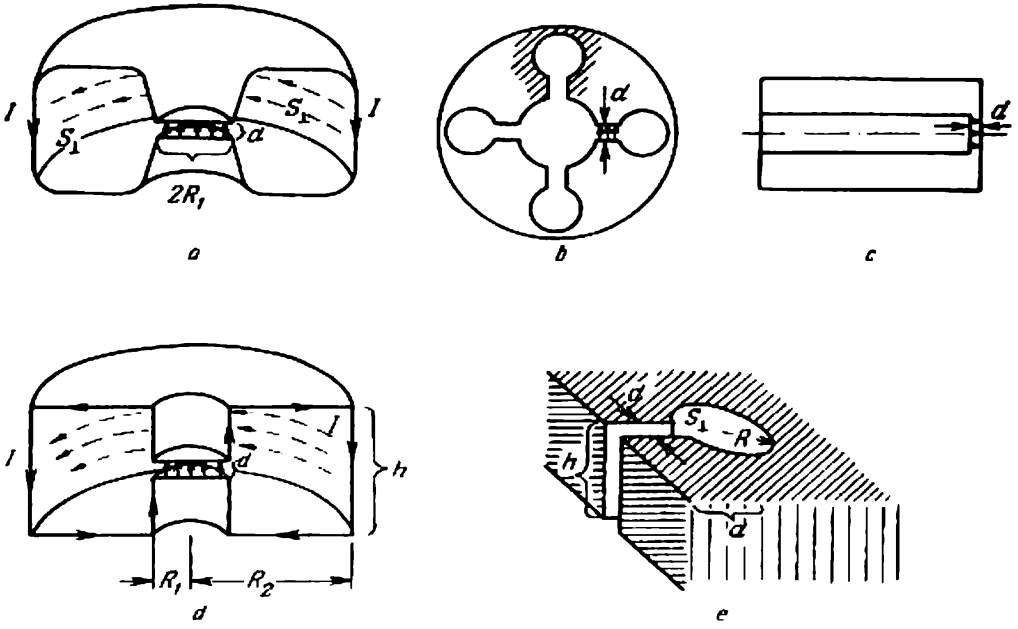


Fig. 70.6.

la exigencia de que el tiempo de tránsito de los electrones sea pequeño en comparación con el período de las oscilaciones). Por esta razón, podemos aproximadamente considerar la holgura como condensador plano, atribuyendo al volumen circundante el papel de pura inductancia.

Apliquemos tal enfoque al caso de un *resonador toroidal* (fig. 70.6, *a*, *d*). Para el condensador plano en la holgura

$$C \approx \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon \pi R_1^2}{d}$$

(§ 17, punto 6). Las líneas de fuerza magnéticas son concéntricas de forma que con una aproximación cuasiestacionaria $H = I/2\pi r$ (compárese con el § 25, punto 3, caso de un toroide), siendo I la corriente total que se abarca por el flujo magnético. La inductancia es igual a

$$\mathscr{L} = \frac{\Phi}{I} \approx \frac{\mu}{I} \int\limits_{S_\perp} H\, ds = \frac{\mu}{2\pi} \int\limits_{S_\perp} \frac{ds}{r}.$$

Ahora ya podemos calcular la frecuencia propia:

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}C}} \approx \sqrt{\frac{2\pi d}{\varepsilon\mu S \int_S \frac{ds}{r}}}. \qquad (70.21)$$

En particular, para un toroide rectangular (fig. 70.6, *d*) esta fórmula toma el aspecto

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{2d}{\varepsilon\mu h R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}}, \qquad (70.21a)$$

El tipo de oscilaciones que hemos considerado es el fundamental; podemos cerciorarnos fácilmente de que siendo d suficientemente pequeña la longitud de onda propia $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{\varepsilon\mu}}$ puede superar considerablemente todas las dimensiones del resonador toroidal que, en este caso, resulta ser un sistema cuasiestacionario.

En la fig. 70.6, *e* se muestra una célula de un resonador magnetrónico (fig. 70.6, *b*). La frecuencia propia de su tipo fundamental de oscilaciones se halla de forma análoga. La capacidad del condensador en la holgura es igual a

$$C \approx \frac{\varepsilon a h}{d}.$$

La cavidad adyacente con cierta aproximación, es *semejante a un* sector de un solenoide infinito, así que $H \approx I/h$ (§ 24, punto 3) y

$$\mathscr{L} = \frac{\Phi}{I} \approx \frac{\mu H S_\perp}{I} = \frac{\mu a l^2}{h}.$$

De aquí

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}C}} \approx \frac{1}{R}\sqrt{\frac{d}{\varepsilon\mu\pi a}}. \qquad (70.22)$$

Obsérvese que partiendo de este principio se puede obtener la expresión aproximada de la frecuencia crítica para el *tipo fundamental* de onda de una guía de ondas en H y П (fig. 66.2, *a*), cuyo campo para $\omega = \omega_{crit}$ debe tener el mismo carácter que en el resonador "doble" del tipo mostrado en la fig. 70.6, *e*. La fórmula tiene la forma

$$\omega_{crit} \approx 2\sqrt{b'/\varepsilon\mu a'(a-a')b} \qquad (70.23)$$

(véase la designación de las dimensiones en la fig. 66.2.*b*). Proponemos que el lector deduzca esta fórmula.

En lo que se refiere al resonador coaxial mostrado en la fig. 70.6, *c*, *éste puede considerarse aproximadamente desde el* punto de vista de la teoría de circuitos, como el sector de una

línea en cortocircuito por un extremo y cargado de una capacidad, por el otro.

4. Conclusión. Hagamos varias observaciones generales. En el punto 1 se demostró que el factor de calidad Q_m de un resonador rectangular para el tipo H_{101} de oscilaciones, al aumentar sus dimensiones m veces crece como $\sqrt{m}$, es decir, como $\sqrt{\lambda_0}$. Fácilmente nos convencemos que esta ley es propia de todos los tipos de oscilaciones de los resonadores de cavidad. Efectivamente, para un tipo fijado de oscilaciones, la relación entre las integrales

$$\int_V H_m^2\, dv \Big/ \int_S H_m^2\, ds$$

en la (69.30), quedando invariable la forma del resonador, es proporcional a λ_0, mientras que la profundidad de penetración Δ^0, a la raiz cuadrada de λ_0.

Para cada tipo de oscilaciones, el resonador de cavidad puede caracterizarse por parámetros equivalentes $\mathscr{L}$, C y $\mathscr{R}$, en la elección de las cuales existe, sin embargo, una indeterminación, ya que en las correlaciones energéticas

$$W_m^m = \frac{\mathscr{L} I_m^2}{2}, \quad W_m^e = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C}$$

($W_m^e = W_m^m$) en el caso general, la corriente o la carga pueden definirse de diferentes modos. En calidad de q podemos, por ejemplo, tomar la carga en cierta parte de la cubierta del resonador y determinar C según el método energético; entonces, la inductancia se halla por medio de la fórmula

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{L}C}}.$$

La resistencia $\mathscr{R}$ (de un circuito en serie equivalente), se calcula después de esto según el conocido factor de calidad: $\mathscr{R} = \omega_0 \mathscr{L}/Q = 1/\omega_0 CQ$.

En una serie de casos, existe un método natural para determinar los parámetros equivalentes. Por ejemplo, para el tipo E_{01n} de oscilaciones de un resonador cilindrico sin absorción, en virtud de las (70.9) y (70.10), $\dot{E}_m = z_0 A J_0(\chi r)$, $\dot{H}_m = \alpha_0 \frac{iA}{W} J_1(\chi r)$ ($\chi = B_{01}/R$, $W = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, $\omega_0 = B_{01}/R\sqrt{\varepsilon\mu}$) y el margen de energía es igual a (S6.20)

$$W = W_m^m = W_m^e = \frac{\varepsilon}{2} \int_V E_m^2\, dv = \frac{1}{2} \pi A^2 \varepsilon R^2 L J_1^2(B_{01}). \quad (70.24)$$

Las cargas de igual valor absoluto y de signos contrarios, están localizadas en las bases del cilindro, mientras que la corriente pasa por la superficie lateral a lo largo de la generatriz y, más adelante, de forma radial por las bases, decreciendo en ellas hasta llegar a cero en su centro. Tomando como q la carga de una

de las bases y como I, la corriente que pasa por toda la superficie lateral, se tiene (S6.18)

$$q_m = \int\limits_{S_{\text{base}}} \xi_m\, ds = \varepsilon \int\limits_{S_{\text{base}}} E_m\, ds = 2\pi A \varepsilon R^2 J_1(B_{01})/B_{01}, \quad (70.25)$$

$$I_m = 2\pi R \eta_m = 2\pi R H_{m\,|\,r=R} = 2\pi R A J_1(B_{01})/W.$$

En este caso, la capacidad e inductancia se hallan independientemente de las expresiones energéticas:

$$C = \frac{q_m^2}{2W_m^e} = 4\pi\varepsilon R^2/B_{01}^2 L \quad \text{y} \quad \mathscr{L} = \frac{2W_m^m}{I_m^2} = \mu L/4\pi \quad (70.26)$$

y resultan "adaptadas", ya que según la fórmula $\omega_0 = 1/\sqrt{\mathscr{L}C}$ se obtiene un valor correcto de ω_0.

Haciendo uso de la expresión del factor de calidad Q_m (70.17), también hallamos

$$\mathscr{R} = \frac{\omega_0 \mathscr{L}}{Q} = \frac{1}{\omega_0 C Q} = \frac{\omega_0 \mu_m \Delta^0}{4\pi}\left(1 + \frac{l}{R}\right) = \frac{\mathscr{R}_S}{2\pi}\left(1 + \frac{L}{R}\right) \quad (70.27)$$

(no habiendo absorción en el dieléctrico).

De este mismo modo se propone considerar un resonador coaxial (campos TEM) y un resonador rectangular para las oscilaciones principales.

IV. Campos forzados. Sistemas irregulares

Los campos electromagnéticos en los resonadores de cavidad y sistemas de guiado que se emplean en radiotecnia son, por lo general, *forzados*; se excitan por medio de *elementos de comunicación* especiales que, en esencia, juegan el papel de antenas. Las oscilaciones libres de los resonadores y las ondas libres de las guías de ondas, son campos que pueden *posiblemente* existir en estos sistemas al no haber comunicaciones energéticas exteriores; sólo raramente estos campos representan de por sí interés técnico. Los campos forzados son la consecuencia *necesaria* de la acción de los manantiales (§ 28, punto 1). Con determinadas condiciones, el campo forzado en una guía de ondas o resonador puede ser por su estructura muy cercano a un campo libre de uno u otro tipo, pero diverge de este porque su amplitud se determina totalmente por el consumo de energía de los manantiales exteriores. Como será demostrado, en el caso general, podemos obtener los campos forzados al resolver los problemas de electrodinámica como la superposición de campos libres (más adelante efectuaremos ciertas precisiones).

Entendemos por sistemas de guiado y resonadores de cavidad *regulares* aquellos para los que los problemas límites de electrodi-

námica tienen soluciones analíticas cerradas. En el caso de los resonadores de cavidad con un medio homogéneo isótropo, estos son los problemas (69.15); en este mismo sentido se hablaba de los problemas (62.8) y (62.12) en el § 66, punto 1. Los sistemas reales siempre son, en menor o mayor grado, irregulares. Los sistemas de guiado no son infinitos y contienen diversos elementos (incluyendo los de comunicación) que complican su forma y las propiedades del medio. Se emplea toda clase de empalmes de las guías de onda y de otros sistemas de guiado, elementos huecos, etc. Por esta razón, más adelante, vamos a prestar también atención a estas cuestiones.

§ 71. Oscilaciones forzadas de un resonador

1. Planteamiento del problema. En la fig. 71.1 se muestran tres métodos principales de empalme de un resonador hueco con un sistema de guiado apantallado: en calidad de "carga terminal" (fig. 71.1, *a*), "elemento en serie" (fig. 71.1, *b*) y "elemento paralelo" (fig. 71.1, *c*). El orificio de empalme sirve de elemento de

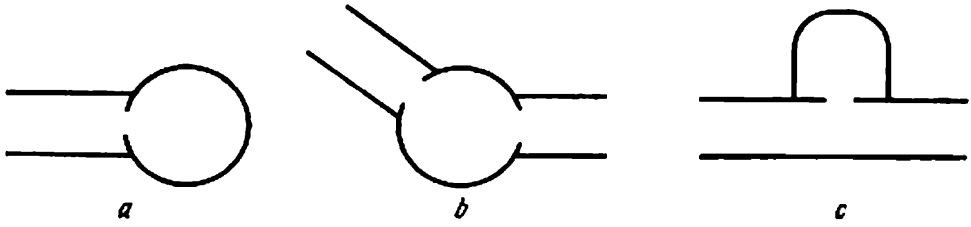


Fig. 71.1.

comunicación, o sea, de antena que excita el campo en el resonador bajo la influencia del proceso electromagnético que transcurre en la guía de ondas; en particular, esto puede ser una antena ranurada (§ 55, punto 2). Como elementos de comunicación de este tipo, pueden utilizarse diferentes sistemas semejantes a los radiadores elementales eléctrico y magnético (§§ 44, 45), es decir, "varillas" y "cuadros"; en electrónica de las frecuencias superaltas, los resonadores se excitan mediante el flujo de electrones. En el capítulo 6 también se hablará de la excitación de resonadores por un medio activo, cuyas propiedades dependen de procesos paramétricos o bien cuánticos. En la fig. 71.2 se muestran diferentes elementos de comunicación. Examinando dicha figura podemos establecer ciertas consideraciones que nos permiten elegir y disponer estos elementos de tal forma que se obtengan campos de la estructura deseada. Por ejemplo, en la fig. 71.2, *a* la excitación de un resonador cilíndrico se verifica por medio de una varilla radial que se encuentra en la parte media y que es la continuación del

conductor medio de una línea coaxial. Tal antena crea un campo con componente eléctrica paralela a sí misma y si la frecuencia de excitación resulta ser cercana a la frecuencia propia de las oscilaciones H_{111}, se debe esperar que el campo de las oscilaciones forzadas será parecido por su estructura (lo que se indica con el símbolo $\tilde{H}_{111}$). De modo análogo, en el caso de un resonador coaxial biconexo (fig. 71.2, *b*) una antena de cuadro, para una frecuencia

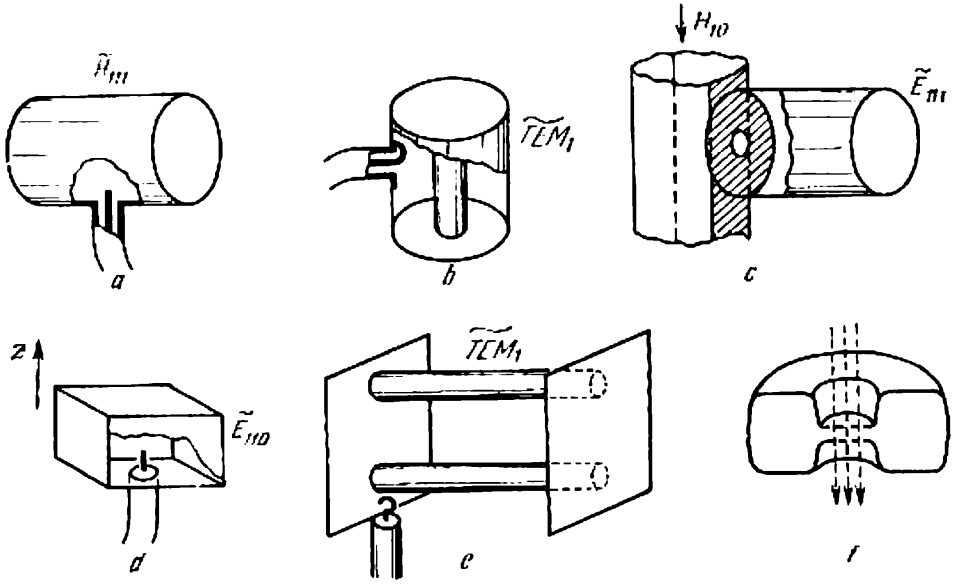


Fig. 71.2.

favorable, excita un campo que poco difiere del tipo de oscilaciones libres TEM_1; efectivamente, la radiación de la antena de cuadro tiene a su plano una componente magnética normal que, en el caso que tratamos, como es necesario, está dirigida azimutalmente. Desde este mismo punto de vista debemos considerar los demás casos representados en la fig. 71.2; entre ellos la excitación de un resonador toroidal por el flujo electrónico (fig. 71.2, *f*), así como un resonador construido sobre la base de una línea bifilar por medio de un "cuadro" (o bien, como la suelen llamar un "bucle de acoplamiento").

Después de estas observaciones previas, de un carácter cualitativo, pasaremos al planteamiento del problema electrodinámico sobre la excitación de un resonador de cavidad por medio de los manantiales prefijados. El resonador es la cavidad V, limitada por una cubierta idealmente conductora con un orificio S_Σ al que se aplica un campo exterior en forma de la componente tangencial del vector $\boldsymbol{E}^{ex}$, fig. 71.3. Además, en el interior del resonador están dispuestas las distribuciones de las corrientes exteriores eléc-

trica y magnética j^{ex} y j^{m}, conocidas de antemano. De este modo, tomando las ecuaciones simétricas de Maxwell (46.2), se escribe

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \dot{H}_m = i\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_m + \dot{j}^{ex}_m, \\ &\operatorname{rot} \dot{E}_m = -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_m - \dot{j}^{m}_m \text{ en } V; \\ &\dot{E}_{m\tau} = 0 \text{ en } S - S_\Sigma,\ \dot{E}_{m\tau} = \dot{E}^{ex}_{m\tau} \text{ en } S_\Sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (71.1)$$

Este es el planteamiento inicial del problema.

¿Cómo hallar la solución del problema (71.1)? La intuición nos hace sugerir que el campo forzado debe contener elementos estructurales que correspondan a todos los posibles tipos de las oscilaciones propias de un resonador, expresados en menor o mayor grado en dependencia de hasta qué punto *son próximas sus propias frecuencias a la* frecuencia de excitación, así como en dependencia del tipo de los manantiales. Si el problema sobre las oscilaciones libres del resonador fue previamente resuelto, entonces, todos estos tipos de oscilaciones con sus frecuencias son conocidos.

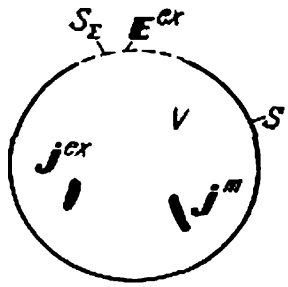


Fig. 71.3.

2. Representación del campo forzado. Lo dicho hace que sugiera la idea de buscar la solución para $\dot{E}_m$ y $\dot{H}_m$ en el problema (71.1), en forma de la superposición de todas las posibles oscilaciones propias del resonador:

$$\dot{E}_m \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{E}^n_m \quad \text{y} \quad \dot{H}_m \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n \dot{H}^n_m. \qquad (71.2)$$

Pero el análisis nos muestra que el desarrollo de (71.2) no contiene todos los elementos necesarios para representar el campo de *las oscilaciones forzadas. Aquí debemos detenernos.*

Limitémonos por el caso de un medio homogéneo ($\dot{\varepsilon} = \text{const}$, $\dot{\mu} = \text{const}$). Entonces, las funciones vectoriales $\dot{E}^n_m$ y $\dot{H}^n_m$ serán las funciones propias de los problemas (69.15) y a ellas corresponden los valores propios de $k^2_n = \omega^2_n \dot{\varepsilon}\dot{\mu}$ (siendo $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\mu}$ complejas, será *compleja la frecuencia propia* ω_n, *mientras que el número de onda* k_n será real, § 69, puntos 2, 3). Siendo funciones propias en el problema del tipo (S8.11), tanto $\dot{E}^n_m$ como $\dot{H}^n_m$ son ortogonales; las podemos normalizar, es decir, subordinarlas a la correlación (S8.6) por medio de la elección de los coeficientes constantes. De esta manera, las representaciones (71.2) pueden considerarse como series de Fourier del tipo (S8.7). Sin embargo, en tal caso se plantea la pregunta sobre la totalidad de los sistemas $\{\dot{E}^n_m\}$ y $\{\dot{H}^n_m\}$ y, entonces, se aclara que estos sistemas no poseen tal propiedad. Los sistemas completos de funciones propias se crean por los problemas

(S5.29) y (S5.30) y, además, los sistemas $\{\dot{E}_m^n\}$ y $\{\dot{H}_m^n\}$ resultan estar contenidos en los indicados sistemas completos, con los cuales ya se puede realizar la descomposición de Fourier, esperando la convergencia por término medio.

Sin entrar en detalles [1], daremos una serie de datos que hay que tener en cuenta al resolver los problemas sobre la excitación de un resonador. Las soluciones del primer problema de contorno (S5.29) $\boldsymbol{u}$, crean un sistema $\{\boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{E}_{n'}\}$ que se descompone en dos subsistemas: $\{\boldsymbol{E}_n\}$, div $\boldsymbol{E}_n = 0$ $(k^2 = k_n^2)$ y $\{\boldsymbol{E}_{n'}\}$, rot $\boldsymbol{E}_{n'} = 0$ $(k^2 = k_{n'}^2)$. En señal de que las funciones satisfacen en la frontera de la región las mismas condiciones que el vector $\boldsymbol{E}$, éstas se designan por el mismo símbolo y, convencionalmente, se llaman *eléctricas*. Las funciones $\boldsymbol{E}_n$ que pertenecen al primer subsistema son *solenoidales* y pueden considerarse como las amplitudes complejas del vector $\boldsymbol{E}$ de las oscilaciones propias del resonador: $\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{E}_m^n$. Las funciones del segundo subsistema son de *potencial*; son las gradientes de las funciones escalares $\boldsymbol{E}_{n'} = \nabla\varphi_{n'}$; en lo que se refiere a las últimas, son ni más ni menos que las funciones propias del problema (S5.27): $\varphi_{n'} = u$.

De modo semejante, las soluciones del segundo problema de contorno (S5.30), $\boldsymbol{u}$ crean un sistema $\{\boldsymbol{H}_n, \boldsymbol{H}_{n'}\}$ que también consta de dos subsistemas: $\{\boldsymbol{H}_n\}$, div $\boldsymbol{H}_n = 0$ $(k^2 = k_n^2)$ y $\{\boldsymbol{H}_{n'}\}$, rot $\boldsymbol{H}_{n'} = 0$ $(k^2 = k_{n'}^2)$. Siendo designadas por el mismo símbolo que el vector $\boldsymbol{H}$, estos subsistemas se llaman *magnéticas*, ya que en la frontera de la región satisfacen las mismas condiciones. Las funciones solenoidales $\boldsymbol{H}_n$ pueden semejarse con las amplitudes complejas $\dot{\boldsymbol{H}}_m^n$ del vector $\boldsymbol{H}$ de las oscilaciones propias del resonador. En lo que se trata de las funciones potenciales $\boldsymbol{H}_{n'}$, éstas son los gradientes $\nabla\psi_{n'}$, siendo las funciones escalares $\psi_{n'}$ las funciones propias del problema (S5.28): $\psi_{n'} = u$.

Debemos aún añadir que todo lo anteriormente dicho se refiere a regiones simplemente conexas y a aquellas, cuyas superficies de separación no están formadas por partes separadas. En el caso general, además de las funciones propias solenoidales y potenciales (que forman sistemas infinitos), los problemas (S5.29) y (S5.30) pueden contener un número finito de funciones propias *armónicas* para las que tanto el rotacional como la divergencia se reducen a cero; esto es la solución de la ecuación vectorial de Laplace $(k = 0)$. Convendremos que si tales funciones aparecen, las incluiremos en los subsistemas de potencial.

En virtud de la (S8.6), podemos considerar que los sistemas de funciones $\{\boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{E}_{n'}\}$ y $\{\boldsymbol{H}_n, \boldsymbol{H}_{n'}\}$ son ortonormalizados.

En lugar de las representaciones (71.2) construidas intuitivamente de las soluciones $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ del problema (71.1), ahora escri-

---

[1] Esta cuestión se expone más detalladamente en [J.3].

bimos lo siguiente:

$$\underline{\dot{E}_m} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{E}_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n'} \dot{E}_{n'} \quad \text{y} \quad \underline{\dot{H}_m} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \dot{H}_n + \sum_{n'=1}^{\infty} b_{n'} \dot{H}_{n'}. \quad (71.3)$$

Eligiendo los coeficientes del modo debido, las representaciones (71.3) forman series de Fourier que convergen por término medio.

3. Propiedades de las funciones propias. Más abajo, en el punto 4, se obtendrá la solución del problema (71.1) en forma de las representaciones (71.3), es decir, que sus coeficientes serán hallados. A continuación, en el punto 6, las funciones $\dot{E}_n$, $\dot{E}_{n'}$ y $\dot{H}_n$, $\dot{H}_{n'}$ serán construidas para uno de los casos importantes. Con anterioridad, consideraremos ciertas singularidades de las funciones propias.

Ya que queremos identificar las funciones $\dot{E}_n$ y $\dot{H}_n$ con las amplitudes complejas de los vectores $\dot{E}$ y $\dot{H}$ de las oscilaciones libres de un resonador ($\dot{E}_n = \dot{E}_m^n$, $\dot{H}_n = \dot{H}_m^n$), debemos subordinarlas a las ecuaciones de Maxwell. Este hecho impone determinadas ligazones.

Escribamos las ecuaciones de Maxwell para las oscilaciones propias del tipo n, así como las ecuaciones de Maxwell para las oscilaciones propias del tipo k, tomadas en la forma compleja conjugada:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \dot{E}_n = -i\dot{\omega}_n \dot{\mu} \dot{H}_n, \quad && \operatorname{rot} \dot{E}_k^* = i\dot{\omega}_n^* \dot{\mu}^* \dot{H}_k^*, \\ &\operatorname{rot} \dot{H}_n = i\dot{\omega}_n \dot{\varepsilon} \dot{E}_n, && \operatorname{rot} \dot{H}_k^* = -i\dot{\omega}_k^* \dot{\varepsilon}^* \dot{E}_k^*. \end{aligned} \quad (71.4)$$

Fijemos nuestra atención en la primera ecuación de la primera columna y en la segunda, de la segunda. Multiplicándolas respectivamente por $\dot{H}_k^*$ y $\dot{E}_n$, restando sus miembros primero y segundo y, seguidamente, integrando respecto a la región del resonador (compárese con el § 48, punto 1), se obtiene que

$$\dot{\omega}_n \dot{\mu} \int_V \dot{H}_n \dot{H}_k^* \, dv - \dot{\omega}_k^* \dot{\varepsilon}^* \int_V \dot{E}_n \dot{E}_k^* \, dv = 0. \quad (71.5a)$$

De manera semejante, de las restantes ecuaciones (71.4), se halla

$$\dot{\omega}_k^* \dot{\mu}^* \int_V \dot{H}_n \dot{H}_k^* \, dv - \dot{\omega}_n \dot{\varepsilon} \int_V \dot{E}_n \dot{E}_k^* \, dv = 0. \quad (71.5b)$$

De las (71.5a) y (71.5b) no es difícil eliminar la integral que contiene $\dot{E}$ o bien otra. Esto nos permite obtener las siguientes igualdades:

$$(\dot{k}_n^2 - \dot{k}_k^2) \int_V \dot{H}_n \dot{H}_k^* \, dv = 0 \quad \text{y} \quad (\dot{k}_n^2 - \dot{k}_k^2) \int_V \dot{E}_n \dot{E}_k^* \, dv = 0, \quad (71.6)$$

siendo $\dot{k}_n^2 = \dot{\omega}_n^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu} = \dot{\omega}_n^{*2} \dot{\varepsilon}^* \dot{\mu}^*$ y $\dot{k}_k^2 = \dot{\omega}_k^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu} = \dot{\omega}_n^{*2} \dot{\varepsilon}^* \dot{\mu}^*$ los valores propios reales de los problemas (69.15) o bien (S5.29), (S5.30). Las expresiones obtenidas nos demuestran que las funciones propias solenoi-

dales son ortogonales cuando no hay degeneración ($k_n^2 \neq k_k^2$), lo que confirma la deducción del Suplemento 8, punto 3.

En virtud de la dependencia mutua de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, las funciones eléctricas o magnéticas no pueden ser normalizadas arbitrariamente (ya que entonces no podrían satisfacer las ecuaciones de Maxwell). Haciendo en las (71.5) $k = n$, por ejemplo, se tiene

$$\dot{\omega}_n \dot{\mu} \int_V \boldsymbol{H}_n \boldsymbol{H}_n^* \, dv = \dot{\omega}_n^* \dot{\varepsilon}^* \int_V \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{E}_n^* \, dv.$$

Pero como $\dot{\omega}_n \dot{\mu} = k_n \dot{\mu} / \sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}} = k_n \sqrt{\dot{\mu}} / \sqrt{\dot{\varepsilon}}$ y $\dot{\omega}_n^* \dot{\varepsilon}^* = k_n \dot{\varepsilon}^* / \sqrt{\dot{\varepsilon}^* \dot{\mu}^*} = k_n \sqrt{\dot{\varepsilon}^*} / \sqrt{\dot{\mu}^*}$, de aquí se desprende que

$$|\dot{\mu}| \int_V \boldsymbol{H}_n \boldsymbol{H}_n^* \, dv = |\dot{\varepsilon}| \int_V \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{E}_n^* dv. \tag{71.7}$$

Para observar la uniformidad, las funciones propias potenciales $\boldsymbol{E}_{n'} = \nabla \varphi_{n'}$ y $\boldsymbol{H}_{n'} = \nabla \psi_{n'}$ pueden también considerarse como las soluciones de las ecuaciones de Maxwell (71.4). Teniendo en cuenta la identidad (S1.33) advertimos que pues $\boldsymbol{E}_{n'} \neq 0$ y $\boldsymbol{H}_{n'} \neq 0$, esto es sólo posible para $\omega_{n'} = 0$, o sea, que todas las "frecuencias propias" $\omega_{n'}$ son iguales a cero en aquellas de las ecuaciones de Maxwell que responden a las funciones propias potenciales [1]). En diferencia de las ecuaciones (71.4), las funciones potenciales eléctricas y magnéticas no están mutuamente ligadas. Pero con objeto de que los cálculos sean más cómodos, dicha ligazón puede ser introducida artificialmente en una igualdad que repita a la (71.7). Así, para los sistemas ortogonales $\{\boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{E}_{n'}\}$ y $\{\boldsymbol{H}_n, \boldsymbol{H}_{n'}\}$, puede ser establecida la siguiente correlación de ortonormalización:

$$|\dot{\mu}| \int_V \boldsymbol{H}_{k^{(\prime)}}^* \boldsymbol{H}_{n^{(\prime)}} \, dv = |\dot{\varepsilon}| \int_V \boldsymbol{E}_{k^{(\prime)}}^* \boldsymbol{E}_{n^{(\prime)}} dv = \delta_{k^{(\prime)} n^{(\prime)}}. \tag{71.8}$$

En las anteriores designaciones la raya entre paréntesis significa que ella puede quedarse o omitirse, o sea, que por ejemplo, $\boldsymbol{E}_{n^{(\prime)}}$ bien es una función solenoidal $\boldsymbol{E}_n$, bien una función potencial $\boldsymbol{E}_{n'}$.

4. Soluciones del problema sobre las oscilaciones forzadas. Retornemos a la enunciación (71.1) del problema planteado sobre la excitación de un resonador para obtener su solución.

De (71.1) se desprende que

$$\left.\begin{aligned} &\int_V (\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_m - i\omega \dot{\varepsilon} \dot{\boldsymbol{E}}_m - \dot{\boldsymbol{j}}_m^{ex}) \, \dot{\boldsymbol{E}}_{k^{(\prime)}}^* \, dv = 0, \\ &\int_V (\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{E}}_m + i\omega \dot{\mu} \dot{\boldsymbol{H}}_m + \dot{\boldsymbol{j}}_m^{m}) \, \dot{\boldsymbol{H}}_{k^{(\prime)}}^* \, dv = 0, \end{aligned}\right\} k^{(\prime)} = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{71.9}$$

[1]) Remarquemos que dicha "∞ — degeneración múltiple" de las funciones potenciales no tiene relación alguna con los problemas (S5.29) y (S5.30) en los que $k_{n'}^2 \neq 0$.

ya que las magnitudes entre paréntesis son iguales a cero. Las igualdades (71.9) resultan ser ni más ni menos que una variedad de la correlación de proyección (S8.15). Después de aplicar la fórmula (S1.31), es decir, de integrar por partes, se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
&\int_V \dot{\boldsymbol{H}}_m \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{E}}^*_{k(\nu)}\, dv - \int_V (i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m + \dot{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{ex}}_m)\, \dot{\boldsymbol{E}}^*_{k(\nu)}\, dv = 0,\\
&\int_V \dot{\boldsymbol{E}}_m \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}^*_{k(\nu)}\, dv + \int_{S_\Sigma} \left[\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{ex}}_m,\ \dot{\boldsymbol{H}}^*_{k(\nu)}\right] ds + \int_V (i\omega\dot{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_m + \\
&\qquad + \dot{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{m}}_m)\, \dot{\boldsymbol{H}}^*_{k(\nu)}\, dv = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (71.10)$$

$k(\nu) = 1, 2, \ldots, \infty,$

donde se han tenido en cuenta las condiciones límites de los problemas (71.1) y (S5.29); el último es importante en virtud de que en él figura la función $\boldsymbol{E}_{n(\nu)}$.

Aquí podemos introducir las representaciones de $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ en forma de las series ortogonales (71.3), cuyos coeficientes deben ser definidos. En las (71.9) tal planteamiento sería infundado, puesto que exigiría la diferenciación término a término de las series (operación rot); en el caso general, esto nos llevaría a un resultado incorrecto.

De este modo, sustituyendo en las (71.10) $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ por $\underline{\dot{\boldsymbol{E}}_m}$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ por $\underline{\dot{\boldsymbol{H}}_m}$, en virtud de las (71.3) y teniendo en cuenta las (71.4), se obtiene que

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{n(\nu)=1}^{\infty} \left[\dot{\omega}^*_{k(\nu)}\dot{\mu}^* b_{n(\nu)} \int_V \boldsymbol{H}_{n(\nu)}\boldsymbol{H}^*_{k(\nu)}\, dv - \omega\dot{\varepsilon} a_{n(\nu)} \int_V \boldsymbol{E}_{n(\nu)}\boldsymbol{E}^*_{k(\nu)}\, dv\right] + \\
&\qquad + i \int_V \dot{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{ex}}_m \boldsymbol{E}^*_{k(\nu)}\, dv = 0,\\
&\sum_{n(\nu)=1}^{\infty} \left[\dot{\omega}^*_{k(\nu)}\dot{\varepsilon}^* a_{n(\nu)} \int_V \boldsymbol{E}_{n(\nu)}\boldsymbol{E}^*_{k(\nu)}\, dv - \omega\dot{\mu} b_{n(\nu)} \int_V \boldsymbol{H}_{n(\nu)}\boldsymbol{H}^*_{k(\nu)}\, dv\right] + \\
&\qquad + i \int_V \dot{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{m}}_m \boldsymbol{H}^*_{k(\nu)}\, dv + i \int_{S_\Sigma} \left[\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{ex}}_m,\ \dot{\boldsymbol{H}}^*_{k(\nu)}\right] ds = 0,
\end{aligned}\right.$$

siendo $\dot{\omega}_{k'} = 0$ para todas las k' (esto es equivalente a que rot $\boldsymbol{E}_{k'} = 0$ y rot $\boldsymbol{H}_{k'} = 0$, véase el punto 3). Nos queda hacer uso de

la correlación de ortonormalización (71.8), lo que nos da

$$\left.\begin{aligned}
&\omega\frac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|}a_{k(\nu)}-\dot{\omega}^{*}_{k(\nu)}\frac{\dot{\mu}^{*}}{|\dot{\mu}|}b_{k(\nu)}=i\int\limits_{V}\dot{j}^{ex}_{m}\dot{E}^{*}_{k(\nu)}\,dv,\\
&\dot{\omega}^{*}_{k(\nu)}\frac{\dot{\varepsilon}^{*}}{|\dot{\varepsilon}|}a_{k(\nu)}-\omega\frac{\dot{\mu}}{|\dot{\mu}|}b_{k(\nu)}=-1\int\limits_{V}\dot{j}^{m}_{m}\dot{H}^{*}_{k(\nu)}\,dv-\\
&\qquad\qquad -i\int\limits_{S_\Sigma}[\dot{E}^{ex}_{m},\ \dot{H}^{*}_{k(\nu)}]\,ds,
\end{aligned}\right\}\ \dot{\omega}_{k'}=0. \qquad (71.11)$$

De aquí

$$\left.\begin{aligned}
a_k&=\frac{i}{\omega^2-\dot{\omega}^2_k}\frac{|\dot{\varepsilon}|}{\dot{\varepsilon}}\left[\omega\int\limits_{V}\dot{j}^{ex}_{m}\dot{E}^{*}_{k}\,dv+\frac{\dot{\mu}^{*}}{\dot{\mu}}\dot{\omega}^{*}_{k}\left(\int\limits_{V}\dot{j}^{m}_{m}\dot{H}^{*}_{k}\,dv+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\int\limits_{S_\Sigma}[\dot{E}^{ex}_{m},\ \dot{H}^{*}_{k}]\,ds\right)\right],\\
b_k&=\frac{i}{\omega^2-\dot{\omega}^2_k}\frac{|\dot{\mu}|}{\dot{\mu}}\left[\frac{\dot{\varepsilon}^{*}}{\dot{\varepsilon}}\dot{\omega}^{*}_{k}\int\limits_{V}\dot{j}^{ex}_{m}\dot{E}^{*}_{k}\,dv+\right.\\
&\qquad\left.+\omega\left(\int\limits_{V}\dot{j}^{m}_{m}\dot{H}^{*}_{k}\,dv+\int\limits_{S_\Sigma}[\dot{E}^{ex}_{m},\ \dot{H}^{*}_{k}]\,ds\right)\right],\\
a_{k'}&=\frac{i}{\omega}\frac{|\dot{\varepsilon}|}{\dot{\varepsilon}}\int\limits_{V}\dot{j}^{ex}\dot{E}^{*}_{k'}\,dv;\\
b_{k'}&=\frac{i}{\omega}\frac{|\dot{\mu}|}{\dot{\mu}}\left(\int\limits_{V}\dot{j}^{m}_{m}\dot{H}^{*}_{k'}\,dv+\int\limits_{S_\Sigma}[\dot{E}^{ex}_{m},\dot{H}^{*}_{k'}]\,ds\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (71.12)$$

De este modo, quedan definidos todos los coeficientes de las series ortogonales (71.3).

5. Investigación de las oscilaciones forzadas. Examinemos atentamente la solución del problema sobre las oscilaciones forzadas de un resonador, representada por las series (71.3) con los coeficientes (71.12).

Primeramente, señalemos que en el caso de un resonador sin orificio excitado por corriente eléctrica exterior ($\dot{E}^{ex}=0$, $\dot{j}^{m}=0$), $b_{k'}=0$, es decir, en el desarrollo de $\dot{H}_m$ las funciones potenciales están ausentes (recordemos que en el orificio el campo eléctrico es equivalente a la corriente magnética superficial, § 47, punto 1). Si, por el contrario, sólo hay manantiales magnéticos ($\dot{j}^{ex}=0$), entonces $a_{k'}=0$: no hay funciones potenciales en el desarrollo de $\dot{E}_m$.

En segundo lugar, ahora tenemos la posibilidad de argumentar el concepto aplicado más arriba, en el punto 1. Como se desprende de las (71.12), para las funciones vectoriales solenoidales de los desarrollos de $\underline{\dot{E}}_m$ y $\underline{\dot{H}}_m$, los coeficientes crecen al disminuir

$|\omega^2 - \dot{\omega}_k^2|$. En otras palabras, la componente estructural del campo de las oscilaciones *forzadas* que corresponde a las oscilaciones libres del tipo k, aumenta a medida que la frecuencia de excitación ω se aproxima a la frecuencia propia de este tipo. Lo anteriormente dicho necesita cierta aclaración. Sea que primeramente no hay absorción y las frecuencias propias son reales ($\dot{\omega}_k = \omega_k$). Entonces, *si las integrales en las (71.12) no son iguales a cero*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k \longrightarrow b_k \longrightarrow \infty \\ \text{siendo } \omega \longrightarrow \omega_k, \end{array} \right.$$

lo que es la *resonancia ideal* del tipo k; puesto que como podemos demostrar, al eliminar el término k-ésimo las series (71.3) convergen, es decir, dan magnitudes finitas que pueden ser despreciadas, el campo de las oscilaciones forzadas tiene una estructura del tipo k de las oscilaciones libres. Pero la resonancia del tipo k es imposible si, en virtud del carácter de las manantiales, las integrales en las expresiones $a_k (b_k)$ son iguales a cero: "los manantiales no tienen proyección k". Por ejemplo, en el caso de un resonador rectangular excitado por una corriente dirigida por el eje x ($\boldsymbol{j}^{ex} = \boldsymbol{x}_0 j^{ex}$) no habrá resonancia del tipo E_{110} ($\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{z}_0 E_k$) ya que $j_m^{ex} \dot{E}_k^* = 0$. *La intensidad de la excitación de una u otra componente* estructural depende de la orientación de los elementos de acoplamiento; para las posiciones mostradas en la fig. 71.2, dicha intensidad es la máxima.

Al haber absorción, los modelos de los coeficientes a_k y b_k son *proporcionales a la función de la frecuencia*

$$A_k(\omega) = \frac{1}{|\omega^2 - \dot{\omega}_k^2|}. \qquad (71.13)$$

Teniendo en cuenta que en virtud de (69.26), $Q_k = \omega_k'/2\omega_k''$ es el *factor de calidad del resonador para el tipo k de oscilaciones*, se escribe:

$$A_k(\omega) = \frac{1}{\omega_k'^2 \left| \left(\frac{\omega}{\omega_k'} \right)^2 - 1 + \frac{1}{4Q_k^2} - i \frac{1}{Q_k} \right|}. \qquad (71.13a)$$

La función $A_k(\omega)$ alcanza el máximo para una frecuencia $\omega = \omega_{(k)}$, siendo además

$$\left. \begin{array}{l} \text{máx } A_k(\omega) = A_k(\omega_{(k)}) = \dfrac{Q_k}{\omega_k'^2}, \\ \omega_k = \omega_k' \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q_k^2}}, \end{array} \right\} \qquad (71.14)$$

Aquí se trata de la *resonancia real* del sistema; mientras más elevado sea el factor de calidad Q_k, la *frecuencia de resonancia* $\omega_{(k)}$ más se aproximará a la parte real ω_k' de la frecuencia propia $\dot{\omega}_k$.

Como vemos, en este caso los coeficientes de las series (71.3) a_k y b_k toman los valores máximos de $a_k(\omega_{(k)})$ y $b_k(\omega_{(k)})$ que son proporcionales al factor de calidad Q_k.

En la fig. 71.4 se representa la gráfica de las funciones $A_k(\omega)$ referida a su valor máximo $A_k(\omega_{(k)})$; ésta es una curva de resonancia típica. Despreciando en la (71.13a) el término $1/4Q_k^2$ y

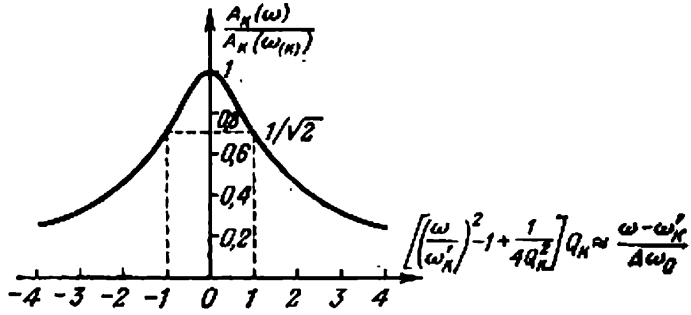


Fig. 71.4.

teniendo en cuenta la igualdad aproximada $\left(\frac{\omega}{\omega_k'}\right)^2-1\approx 2\frac{\omega-\omega_k'}{\omega_k'}$, no es difícil demostrar que

$$\left.\begin{aligned} Q_k^{-1} &\approx 2\Delta\omega_0/\omega_{(k)}, \\ \dot{\omega}_k &\approx \omega_{(k)}+i\Delta\omega_0, \end{aligned}\right\} \qquad (71.15)$$

siendo $2\Delta\omega_0$ la "banda pasante" del resonador para las oscilaciones del tipo k en cuyos extremos, según la definición, la amplitud del campo a excitar decrece $\sqrt{2}$ veces (fig. 71.4). La característica de frecuencia del resonador se expresa por la función $\underline{E}_m(\omega)$ o bien $\underline{H}_m(\omega)$ (71.3); con factores de calidad Q_k suficientemente elevados, su gráfica es cercana a la superposición de las curvas de resonancia

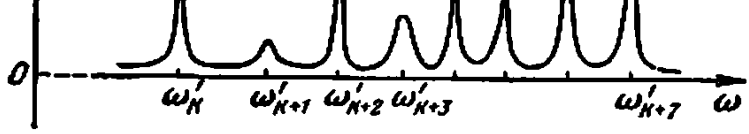


Fig. 71.5.

de todos los tipos de oscilaciones, teniendo en cuenta que la intensidad de estas últimas depende del carácter de los manantiales (elementos de comunicación), lo que reflejan las integrales en las (71.12). La fig. 71.5 ilustra de modo cualitativo lo anteriormente dicho. Obsérvese, que los coeficientes de las funciones potenciales en (71.3) varían monótonamente, creciendo al disminuir la frecuen-

cia; las respectivas componentes estructurales del campo no resonan.

Los resultados obtenidos dejan lugar a una generalización posterior. A pesar de que, en esencia, todas las operaciones se han verificado respecto al caso de un sistema hueco con cubierta ideal-mente conductora y absorción en el dieléctrico interior, las fórmulas (71.3), (71.12) y todas las siguientes, pueden aplicarse al considerar resonadores con cubierta metálica e incluso, al haber radiación. Para que esto sea posible, es necesario que la estructura de los campos se diferencie insignificativamente de lo anteriormente expuesto, y esta condición se cumple con frecuencia. Entonces, es suficiente variar las magnitudes de las frecuencias propias complejas, definiéndolas por medio de la fórmula (69.28).

6. Resonador rectangular. Basándonos en lo que ya conocemos sobre las oscilaciones libres de los resonadores (§ 70, puntos 1 y 2), es fácil confeccionar los correspondientes sistemas de funciones propias $\{\boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{E}_{n'}\}$ y $\{\boldsymbol{H}_n, \boldsymbol{H}_{n'}\}$ subordinadas a la correlación (71.8). En el caso de un resonador rectangular ya tenemos las funciones solenoidales en forma de las expresiones (70.1) y (70.2); sólo debemos normalizarlas. Las funciones potenciales se hallan complementariamente. En definitivo, se tiene:

las funciones eléctricas

$$\boldsymbol{E}_{i^{(\cdot)}} = \boldsymbol{x}_0 A_x \cos\chi_x x \operatorname{sen}\chi_y y \operatorname{sen}\chi_z z + \boldsymbol{y}_0 A_y \operatorname{sen}\chi_x x \cos\chi_y y \operatorname{sen}\chi_z z + \\ + \boldsymbol{z}_0 A_z \operatorname{sen}\chi_x x \operatorname{sen}\chi_y y \cos\chi_z z; \quad (71.16)$$

las funciones magnéticas

$$\boldsymbol{H}_{i^{(\cdot)}} = \boldsymbol{x}_0 B_x \operatorname{sen}\chi_x x \cos\chi_y y \cos\chi_z z + \boldsymbol{y}_0 B_y \cos\chi_x x \operatorname{sen}\chi_y y \cos\chi_z z + \\ + \boldsymbol{z}_0 B_z \cos\chi_x x \cos\chi_y y \operatorname{sen}\chi_z z. \quad (71.17)$$

Aquí y en adelante

$$\chi_x = \frac{m\pi}{a}, \quad \chi_y = \frac{n\pi}{b}, \quad \chi_z = \frac{p\pi}{L} \quad (m, n, p, = (0), 1, 2, \ldots),$$

$$\chi^2 = \chi^2_{mn} = \chi^2_x + \chi^2_y, \quad k^2 = k^2_{mnp} = \omega^2_{mnp}\varepsilon\mu = \chi^2 + \chi^2_z, \quad (71.18)$$

de modo que el índice $i^{(\cdot)}$ se comprende como el conjunto de tres números: $i^{(\cdot)} = (m, n, p)$.

Los *subsistemas solenoidales* ($\boldsymbol{E}_{i^{(\cdot)}} = \boldsymbol{E}_i$, $\boldsymbol{H}_{i^{(\cdot)}} = \boldsymbol{H}_i$) constan de las *funciones E y H*. Para las funciones E en las (71.16) y (71.17)

$$\left.\begin{aligned} A_x &= -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\varepsilon}|abL}}\frac{\chi_x\chi_z}{k\chi}, \quad A_y = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\varepsilon}|abL}}\frac{\chi_y\chi_z}{k\chi}, \\ A_z &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\varepsilon}|abL}}\frac{\chi}{k}, \\ B_x &= \frac{i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}|abL}}\frac{\chi_y}{\chi}, \quad B_y = -\frac{i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}|abL}}\frac{\chi_x}{\chi}, \quad B_z = 0, \end{aligned}\right\} \quad (71.19)$$

siendo $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$. El tercero de estos números puede ser nulo, pero entonces todos los citados coeficientes se multiplican, además, por $1/\sqrt{2}$, lo que nos dicta la correlación (71.8).

Escribamos expresiones análogas de los coeficientes en las (71.16) y (71.17) para las funciones H:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\varepsilon}|abL}}\frac{\chi_y}{\chi}, \quad A_y = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\varepsilon}|abL}}\frac{\chi_x}{\chi}, \quad A_z = 0, \\ B_x &= \frac{i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}|abL}}\frac{\chi_x\chi_z}{k\chi}, \quad B_y = \frac{i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}|abL}}\frac{\chi_y\chi_z}{k\chi}, \\ B_z &= \frac{-i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}|abL}}\frac{\chi}{k}, \end{aligned}\right\} \quad (71.20)$$

siendo $m \neq 0$, $n \neq 0$ y $p \neq 0$. Pueden ser nulos m o bien n; entonces los coeficientes se multiplican por $1/\sqrt{2}$.

Se recomienda que el lector compruebe que las fórmulas (71.16), (71.17) para los coeficientes (71.19), (71.20) coinciden con las expresiones de las amplitudes complejas que se obtienen de las (70.1), (70.2), eligiendo del modo necesario las constantes $\dot{E}_0$ y $\dot{H}_0$, así como cerciorarse de que se cumplen las correlaciones de la ortonormalización (71.8).

En *los subsistemas potenciales*

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{(\nu)} &= \boldsymbol{E}_{\nu} = A\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{sen}\,\chi_x x\,\mathrm{sen}\,\chi_y y\,\mathrm{sen}\,\chi_z z), \\ \boldsymbol{H}_{(\nu)} &= \boldsymbol{H}_{\nu} = iB\,\mathrm{grad}\,(\cos\chi_x x\cos\chi_y y\cos\chi_z z), \end{aligned}\right\} \quad (71.21)$$

y los coeficientes en las fórmulas (71.16) y (71.17) tienen el aspecto

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\varepsilon}|abL}}\frac{\chi_x}{k}, \quad A_y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\varepsilon}|abL}}\frac{\chi_y}{k}, \\ &\qquad A_z = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\varepsilon}|abL}}\frac{\chi_z}{k}, \\ B_x &= \frac{-i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}|abL}}\frac{\chi_x}{k}, \quad B_y = \frac{-i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}|abL}}\frac{\chi_y}{k}, \\ &\qquad B_z = \frac{-i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}|abL}}\frac{\chi_z}{k}. \end{aligned}\right\} \quad (71.22)$$

En las (71.22) se supone que $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$. Sin embargo, *uno o simultáneamente dos de estos números pueden ser nulos y*, entonces, los coeficientes se multiplican por $(1/\sqrt{2})^{\alpha}$, siendo α el número de ceros ($\alpha = 1, 2$).

Como ejemplo, consideremos un resonador rectangular excitado por un elemento rectilíneo de corriente (fig. 71.6), con todo

$$j_m^{ex} = y_0 I_m^{ex} \delta\left(z - \frac{L}{2}\right) \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad (0 < y < h) \qquad (71.23)$$

(sobre la función δ, véase el Suplemento 2). Como deseamos hallar una componente del campo de las oscilaciones forzadas que tenga la estructura H_{101}, sacamos de las (71.3) el respectivo miembro y escribimos que

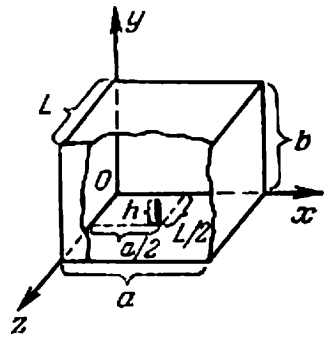


Fig. 71.6.

$$\dot{E}_m^{101} = a_{101} E_{101}, \qquad (71.24)$$

donde, en virtud de las (71.16) y (71.20),

$$E_{101} = y_0 \frac{-2}{\sqrt{\varepsilon_0 abL}} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \qquad (71.25)$$

(el medio interior es el vacío o el aire: $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0$, $\dot{\mu} = \mu_0$). De acuerdo con las (71.12)

$$a_{101} = \frac{i\omega}{\omega^2 - \dot{\omega}_{101}^2} \int_V j_m^{ex} E_{101}\, dv = i \frac{-2 I_m^{ex} h}{\sqrt{\varepsilon_0 abL}} \frac{\omega}{\omega^2 - \dot{\omega}_{101}^2}, \qquad (71.26)$$

donde, partiendo de las (69.28), (70.3) y (70.8)

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\omega}_{101} = \omega_{101}\left(1 + i\frac{1}{2Q_{101}}\right), \\ &\omega_{101} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{L^2}}, \quad Q_{101} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{abL\,(L^2 + a^2)}{aL\,(L^2 + a^2) + 2b\,(L^3 + a^3)}. \end{aligned}\right\} \qquad (71.27)$$

Habiendo resonancia ($\omega = \omega_{101}$), a base de las (71.3), (71.26)

$$\underline{E}_m \approx \dot{E}_m^{101} = a_{101}(\omega_{101})\, E_{101} = y_0 \frac{-4 I_m^{ex} h}{\varepsilon_0 abL} \frac{Q_{101}}{\omega_{101}} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}. \qquad (71.28)$$

§ 72. Ondas forzadas de una guía de ondas

1. Planteamiento del problema. Correlaciones iniciales. Para excitar ondas en sistemas de guiado se emplean procedimientos iguales a los examinados en el § 71, punto 1. Los elementos de acoplamiento, o sea, antenas elementales que, directa o indirectamente, unen el sistema de guiado con el generador (por ejemplo, mediante otro sistema de guiado), tienen la forma de varillas, cuadros (bucles), orificios (y entre ellos, las ranuras). Con ayuda de una varilla se excitan ondas con componente eléctrica paralela a ella, con un bucle, ondas con componente magnética dirigida por

la normal a su plano. Los orificios unen a regiones de los sistemas en las que sus campos deben tener estructuras parecidas. Por esta razón, por ejemplo, la onda fundamental H_{10} de una guía de ondas rectangular puede ser excitada por medio de un cable coaxial que en su extremo tenga una varilla o bucle, como se muestra en la fig. 72.1, *a*, *b* o bien por medio de otra guía de ondas rectangular

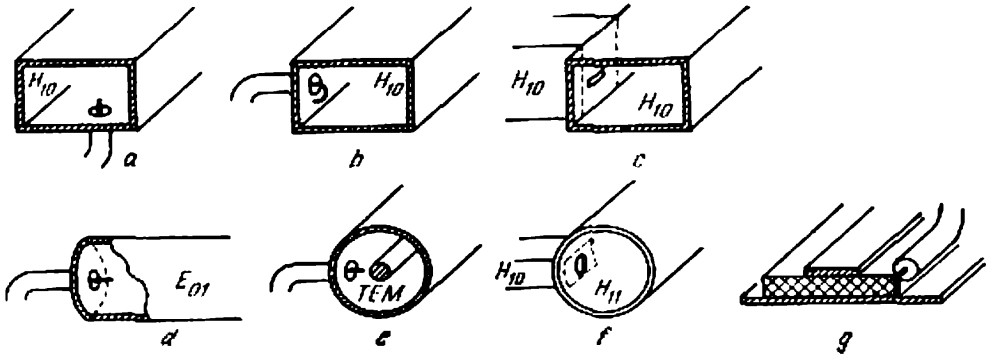


Fig. 72.1.

que porte la onda fundamental a través de una ranura (fig. 72.1, *c*). En la fig. 72.1 se muestran otros ejemplos de disposición de los elementos de acoplamiento en los sistemas direccionales de guiado.

En la fig. 72.2 se muestra esquemáticamente una guía de ondas infinita que en cierta región V limitada por las secciones transversales S_1 y S_2, contiene manantiales. Independientemente de cuál

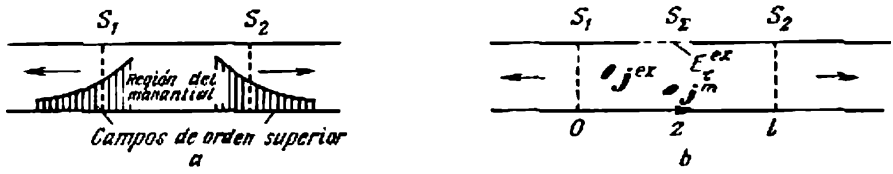


Fig. 72.2.

sea el campo en V, en los sectores semiinfinitos regulares de la guía de ondas tras las superficies de separación S_1 y S_2 el campo puede *ser representado en forma de la superposición de todos los posibles* campos libres. En este caso, sólo podemos hablar de las ondas que divergen del manantial o bien (cuando no se cumplen las condiciones de propagación) de los campos "transfrontera" que se amortiguan en las mismas direcciones. Esta exigencia es, propiamente, *la expresión de las condiciones de radiación de la guía de ondas* (Suplemento 5, punto 3). Si no habiendo absorción puede sólo propagarse la onda fundamental, en realidad solamente ella se conserva a distancias suficientemente grandes del manantial; los demás campos (de orden superior) se atenúan de modo exponencial (§ 62, punto 3, § 64, punto 3). *Esta condición se muestra en la fig. 72.2, a. En*

esencia, como en el espacio libre, el radiador en la guía de ondas (§§ 44, 45) tiene *zona cercana*.

Ya que más adelante vamos a confeccionar las superposiciones de los campos libres de la guía de ondas, introduzcamos los medios necesarios para la descripción.

Designemos las amplitudes complejas de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ de los campos libres que tienen el carácter de ondas que se propagan a lo largo del eje z por $\dot{\boldsymbol{E}}_m^{n+}$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m^{n+}$ y al cambiar de dirección, por $\dot{\boldsymbol{E}}_m^{n-}$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m^{n-}$; el índice n indica el tipo del campo. En virtud de las (61.1) y (61.2)

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^{n+} &= \mathcal{E}_n^{+} e^{-i\dot{\Gamma}_n z}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^{n+} &= \mathcal{H}_n^{+} e^{-i\dot{\Gamma}_n z}, \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^{n-} &= \mathcal{E}_n^{-} e^{+i\dot{\Gamma}_n z}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^{n-} &= \mathcal{H}_n^{-} e^{+i\dot{\Gamma}_n z}, \end{aligned}\right| \qquad (72.1)$$

$$\dot{\Gamma}_n = \Gamma_n' - i\Gamma_n'' \quad (\Gamma_n' \geqslant 0,\ \Gamma_n'' \geqslant 0)$$

(sin absorción o $\Gamma_n'' = 0$ ó $\Gamma_n' = 0$; en este último caso se tiene un campo transfrontero). Aquí es cómodo destacar las componentes transversales de los vectores $\mathcal{E}_n^{\pm}$ y $\mathcal{H}_n^{\pm}$; estableciendo su designación, en virtud de las fórmulas (61.8), (61.10) y (61.11), se escribe:

$$\mathcal{E}_{nt}^{\pm} = \boldsymbol{e}_n, \quad \mathcal{H}_{nt}^{\pm} = \pm \boldsymbol{h}_n; \quad \boldsymbol{h}_n = \dot{W}_n^{-1} [\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{e}_n]. \qquad (72.2)$$

Las funciones vectoriales $\boldsymbol{e}_n$ y $\boldsymbol{h}_n$ están subordinadas a las ecuaciones de Helmholtz (obtenidas proyectando las ecuaciones (61.4) y (61.5) en la sección transversal de la guía de ondas). Con mayor exactitud digamos que son las funciones propias de los problemas

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\perp^2 \boldsymbol{e}_n + \chi_n^2 \boldsymbol{e}_n &= 0 \text{ en } S_\perp, \\ \boldsymbol{e}_{n\tau} &= 0, \\ \operatorname{div}_\perp \boldsymbol{e}_n &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ para } L_\perp, \quad \left.\begin{aligned} \nabla_\perp^2 \boldsymbol{h}_n + \chi_n^2 \boldsymbol{h}_n &= 0 \text{ en } S_\perp, \\ \boldsymbol{h}_{n\nu} &= 0, \\ (\operatorname{rot}_\perp \boldsymbol{h}_n)_\tau &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ para } L_\perp, \qquad (72.3)$$

que, a su vez, son los análogos bidimensionales de los problemas de contorno (S5.29) y (S5.30). En nuestro caso, $S_\perp$ es la sección transversal de la guía de ondas, mientras que $L_\perp$, su contorno. Por esta causa, los sistemas $\{\boldsymbol{e}_n\}$ y $\{\boldsymbol{h}_n\}$ son absolutamente análogos [1]) a los considerados en el § 71, punto 2. Teniendo en cuenta las ligazones (72.2), los ortonormalizamos del modo siguiente:

$$\int_S \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_n^* \, ds = \delta_{kn} |\dot{W}_n| = |\dot{W}_n|^2 \int_S \boldsymbol{h}_k \boldsymbol{h}_n^* \, ds;$$

$$\int_S [\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{h}_n^*]_z \, ds = \delta_{kn} \frac{\dot{W}_n}{|\dot{W}_n|}. \qquad (72.4)$$

[1]) En los sistemas $(\boldsymbol{e}_n)$ y $(\boldsymbol{h}_n)$ podrían destacarse los subsistemas solenoidal y potencial. Como se desprende de las (61.10) y (61.11), las componentes magnéticas de los campos E ($\operatorname{div}_\perp \boldsymbol{h}_n = 0$) y las componentes eléctricas de los campos H ($\operatorname{div}_\perp \boldsymbol{e}_n = 0$) son solenoidales, mientras que las componentes eléctricas de los campos E ($\operatorname{rot}_\perp \boldsymbol{e}_n = 0$) y las componentes magnéticas de los campos H ($\operatorname{rot}_\perp \boldsymbol{h}_n = 0$) son potenciales.

Ahora, ya podemos pasar a formular las condiciones del problema sobre la excitación del campo en la guía de ondas. Esta última es infinita y todos los manantiales están ubicados en una región acotada V y, precisamente, en su segmento $0 < z < l$ (fig. 72,2, *b*). Los manantiales se prefijan por medio de las funciones j^{ex} y j^{m} en V y E_{τ}^{ex} en el orificio de la cubierta de la guía de ondas que consideramos conductor ideal (compárese con el § 71, punto 1).

Fuera de V, el campo se representa en forma de las series

$$\dot{E}_m = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \dot{E}_m^{n-}, & z \leqslant 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \dot{E}_m^{n+}, & z \geqslant l, \end{cases} \qquad \dot{H}_m = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \dot{H}_m^{n-}, & z \leqslant 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \dot{H}_m^{n+}, & z \geqslant l. \end{cases} \tag{72.5}$$

Es necesario determinar los coeficientes de estas series.

2. Solución del problema. El campo forzado que investigamos está subordinado a las ecuaciones no homogéneas de Maxwell

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{E}_m &= -i\omega\mu \dot{H}_m - \dot{j}_m^{m}, \\ \operatorname{rot} \dot{H}_m &= i\omega\varepsilon \dot{E}_m + \dot{j}_m^{ex}, \end{aligned}\right\} \tag{72.6}$$

y los campos libres de la guía de ondas, a las soluciones de las ecuaciones homogéneas que, seguidamente, se escriben en la forma complejamente conjugada:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} (\dot{E}_m^{k\pm})^* &= i\omega\mu\, (\dot{H}_m^{k\pm})^*, \\ \operatorname{rot} (\dot{H}_m^{k\pm})^* &= -i\omega\varepsilon\, (\dot{E}_m^{k\pm})^* \end{aligned}\right\} \tag{72.7}$$

como, en virtud de la condición establecida, no hay absorción ($\dot{\varepsilon} = \varepsilon$, $\dot{\mu} = \mu$).

Consideremos conjuntamente el primer renglón del (72.6) y el segundo renglón del (72.7), multiplicándolos respectivamente por $(\dot{H}_m^{k\pm})^*$ y $\dot{E}_m$ y, a continuación, las restantes ecuaciones por $(\dot{E}_m^{k\pm})^*$ y $\dot{H}_m$. Tomando como región de integración el volumen V (fig. 72.2, *b*), realizamos operaciones del mismo índole que en el § 48, *punto 1* (*véase también el § 71, punto 3*). *Esto nos da que*

$$\oint_S \left\{ \left| \dot{E}_m,\ (\dot{H}_m^{k\pm})^* \right| + \left| (\dot{E}_m^{k\pm})^*,\ \dot{H}_m \right| \right\} ds = \\ = -\int_V \left(\dot{j}_m^{m} (\dot{H}_m^{k\pm})^* + \dot{j}_m^{ex} (\dot{E}_m^{k\pm})^* \right) dv,$$

siendo S la frontera del volumen V, o bien

$$\int_{S_1 + S_2} \left\{ \left| \dot{E}_m,\ (\dot{H}_m^{k\pm})^* \right| + \left| (\dot{E}_m^{k\pm})^*,\ \dot{H}_m \right| \right\} ds = \\ = -\int_{S_\Sigma} \left[\dot{E}_m^{ex},\ (\dot{H}_m^{k\pm})^* \right] ds - \int_V \left(\dot{j}_m^{m} (\dot{H}_m^{k\pm})^* + \dot{j}_m^{ex} (\dot{E}_m^{k\pm})^* \right) dv, \tag{72.8}$$

ya que en la superficie lateral de la guía de ondas las componentes tangenciales de los vectores $\dot{E}_m$ y $\dot{E}_m^{k\pm}$ son nulas, salvo en el orificio en el que $\dot{E}_{m\tau} = \dot{E}_{m\tau}^{ex}$.

Designemos el primer miembro de la igualdad (72.8) por $I_k^{\pm}$; introduciendo en él la representación (72.5), se tiene

$$I_k^{\pm} = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \int_{S_1} \left\{ \left| \dot{E}_m^{n-}, \ (\dot{H}_m^{k\pm})^* \right| + \left| (\dot{E}_m^{k\pm})^*, \ \dot{H}_m^{n-} \right| \right\} z_0 \, ds + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \int_{S_2} \left\{ \left| \dot{E}_m^{n+}, \ (\dot{H}_m^{k\pm})^* \right| + \left| (\dot{E}_m^{k\pm})^*, \ \dot{H}_m^{n+} \right| \right\} z_0 \, ds \qquad (72.9)$$

(la normal exterior está dirigida por z en S_2 y en sentido contrario a z en S_1). Introduciendo en la (72.9) las expresiones (72.1), y teniendo en cuenta las correlaciones (72.2), (72.4), nos convencemos de que en cada una de las sumas no es igual a cero sólo un término y, así, hallamos

$$I_k^{\pm} = c_k^- \left(\mp \frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k^*} + \frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k} \right) + c_k^+ \left(\pm \frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k^*} + \frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k^*} \right) e^{-i(\dot{\Gamma}_k \mp \dot{\Gamma}_k^*)z}.$$

Para las ondas que se propagan ($\omega > \omega_{crit}$ para k dado), $\dot{\Gamma}_k$ y $\dot{W}_k$ son reales y positivas, mientras que para los campos transfrontera ($\omega < \omega_{crit}$) $\dot{\Gamma}_k = -i|\dot{\Gamma}_k|$ y $\dot{W}_k = \mp i|\dot{W}_k|$ (los signos superior e inferior respectivamente para los campos del tipo E y H). Por este motivo

$$\left. \begin{aligned} I_k^{\pm} &= 2\frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k} c_k^{\pm} = 2c_k^{\pm} \ \text{para} \ \omega > \omega_{crit}, \\ I_k^{\pm} &= 2\frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k} c_k^{\mp} = \begin{cases} +i2c_k^{\pm}, & \text{tipo } E \\ -i2c_k^{\pm}, & \text{tipo } H \end{cases} \text{para} \ \omega < \omega_{crit} \end{aligned} \right\} \qquad (72.10)$$

y de la (72.8) obtenemos las siguientes fórmulas para los coeficientes de las series (72.5):

$$c_k^{\pm} = -\frac{\dot{W}_k}{2|\dot{W}_k|} \left\{ \int_{S_\Sigma} \left| \dot{E}_m^{ex}, \ (\dot{H}_m^{k\pm})^* \right| ds + \right. \\ \left. + \int_V \left| j_m^m (\dot{H}_m^{k\pm})^* + j_m^{ex} (\dot{E}_m^{k\pm})^* \right| dv \right\} \quad (\omega > \omega_{crit}) \qquad (72.11a)$$

y

$$c_k^{\pm} = -\frac{\dot{W}_k}{2|\dot{W}_k|} \left\{ \int_{S_\Sigma} \left| \dot{E}_m^{ex}, \ (\dot{H}_m^{k\mp})^* \right| ds + \right. \\ \left. + \int_V \left| j_m^m (\dot{H}_m^{k\mp})^* + j_m^{ex} (\dot{E}_m^{k\mp})^* \right| dv \right\} \quad (\omega < \omega_{crit}). \qquad (72.11b)$$

Así hemos resuelto el problema planteado.

Al ser e_k y h_k reales (en la sección transversal de la guía de ondas la onda es estacionaria: no hay flujo cíclico de energía), el resultado obtenido puede ser representado de forma más breve:

$$c_k^{\pm} = \frac{\dot{W}_k}{2|\dot{W}_k|}\left\{\pm\int_{S_\Sigma}|\dot{\boldsymbol{E}}_m^{ex},\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^{k\mp}|\,d\boldsymbol{s} + \int_V |\pm j_m^m \dot{H}_m^{\mp} - j_m^{ex}\dot{E}_m^{k\mp}|\,dv\right\}. \tag{72.11c}$$

Aquí, el signo ante los sumandos no se escoge en correspondencia con el índice superior, sino de acuerdo con la regla: el signo superior para $\omega \geqslant \omega_{crit}$ y el inferior, para $\omega < \omega_{crit}$.

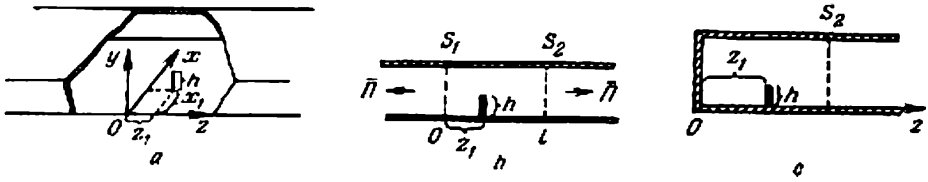


Fig. 72.3.

3. Ejemplo de excitación de una guía de ondas. Conclusión. Sea que una guía de ondas rectangular se excita mediante un elemento de corriente (fig. 72.3, *a*) de forma que

$$j_m^{ex} = \boldsymbol{y}_0\, I_m^{ex}\,\delta(z-z_1)\,\delta(x-x_1) \quad (0<y<h). \tag{72.12}$$

Determinemos los coeficientes $c_k^{\pm} = c_{10}^{\pm}$ para la onda fundamental H_{10}. Según las fórmulas (72.11a, b) o bien (72.11c)

$$c_{10}^{\pm} = -\frac{\dot{W}_{10}}{2|\dot{W}_{10}|}\int_V j_m^{ex}\dot{E}_m^{10\mp}\,dv, \tag{72.13}$$

siendo

$$\dot{E}_m^{10\mp} = \boldsymbol{e}_{10}e^{\pm i\dot{\Gamma}_{10}z} = \boldsymbol{y}_0\sqrt{\frac{2|\dot{W}_{10}|}{ab}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}e^{\pm i\dot{\Gamma}_{10}z} \tag{72.14}$$

(véase las (64.15) y (72.4). Introduciendo las (72.12) y (72.14) en la (72.13), se halla

$$c_{10}^{\pm} = -\frac{\dot{W}_{10}}{\sqrt{2|\dot{W}_{10}|ab}}\,I_m^{ex}h\operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{a}\,e^{\mp i\dot{\Gamma}_{10}z_1}. \tag{72.15}$$

Para hallar la amplitud compleja del vector $\boldsymbol{E}$ de la onda H_{10} que se propaga desde el elemento de corriente por la dirección del eje z y de la onda E_{10} de sentido contrario ($\omega \geqslant \omega_{crit}$), así como también los respectivos campos transfrontera ($\omega < \omega_{crit}$), es preciso tomar un término de la serie (72.5). Así obtenemos

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = c_{10}^{\pm}\dot{\boldsymbol{E}}_m^{10\pm} = -\boldsymbol{y}_0\frac{\dot{W}_{10}I_m^{ex}h}{ab}\operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}e^{\mp i\dot{\Gamma}_{10}(z-z_1)} \quad (z>z_1,\ z<z_1), \tag{72.16}$$

donde

$$\dot{\Gamma}_{10}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}\quad\text{y}\quad\dot{W}_{10}=\frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}.$$

Como vemos, la amplitud de la onda que se excita es proporcional a la magnitud $p_m=y_0 I_m^{ex}h/\omega$ que es la amplitud del dipolo de Herzt equivalente al manantial que actúa (§ 44, punto 1). En dependencia del desplazamiento horizontal de x_1 la amplitud E_m varía de modo senoidal (la excitación máxima se producirá para $x_1=a/2$), mientras que la dependencia de la frecuencia tiene carácter de resonancia: $E_m\longrightarrow\infty$ cuando $\lambda\longrightarrow 2a$; señalemos que no se ha tomado en cuenta la absorción.

Calculemos el flujo de energía que parte de la región V (fig. 72.3, *b*), con la condición de que sólo el campo del tipo H_{10} tiene el carácter de la onda que se propaga. En virtud de (63.2) y (72.16), a través de la sección transversal S_2 pasa, en término medio, un flujo de energía igual a

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{1}{\dot{W}_{10}^{*}}\int_{S_2}E_m^2\,ds=\operatorname{Re}\frac{1}{\dot{W}_{10}^{*}}\frac{|\dot{W}_{10}|^2 I_m^{ex2}h^2}{4ab}\operatorname{sen}^2\frac{\pi x_1}{a},$$

pero como la radiación es igual en las dos direcciones, esto quiere decir que el flujo total de energía desde V es dos veces mayor; es igual a la potencia media de radiación del elemento de corriente ubicado en la guía de ondas que designaremos por $\overline{P}^{\Sigma}$. De este modo,

$$\overline{P}^{\Sigma}=\operatorname{Re}\frac{1}{\dot{W}_{10}^{*}}\frac{|\dot{W}_{10}|^2 I_m^{ex2}h^2}{2ab}\operatorname{sen}^2\frac{\pi x_1}{a}. \qquad (72.17)$$

Para $\lambda\longrightarrow 2a$ la impedancia de onda $\dot{W}_{10}$ resulta ser puramente imaginaria; en tal caso, como se desprende de la (72.17), en la guía de ondas no hay transmisión de energía: $\overline{P}^{\Sigma}=0$.

Como en el caso de un radiador eléctrico elemental en el espacio libre (§ 44), en el caso que tratamos también se puede introducir el concepto de resistencia de radiación $\mathcal{R}^{\Sigma}=2\overline{P}_{\Sigma}/I_m^{ex2}$. Se recomienda que el lector realice las correspondientes comparaciones con las fórmulas (44.18).

En conclusión, hagamos ciertas observaciones.

A costa de complicaciones, se podría difundir la teoría de excitación de los campos a las guías de ondas con absorción (compárese con el § 71). Sin embargo, no hay gran necesidad de hacer tal cosa, ya que a las frecuencias que divergen considerablemente de las críticas, los resultados obtenidos son suficientemente fidedignos (tales casos son, precisamente, los que tienen interés práctico).

En los dispositivos técnicos los elementos excitantes, por lo general, se disponen en las guías de ondas en las proximidades de los tabiques metálicos extremos que "ponen en cortocircuito las

paredes" y que, a veces, se construyen en forma de "émbolos" desplazables. En tales casos el empleo de las fórmulas (72.11) sólo exige sencillos razonamientos complementarios. Así, si en la guía de ondas rectangular que anteriormente consideramos se introduce un tabique metálico (prácticamente conductor ideal) (fig. 72.3, *c*) a una distancia z_1 del elemento de corriente, entonces, la onda de tipo principal que se propaga en su dirección, se reflejará variando la fase a 180° (compárese con el § 33, punto 4) y se superpondrá sobre la onda directa recorriendo en comparación con ella un camino complementario igual a $2z_1$. De esta manera, a la amplitud compleja calculada por la fórmula (72.16), deberemos añadir una magnitud que se diferencia por el multiplicador $-e^{-i2\Gamma_{10}z_1} = -e^{-i\frac{4\pi}{\Lambda_{10}}z_1}$. Como resultado, obtenemos

$$\dot{E}_m = -y_0 \frac{W_{10} I_m^{ex} h}{ab} \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{a} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} (1 - e^{-i2\Gamma_{10}z_1}) e^{-i\Gamma_{10}(z-z_1)} =$$

$$= -y_0 \frac{i2\dot{W}_{10} I_m^{ex} h}{ab} \operatorname{sen}\frac{2\pi z_1}{\Lambda_{10}} \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{a} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} e^{-i\Gamma_{10}z} \quad (\lambda < 2a), \ (z > z_1). \tag{72.18}$$

La potencia de radiación $\overline{P}_\Sigma$ será igual a

$$\overline{P}_\Sigma = \frac{W_{10} I_m^{ex^2} h^2}{ab} \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi z_1}{\Lambda_{10}} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x_1}{a} \quad (\lambda < 2a) \tag{72.19}$$

(compárese con la (72.17)).

§ 73. Sistemas de guías de ondas

1. Observaciones previas. En la radiotécnica de frecuencias ultraelevadas se emplean dispositivos compuestos por segmentos de sistemas de guiado (en particular, guías de ondas huecas), resonadores de cavidad, así como por otros múltiples elementos en los *que tambien se pueden incluir los elementos de acoplamiento* (§ 71, punto 1, § 72, punto 1); vamos a llamarlos brevemente *sistemas de guías de ondas*. Basándonos en el material expuesto en los §§ 61—72, ya podemos decir mucho sobre los procesos electromagnéticos en sistemas reales de guías de ondas, pero es necesaria una serie adicional de razonamientos.

Comencemos por las siguientes observaciones.

Al describir en el § 55, punto 2 los radiadores de ranura fue remarcado que si en una chapa idealmente conductora se corta una ranura estrecha que no cruce la corriente conductiva, entonces, podemos decir que no habrá radiación. Es natural, que lo mismo podemos afirmar con respecto a las ranuras en las cubiertas de los sistemas de guías de ondas y este hecho siempre se tiene en cuenta al proyectarlos. Por ejemplo, una guía de ondas circular por la que se propaga una onda H_{0m}, puede ser "sin consecuencias" cortada

transversalmente (fig. 73.1, *a*) ya que la corriente en la cubierta es azimutal; cuando se trata de cierta onda del tipo E, es tolerable un corte longitudinal (fig. 73.1, *b*). En una guia de ondas rectangular, por la que se propaga la onda fundamental H_{10}, pueden ser efectuadas las ranuras que no radian mostradas en la fig. 73.1, *c* (en una serie de casos, la ranura longitudinal se emplea para la introducción del elemento de sondeo). Un resonador cilíndrico para

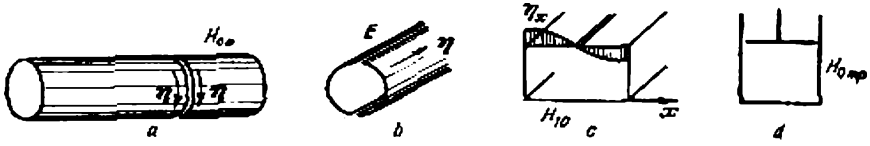


Fig. 73.1.

oscilaciones H_{0mp} puede ser reglado en la banda de frecuencias por medio de la variación de su volumen con un "émbolo" desplazable (fondo), sin tener una disminución considerable de su factor de calidad a causa de la radiación a través de la ranura circular (fig. 73.1, *d*). El número de tales ejemplos puede ser aumentado con facilidad.

La segunda observación se refiere a la descripción de los elementos metálicos de los sistemas de guías de ondas, es decir, en primer plano, de las cubiertas metálicas de las guías de ondas y resonadores huecos. En muchos de los casos, podemos considerar que el metal es un conductor ideal. La atenuación de las ondas que pasan por los cortos sectores de los sistemas de guiado, es prácticamente imperceptible. En las líneas de comunicación de gran longitud éste es el parámetro técnico de mayor importancia. Es preciso tener en cuenta que las superficies metálicas tienen, en mayor o menor grado, rugosidades que dependen del carácter de su maquinado, mientras que las expresiones de Γ_m (63.21), de Q_m (69.30) y otras análogas, fueron obtenidas suponiendo que la superficie de separación de los medios es idealmente lisa. Por esta causa, los valores de Γ_m y Q_m calculados, por lo general, divergen un poco de los que se observan de manera experimental; a veces, se introduce la representación de la conductibilidad específica equivalente $\tilde{\sigma}$ de una superficie rugosa que debe ser introducida en las (63.21) o bien (69.30) en lugar de σ, con objeto de obtener resultado correcto. Los valores de $\tilde{\sigma}$ para diferentes casos, pueden ser hallados en los manuales, por ejemplo, en [K.3].

2. **Conducto guía de ondas.** Entendemos por *conducto guía de ondas* o bien línea de transmisión, un sector del sistema de guiado que une el generador con cualquier dispositivo que convencionalmente llamaremos "carga útil". En el conducto guía de ondas pueden introducirse elementos de diferente aplicación (de medida, regulación, etc.), dicho conducto puede estar ramificado y, por fin, la función que él cumple puede ser más complicada que la simple

unión del generador con su carga. Pero para mayor certidumbre, al principio, consideraremos el ejemplo más sencillo de conducto guía de ondas.

Sea que el conducto guía de ondas es el segmento de una guía de ondas hueca longitudinalmente regular (con sección transversal invariable). En uno de sus extremos se excita por un generador, por ejemplo, a klistrón, cuya energía se introduce por medio de un elemento de acoplamiento de varilla; además (fig. 73.2,*a*), tenemos

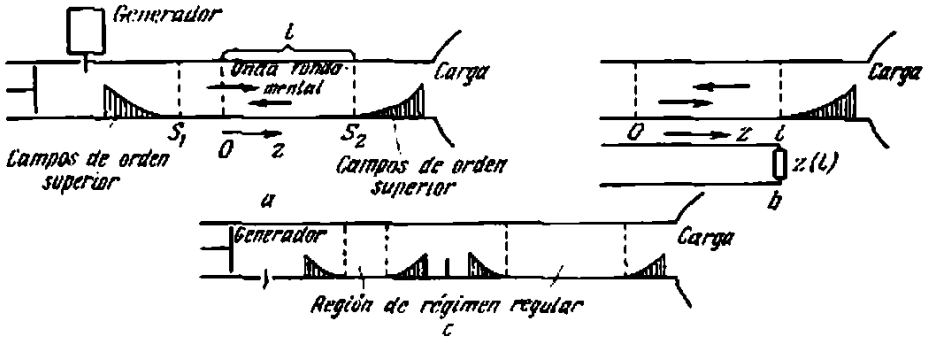


Fig. 73.2.

un "émbolo de reajuste" desplazable (compárese con el § 72, punto 3) que sirve para regular la excitación. Independientemente del tipo de campo en el conducto guía de ondas, en el segmento regular de la guía de ondas puede ser representado como la superposición de todas las clases de campos libres (compárese con el § 72, punto 1). Generalmente, las dimensiones de la guía de ondas son tales que sólo el campo del tipo fundamental tiene el carácter de la onda que se propaga; precisamente esta onda transmite la energía a la carga. En el entorno del elemento de acoplamiento el campo, siendo por lo general bastante complicado, contiene componentes en forma de los campos de orden superior de la guía de ondas, pero, sin embargo, éstos se atenúan de modo exponencial en dirección a la carga y, desde cierta sección transversal S_1, resultan ser despreciablemente pequeños. En dependencia de las propiedades de la carga, cuya clase aquí no precisamos (puede ser, por ejemplo, una antena), en el conducto también existe una onda inversa, de mayor o menor intensidad, del tipo fundamental que llamamos *reflejada* (de eco). Cerca de la carga el campo contiene componentes en forma de los campos de orden superior de la guía de ondas que hacia el generador se atenúan y que a partir de cierta superficie de separación S_2 son despreciablemente pequeños.

De este modo, en la región del conducto entre las secciones S_1 y S_2 sólo existen las ondas directa e inversa del tipo fundamental; la llamaremos *región del régimen regular*. Haciendo uso de las designaciones (72.1), representemos las amplitudes complejas del

campo en la región del régimen regular en la forma

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_m &= c_1^+ \dot{E}_m^{1+} + c_1^- \dot{E}_m^{1-} = c_1^+ \mathcal{E}_1^+ e^{-i\dot{\Gamma}_1 z} + c_1^- \mathcal{E}_1^- e^{i\dot{\Gamma}_1 z},\\ \dot{H}_m &= c_1^- \dot{H}_m^{1+} + c_1^- \dot{H}_m^{1-} = c_1^+ \mathcal{H}_1^+ e^{-i\dot{\Gamma}_1 z} + c_1^- \mathcal{H}_1^- e^{i\dot{\Gamma}_1 z}\end{aligned}\right\} \qquad (73.1)$$

($n = 1$), siendo c_1^+ y c_1^- los coeficientes de amplitud de la misma clase que los de las series (72.5). Con ayuda de las correlaciones (72.2), se escriben las partes transversales de los vectores $\dot{E}_m$ y $\dot{H}_m$:

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_{mt} &= c_1^+ e_1 e^{-i\dot{\Gamma}_1 z}(1 + \dot{\rho}_0 e^{i2\dot{\Gamma}_1 z}),\\ \dot{H}_{mt} &= c_1^+ h_1 e^{-i\dot{\Gamma}_1 z}(1 - \dot{\rho}_0 e^{i2\dot{\Gamma}_1 z}),\end{aligned}\right\} \qquad (73.2)$$

donde ha sido introducida la designación

$$\dot{\rho}_0 = \frac{c_1^-}{c_1^+} = \frac{\dot{E}_{mt}^-}{\dot{E}_{mt}^+}\bigg|_{z=0} = -\frac{\dot{H}_{mt}^-}{\dot{H}_{mt}^+}\bigg|_{z=0}. \qquad (73.3)$$

La magnitud $\dot{\rho}_0$ se denomina *coeficiente de reflexión* referido a la sección $z = 0$. En lo que se refiere a las (73.2), éstas repiten, por su forma, las expresiones (36.13), obtenidas al analizar la incidencia normal de una onda plana homogénea sobre la superficie de separación de los medios. La diferencia consiste en que en el caso que consideramos, puede no haber una frontera reflectora localizada en el espacio. Puede ser una incógnita cómo se forma la onda reflejada en cierta parte de la región de la carga; sólo podemos hablar de su existencia en el sector regular de la guía de ondas (dentro del cual se halla la región del régimen regular). Por esto, con frecuencia, se determina el coeficiente (factor) de reflexión en una sección arbitraria z de dicho sector, como la función

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}(z) = \frac{\dot{E}_{mt}^-}{\dot{E}_{mt}^+} = -\frac{\dot{H}_{mt}^-}{\dot{H}_{mt}^+}. \qquad (73.4)$$

Claro está que

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 e^{+i2\dot{\Gamma}_1 z}, \quad \dot{\rho}_0 = \dot{\rho}(0). \qquad (73.5)$$

Recordemos que las fórmulas (36.13) permitieron confeccionar los diagramas (figs. 36.3 y 36.4) que esclarecían la estructura del campo que es la superposición de las ondas directa e inversa. Las expresiones (73.2) nos llevan a una interpretación análoga de la estructura del campo en la región del régimen regular (fig. 73.3, *a*, *b*); todas las consideraciones necesarias serán halladas por el lector en el § 36, punto 3.

A continuación, confeccionemos la correlación

$$\dot{Z} = \dot{Z}(z) = \dot{E}_{mt}/\dot{H}_{mt}. \qquad (73.6)$$

La función $\dot{Z}(z)$ determinada en el sector regular de la guía de ondas se denomina *resistencia* en la sección z para la onda del tipo fundamental. En virtud de las (73.2), teniendo en cuenta las

(73.5) y (72.2), se desprende que

$$\dot{Z} = \dot{W}_1 \frac{1+\dot{\rho}}{1-\dot{\rho}}, \tag{73.7}$$

y cuando no hay onda reflejada, $\dot{Z} = \dot{W}_1$.

¿Por qué se denomina "resistencia" la relación de las magnitudes $\dot{E}_{mt}$ y $\dot{H}_{mt}$? Si el sistema de guiado es biconexo, entonces, al considerar su onda fundamental del tipo TEM podemos operar no sólo

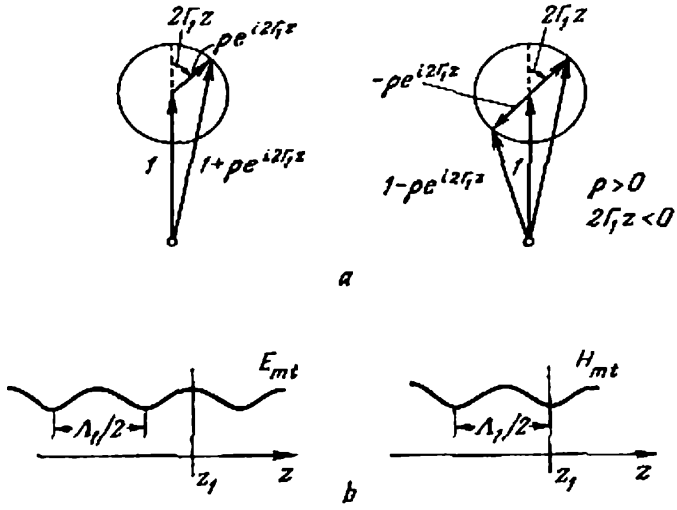


Fig. 73.3.

utilizando las intensidades de los campos, sino que también, con las tensiones y corrientes. Sea, en particular, que se trata de una línea bifilar por la que se propagan ondas del tipo TEM. En este caso, la tensión y la corriente en cierta sección tendrán la forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_m^+ e^{-ikz} + \dot{U}_m^- e^{ikz}, \\ \dot{I}_m &= \dot{I}_m^+ e^{-ikz} + \dot{I}_m^- e^{ikz}. \end{aligned}\right\} \tag{73.8}$$

Designando

$$\frac{\dot{U}_m^-}{\dot{U}_m^+} = -\frac{\dot{I}_m^-}{\dot{I}_m^+} = \dot{\rho}_0 \quad \text{y} \quad \frac{\dot{U}_m^\pm}{\dot{I}_m^\pm} = \pm W_t \tag{73.9}$$

(véase también el § 66, punto 2), confeccionemos la relación entre las magnitudes $\dot{U}_m$ y $\dot{I}_m$ que, precisamente, resulta ser la resistencia de la línea en la sección dada z; ella es igual a

$$\dot{Z}_t = W_t \frac{1+\dot{\rho}}{1-\dot{\rho}}, \tag{73.10}$$

siendo $\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 e^{i2kz}$.

Por su forma, las expresiones (73.7) y (73.10) coinciden. Esto significa que la magnitud $\dot{Z}(z)$ es semejante a la resistencia $\dot{Z}_l(z)$ y es posible construir el sector de una línea bifilar convencional de los parámetros $W_l = \dot{W}$, y $k = \dot{\Gamma}_1$, que "similará" una región de régimen regular del canal de guía de ondas. Tal sector (fig. 73.2, *b*) debe estar cargado de una resistencia $\dot{Z}_c = \dot{Z}(l)$.

Si además del generador y la carga, la regularidad de la guía de ondas se perturba por los elementos acoplados a él, entonces, en las cercanías de cada uno de ellos el campo del canal contendrá componentes en forma de los campos de orden superior de la guía de ondas que se atenúan de modo exponencial en dependencia de la distancia. En la fig. 73.2, *c* está representado un canal de guía de ondas, al que se ha acoplado un elemento (varilla pasiva) dispuesto a distancias relativamente grandes del generador y de la carga; en este caso, en el conducto hay dos regiones de régimen regular.

Cuando el conducto guía de ondas es un segmento de un sistema de guiado abierto (línea bifilar, guía de ondas dieléctrica, etc.), los elementos que perturban la regularidad del sistema provocan la radiación al espacio circundante. Aquí, también pueden ser destacadas regiones de régimen regular en las que el campo del conducto está compuesto por la superposición de las ondas del tipo fundamental directa e inversa.

En la fig. 73.4, *a*, *b* se muestran dos ejemplos de conductos abiertos. El extremo abierto de una línea bifilar (fig. 73.4, *a*) es

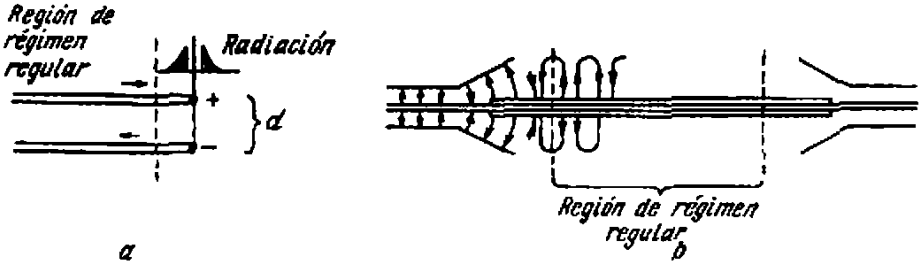


Fig. 73.4.

semejante a un radiador eléctrico elemental (§ 44). La región del régimen regular empieza allí donde el campo de radiación, decreciente al alejarse del extremo, puede ser despreciado. Ya que la potencia de radiación es proporcional a $(d/\lambda)^2$ (compárese con el § 44, punto 4), al ser la distancia entre los conductores suficientemente pequeña, la influencia de la irregularidad extrema prácticamente no se advierte. Es preciso remarcar que cualquier irregularidad de un conducto bifilar se manifiesta de modo semejante a un extremo abierto. Como otro ejemplo nos sirve un segmento de la línea de Goubau (§ 67, punto 3) que, al conectarlo a un generador y una carga se convierte en línea coaxial; los elementos

de acoplamiento tienen la forma de bocinas (fig. 73.4, *b*). Se exige que se produzca la transformación de la onda *TEM* de la línea coaxial en la onda E_{11} de la línea de Goubau en el extremo transmisor y la transformación inversa, en el receptor. Una onda E_{00} "pura" se forma a cierta distancia de la bocina, es decir, donde comienza la región del régimen regular; los elementos de acoplamiento se construyen de tal forma que la radiación al espacio circundante se reduzca a la mínima.

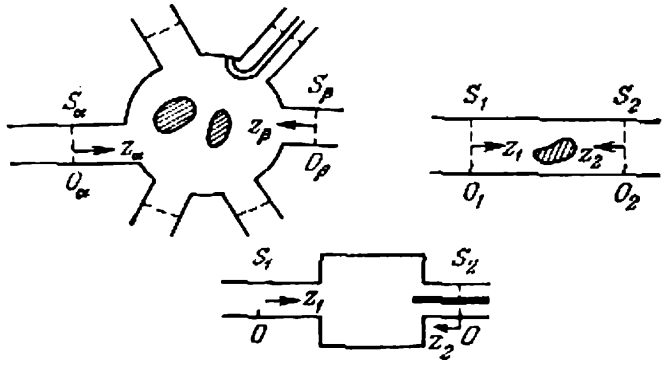


Fig. 73.5.

3. Descripción general de los sistemas de guía de ondas. En la fig. 73.5 se muestran diferentes variaciones de un sistema hueco, al que están acopladas guías de ondas regulares; estas últimas pueden ser tanto simple como múltiplemente conexas, pero obligatoriamente apantalladas. De antemano no se toma una estructura interior determinada del sistema hueco o de la forma de su cubierta. Tal *transformador de guía de ondas* puede contener en su interior diversos elementos conductores y dieléctricos, isótropos o bien anisótropos. La cuestión consiste en establecer medios para la descripción de la forma general de los transformadores de guía de ondas.

En cada una de las guías de ondas acopladas, destaquemos una sección transversal determinada que vamos a llamar *sección de entrada*. Tomando cualquiera de las secciones de entrada S_α, confeccionemos para ella un sistema de funciones $\{\boldsymbol{e}_{n(\alpha)}\}$ y $\{\boldsymbol{h}_{n(\alpha)}\}$ (§ 72, punto 1) que están subordinadas a las condiciones de ortonormalización de la forma (72.4)

$$\int\limits_{S_\alpha} \boldsymbol{e}_{k(\alpha)}\,\boldsymbol{e}^*_{n(\alpha)}\,ds = \delta_{kn}\,|\dot{W}_{n(\alpha)}| = |\dot{W}_{n(\alpha)}|^2 \int\limits_{S_\alpha} \boldsymbol{h}_{k(\alpha)}\,\boldsymbol{h}^*_{n(\alpha)}\,ds;$$

$$\int\limits_{S_\alpha} [\boldsymbol{e}_{k(\alpha)},\ \boldsymbol{h}^*_{n(\alpha)}]_z\,ds = \delta_{kn}\,\frac{\dot{W}_{n(\alpha)}}{|\dot{W}_{n(\alpha)}|}. \qquad (73.11)$$

Cualquier campo transversal S_α se descompone según estos sistemas en las series ortogonales:

$$\dot{E}_{m\,(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n\,(\alpha)} e_{n\,(\alpha)}, \quad \dot{H}_{m\,(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n\,(\alpha)} h_{n\,(\alpha)}. \tag{73.12}$$

Sea que tal desarrollo ha sido efectuado en todas las secciones de entrada de transformador de guía de ondas ($\alpha = 1, 2, \ldots, P$), es decir, que podemos referirnos a los coeficientes de Fourier $a_{n\,(\alpha)}$ y $b_{n\,(\alpha)}$. Reuniendo todos estos coeficientes, compongamos los vectores (véase el Suplemento 9, punto 1) $a = (a_{1\,(1)}, a_{2\,(1)}, \ldots, a_{1\,(2)}, a_{2\,(2)}, \ldots)$ y $b = (b_{1\,(1)}, b_{2\,(1)}, \ldots, b_{1\,(2)}, b_{2\,(2)}, \ldots)$. Si el medio en el interior del transformador de guía de ondas es lineal y pasivo (no hay manantiales), entonces, los vectores a y b están ligados por una dependencia lineal homogénea y, por lo tanto, podemos escribir que:

$$a = Zb \quad \text{y} \quad b = Ya \tag{73.13}$$

donde las matrices Y y Z se denominan, respectivamente, *matriz de resistencia* y *matriz de admitancia* del transformador de guía de ondas. Tienen una estructura que, a continuación, aclara el ejemplo de la matriz Z:

$$Z = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} Z^{11} & Z^{12} & \ldots & Z^{1P} \\ \hline Z^{21} & Z^{22} & \ldots & \ldots \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline Z^{P1} & \ldots & \ldots & Z^{PP} \end{array} \right\|, \quad \text{siendo} \quad Z^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{ccc} Z_{11}^{\alpha\beta} & Z_{12}^{\alpha\beta} & \ldots \\ Z_{21}^{\alpha\beta} & Z_{22}^{\alpha\beta} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right\|,$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, P \tag{73.14}$$

(las células $Z^{\alpha\beta}$ son matrices infinitas).

Como en cada una de las secciones S_α el campo puede también representarse en forma de las superposiciones de las ondas directas e inversas de la guía de ondas dada con componentes transversales $e_{n\,(\alpha)}$ y $h_{n\,(\alpha)}$ (incluyendo los campos transfrontera), entonces, en lugar de las (73.12) se puede escribir:

$$\dot{E}_{m\,(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n\,(\alpha)}^{+} e_{n\,(\alpha)} + c_{n\,(\alpha)}^{-} e_{n\,(\alpha)}),$$

$$\dot{H}_{m\,(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n\,(\alpha)}^{+} h_{n\,(\alpha)} - c_{n\,(\alpha)}^{-} h_{n\,(\alpha)}). \tag{73.15}$$

El conjunto de todos los coeficientes $c_{n\,(\alpha)}^{+}$ y $c_{n\,(\alpha)}^{-}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, P$, $n = 1, 2, \ldots$) forman los vectores c^{+} y c^{-} del mismo tipo

que a y b, además, al comparar las (72.12) y (73.15) tenemos

$$\left.\begin{aligned} a &= c^+ + c^-, \\ b &= c^+ - c^-. \end{aligned}\right\} \tag{73.16}$$

En la correlación lineal homogénea

$$c^- = Rc^+ \tag{73.17}$$

la matriz R se denomina *matriz de dispersión*; conociendo R se pueden determinar las amplitudes de todas las ondas salientes ("dispersas") en forma del vector c^-, si fueron prefijadas las amplitudes de las ondas entrantes ("incidentes") que se determinan por el vector c^+.

La matriz de dispersión tiene la misma estructura que las matrices Z y Y (73.14). El sentido de sus elementos es extremadamente sencillo. Sea que todos las guías de ondas son infinitas y sólo por una de ellas, sobre la sección S_α incide una onda del tipo $n(\alpha)$, es decir, que el vector c^+ sólo tiene una componente $c^+_{n(\alpha)}$ que no es igual a cero. En este caso, en virtud de la (73.17), en esta guía de ondas se creará una onda *reflejada* del mismo tipo, con factor de cresta (punta) $c^-_{n(\alpha)} = R^{\alpha\alpha}_{nn} c^+_{n(\alpha)}$ y ondas *reflejadas* de otros tipos, para las que estos factores son iguales a $c^-_{k(\alpha)} = R^{\alpha\alpha}_{kn} c^+_{n(\alpha)}$; en el resto de las secciones se crean ondas *transmitidas* con factor de cresta $c^-_{k(\alpha)} = R^{\beta\alpha}_{kn} c^+_{n(\alpha)}$. De este modo, los elementos $R^{\alpha\alpha}_{kn}$ son los *coeficientes de reflexión* para las secciones de entrada S_α (cuando $k = n$, se trata de una onda reflejada sin transformación del tipo), mientras que los elementos $R^{\beta\alpha}_{kn}$ son los *coeficientes de transmisión (relación de transferencia)* del transformador de guía de ondas dado.

En esencia la correlación (73.17) da un medio para la descripción del *proceso de difracción* en un sistema de guía de ondas; para esto sirve la matriz de difusión.

Establezcamos la relación existente entre las matrices R, Z y Y. De las (73.13) y (73.16) se desprende que: $c^+ + c^- = Z(c^+ - c^-)$ y, más adelante, teniendo en cuenta (73.17):
$(I + R)c^- = Z(I - R)c^-$. Basándonos en lo anterior, escribimos que:

$$I + R = Z(I - R), \tag{73.18a}$$

y de aquí que

$$Z = (I + R)(I - R)^{-1} \quad \text{y} \quad R = (Z + I)^{-1}(Z - I). \tag{73.18b}$$

De manera análoga hallamos que

$$I - R = Y(I + R), \tag{73.19a}$$

de donde

$$Y = (I - R)(I + R)^{-1} \quad \text{y} \quad R = (I + Y)^{-1}(I - Y). \tag{73.19b}$$

Y por fin, en virtud de (73.13)

$$Y = Z^{-1}, \quad Z = Y^{-1} \tag{73.20}$$

(indiquemos que las matrices Z y Y pueden no tener las inversas). En la primera de las correlaciones (73.18b) se advierte con facilidad la generalización de la igualdad (73.7) obtenida con anterioridad. Podemos decir que en el punto 2 fue analizado el más sencillo sistema con una sección de entrada ($P=1$) y con un tipo de campo. Al mismo tiempo, las matrices Z y R sólo tienen un elemento (Z_{11}^{11} y R_{11}^{11}), de manera que la igualdad (73.18b) toma el aspecto $Z_{11}^{11}=\frac{1+R_{11}^{11}}{1-R_{11}^{11}}$ y se transforma en la (73.7). Entonces $R_{11}^{11}=\dot{\rho}$, es decir, al coeficiente de reflexión de la onda fundamental, mientras que Z_{11}^{11} es la resistencia "normalizada" (referida a $\dot{W}_1$) $\dot{Z}/\dot{W}_1$.

Por fin, señalemos la siguiente importante circunstancia. Aunque en el caso general las matrices Z, Y y R son infinitas, siempre podemos disponer las secciones de entrada (para suficiente longitud de las guías de ondas) de tal modo que las matrices sean finitas. Sea que en cada una de las guías de ondas acopladas el carácter de la onda que se propaga sólo lo tenga un tipo de campo. Esto significa que si la sección S_α se encuentra en la región de régimen regular, entonces, en las expresiones (73.12) pueden considerarse nulos todos los coeficientes, salvo $a_{1(\alpha)}$ y $b_{1(\alpha)}$. Los vectores a y b resultan ser sólo de P-dimensiones: $a=(a_{1(1)}, a_{1(2)}, \ldots, a_{1(P)})$ y $b=(b_{1(1)}, b_{1(2)}, \ldots, b_{1(P)})$ y en las matrices infinitas $Z^{\beta\alpha}$ (73.14) sólo queda un elemento $Z_{11}^{\alpha\beta}$ (esto también se refiere a las matrices análogas $Y_{11}^{\alpha\beta}$ y $R_{11}^{\alpha\beta}$). De este modo, al referir las secciones de entrada S_α a la región del régimen regular (fig. 73.6), las matrices Z, Y y R tendrán un número igual de secciones de entrada de un orden P. En este caso, el transformador de guía de ondas se describe como un $2P$-polo en la teoría de circuitos.

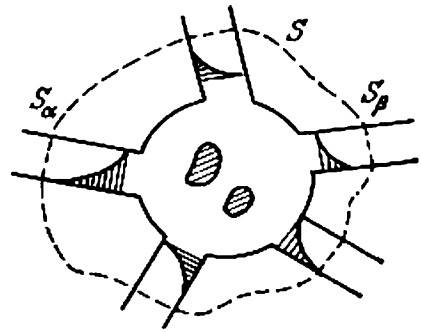


Fig. 73.6.

4. Sobre la teoría termodinámica de los esquemas integrales. Cada día adquieren mayor aplicación los sistemas de guía de ondas confeccionados sobre la base de líneas de bandas paralelas (de guía de ondas), por ejemplo, basados en la llamada "línea de bandas paralelas no simétrica", cuya sección transversal se muestra en la fig. 67.7, *g*. De esta manera se obtienen los "esquemas integrales de frecuencias ultraelevadas" que tienen una serie de ventajas tecnológicas y de construcción en comparación con los sistemas huecos de guía de ondas.

Al realizar el examen más sencillo, la línea de bandas paralelas no simétrica puede considerarse como una línea bifilar; la onda fundamental se interpreta como una *TEM* (lo que no es exacto, véase la pág. 457) y en el análisis se introducen las co-

rrientes y tensiones (compárese con el § 66, punto 2). En la fig. 73.7, *a* se muestran dos irregularidades típicas de una línea de bandas paralelas: "corte" y "escalón". Representada como una línea bifilar, tienen el aspecto que se muestra en la fig. 73.7, *b* (en el segundo caso tenemos diferentes impedancias de onda W_l y

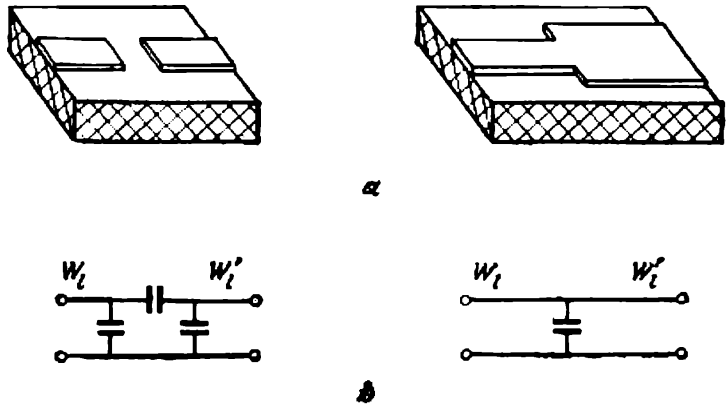


Fig. 73.7.

W_l'). Si estos objetos son en alto grado cuasiestacionarios, entonces las capacidades que aquí figuran se pueden hallar resolviendo cierto problema de electrostática. Pero con frecuencia esto resulta ser una basta aproximación.

La esencia de una consideración rigurosa de los esquemas integrales de frecuencias superelevadas consiste en lo siguiente. Los elementos mostrados en la fig. 73.7, *a*, lo mismo que otras heterogeneidades propias de las líneas de bandas paralelas, son sectores

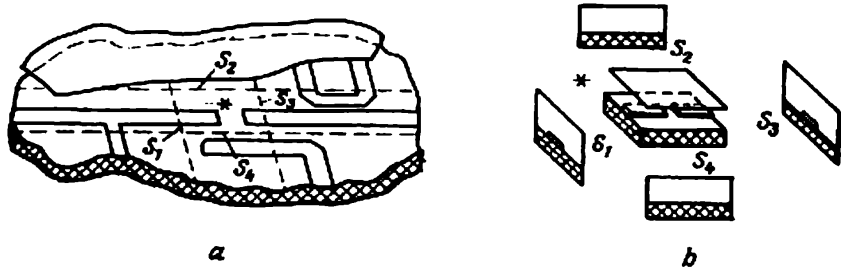


Fig. 73.8.

de objetos más complicados. Por ejemplo, el elemento del tipo "corte" se puede destacar en el esquema integral representado convencionalmente en la fig. 73.8, *a*. Notemos que en el caso dado todo el dispositivo puede ser una pantalla plana metálica, parte de la cual se ve en la figura. Fijemos nuestra atención en el corte destacado (*) que se muestra independientemente en la fig. 73.8, *b*. En realidad esta es una guía de ondas igual al transfor-

mador de guía de ondas, lo mismo que los dispositivos expuestos en la fig. 73.5. En este caso como secciones de entrada sirven las cuatro aristas abiertas del paralelepipedo S_1, S_2, S_3 y S_4. Estas se deben considerar como las secciones transversales de guías de ondas rectangulares con relleno determinado. Así pues, S_1 y S_3 son las secciones transversales de guías de ondas de banda paralela apantalladas y S_2 y S_4, guías de ondas rectangulares con capa dieléctrica. Son justos los desarrollos de los campos en las entradas en forma de las fórmulas (73.12) (verdad es que las correlaciones de ortogonalidad (73.11) deben ser sustituidas por otras más generales, véase [1.3], punto 9.1). Por esto apliquemos los métodos de descripción examinados más arriba en forma de las matrices Z, Y y R (73.13)—(73.20). Un esquema integral complicado se representará como la unión de transformadores de guía de ondas y su matriz de difusión puede ser hallada si se conocen las matrices de difusión de los transformadores de guía de ondas elementales.

§ 74. Propiedades de los transformadores de guía de ondas

1. Matrices de resistencia y admitancia. Más adelante sólo vamos a considerar transformadores de guía de ondas con secciones de entrada situadas en las regiones de régimen regular de las guías de ondas conectadas que solamente transmiten una onda fundamental. Aclaremos ciertas propiedades de las matrices Z y Y.

Construyamos mentalmente una superficie S que pasa por todas las secciones de entrada S_α y que comprende totalmente el transformador de guía de ondas (fig. 73.6). Los vectores del campo no son nulos sólo en S_α, teniendo, además, las representaciones (73.12) la forma: $\dot{\boldsymbol{E}}_{m(\alpha)} = a_{1(\alpha)}\boldsymbol{e}_{1(\alpha)}$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_{m(\alpha)} = b_{1(\alpha)}\boldsymbol{h}_{1(\alpha)}$; las impedancias de onda son reales ($\dot{W}_{1(\alpha)} = W_{1(\alpha)}$). Por esta razón

$$\oint_S [\dot{\boldsymbol{E}}_m, \dot{\boldsymbol{H}}_m^*]\,d\boldsymbol{s} = \sum_{\alpha=1}^{P} \int_{S_\alpha} [\dot{\boldsymbol{E}}_{m(\alpha)}, \dot{\boldsymbol{H}}_{m(\alpha)}^*]\,d\boldsymbol{s} = -\sum_{\alpha=1}^{P} a_{1(\alpha)} b_{1(\alpha)}^*. \quad (74.1)$$

Se puede prefijar tal campo, debido al que en las secciones de entrada la componente eléctrica transversal existirá nada más que en una de dichas secciones:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{E}}_{m(\alpha)} = 0,\ \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ \beta-1,\ \beta+1,\ \ldots,\ P, \\ &\dot{\boldsymbol{E}}_{m(\beta)} \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad (74.2)$$

($a_{1(\alpha)} \neq 0$). Esto es el llamado "régimen de cortocircuito"; tal régimen tendrá lugar si en las respectivas secciones de entrada se han introducido tabiques de conducción ideales. Observando la condi-

ción (74.2), de la (74.1) se desprende que:

$$\oint_S [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]\, ds = -a_{1\,(\beta)} b_{1\,(\beta)}^*. \tag{74.3}$$

Si en el transformador de guía de ondas no hay absorción y éste es pasivo entonces, en virtud de (30.11),

$$\operatorname{Re} \oint_S [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]\, ds = 0 \quad (\varepsilon'' = 0,\ \mu'' = 0,\ \dot{P}^{ex} = 0). \tag{74.4}$$

Al mismo tiempo, a la condición (74.2) $b_{1\,(\beta)} = Y_{11}^{\beta\beta} a_{1\,(\beta)}$. Por esto, el segundo miembro de la (74.3) toma el aspecto de $-Y_{11}^{\beta\beta *} |a_{1\,(\beta)}|^2$ y, de la (74.3), teniendo en cuenta la (74.4), se obtiene que

$$\operatorname{Re} Y_{11}^{\beta\beta} = 0, \tag{74.5}$$

es decir, que todos los elementos de la matriz de admitancia $Y_{11}^{\beta\beta}$ (la sección S_β es arbitraria: $\beta = 1, 2, \ldots, P$), cuando el transformador es pasivo y no absorbente, son *imaginarios*.

Dando, a continuación, el "régimen de marcha en vacío"

$$\left.\begin{aligned} &\dot{H}_{m\,(\alpha)} = 0,\ \alpha = 1, 2, \ldots, \beta - 1, \beta + 1, \ldots, P, \\ &\dot{H}_{m\,(\beta)} \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{74.6}$$

($b_{1\,(\beta)} \neq 0$), también llegamos a la igualdad (74.3). Ahora, podemos escribir que: $a_{1\,(\beta)} = Z_{11}^{\beta\beta} b_{1\,(\beta)}$ y en el segundo miembro obtener $-Z_{11}^{\beta\beta} |b_{1\,(\beta)}|^2$. De aquí

$$\operatorname{Re} Z_{11}^{\beta\beta} = 0, \tag{74.7}$$

es decir, que también son *imaginarios* todos los elementos de la matriz de resistencia $Z_{11}^{\beta\beta}$.

Hagamos, ahora, uso del lema de Lorentz en la forma (48.6). Empleándolo respecto a la anterior región acotada por la superficie S que pasa por todas las secciones de entrada (fig. 73.6), se tiene que

$$\oint_S \{[\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m1}] - [E_{m1}, \dot{H}_{m2}]\}\, ds = 0. \tag{74.8}$$

Sea que el régimen de cortocircuito se extiende en todas las secciones de entrada, salvo por dos de ellas, S_μ y S_ν. Indiferentemente de cuales sean dos diferentes soluciones de las ecuaciones de Maxwell $\dot{E}_{m1}$, $\dot{H}_{m1}$ y $\dot{E}_{m2}$, $\dot{H}_{m2}$ en las secciones de entrada S_μ y S_ν, las representaciones (73.12) dan que

$$\dot{E}_{m1,2} = \begin{cases} \dot{E}_{m\,(\beta)}^{(1,2)} = a_{1\,(\beta)}^{(1,2)} e_{1\,(\beta)} = (Y_{11}^{\beta\beta} b_{1\,(\beta)}^{(1,2)} + Y_{11}^{\beta\nu} b_{1\,(\nu)}^{(1,2)})\, e_{1\,(\beta)} & \text{en } S_\beta, \\ \dot{E}_{m\,(\nu)}^{(1,2)} = a_{1\,(\nu)}^{(1,2)} e_{1\,(\nu)} = (Y_{11}^{\nu\nu} b_{1\,(\nu)}^{(1,2)} + Y_{11}^{\nu\beta} b_{1\,(\beta)}^{(1,2)})\, e_{1\,(\nu)} & \text{en } S_\nu; \end{cases}$$

$$\dot{H}_{m1,2} = \begin{cases} \dot{H}_{m\,(\beta)}^{(1,2)} = b_{1\,(\beta)}^{(1,2)} h_{1\,(\beta)} & \text{en } S_\beta, \\ \dot{H}_{m\,(\nu)}^{(1,2)} = b_{1\,(\nu)}^{(1,2)} h_{1\,(\nu)} & \text{en } S_\nu \end{cases}$$

(los índices superiores (1,2) indican la pertenencia a la primera o segunda solución). Introduciendo esto en la (74.8), siendo reales $e_{1(\beta, \gamma)}$ y $h_{1(\beta, \gamma)}$ y, teniendo en cuenta las (73.11), se escribe:

$$(Y_{11}^{\beta\beta} b_{1(\beta)}^{(2)} + Y_{11}^{\beta\gamma} b_{1(\gamma)}^{(2)}) b_{1(\beta)}^{(1)} + (Y_{11}^{\gamma\gamma} b_{1(\gamma)}^{(2)} + Y_{11}^{\gamma\beta} b_{1(\beta)}^{(2)}) b_{1(\gamma)}^{(1)} -$$
$$- (Y_{11}^{\beta\beta} b_{1(\beta)}^{(1)} + Y_{11}^{\beta\gamma} b_{1(\gamma)}^{(1)}) b_{1(\beta)}^{(2)} - (Y_{11}^{\gamma\gamma} b_{1(\gamma)}^{(1)} + Y_{11}^{\gamma\beta} b_{1(\beta)}^{(1)}) b_{1(\gamma)}^{(2)} = 0,$$

de donde

$$Y_{11}^{\beta\gamma} (b_{1(\gamma)}^{(2)} b_{1(\beta)}^{(1)} - b_{1(\gamma)}^{(1)} b_{1(\beta)}^{(2)}) = Y_{11}^{\gamma\beta} (b_{1(\gamma)}^{(2)} b_{1(\beta)}^{(1)} - b_{1(\gamma)}^{(1)} b_{1(\beta)}^{(2)})$$

y, por consiguiente,

$$Y_{11}^{\beta\gamma} = Y_{11}^{\gamma\beta} \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, P). \tag{74.9}$$

De este modo, vemos que la matriz de admitancia es *simétrica* (Suplemento 9). De esta misma manera, analizando un régimen de marcha en vacío análogo, llegamos con facilidad a la deducción de que

$$Z_{11}^{\beta\gamma} = Z_{11}^{\gamma\beta} \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, P). \tag{74.10}$$

Conviene subrayar que las igualdades (74.9) y (74.10) que expresan el *principio de reciprocidad* para un transformador de guía de ondas (compárese con el § 48, punto 2), sólo son válidas en los límites en que el lema de Lorentz es justo (§ 48, punto 1).

Demostremos que todos los elementos de las matrices Y y Z de un transformador de guía de ondas no absorbente y pasivo, subordinado al principio de reciprocidad, son imaginarios (la "resistencia" y "admitancia" tienen carácter "reactivo"). Creando en todas las secciones de entrada, salvo S_α y S_β, cortocircuitos, en el segundo miembro de la (74.1) tendremos $-a_{1(\beta)} b_{1(\beta)}^* - a_{1(\gamma)} b_{1(\gamma)}^*$ (compárese con la (74.3)). En virtud de (74.4),

$$\operatorname{Re} (a_{1(\beta)} b_{1(\beta)}^* + a_{1(\gamma)} b_{1(\gamma)}^*) = 0,$$

es decir,

$$\operatorname{Re} [a_{1(\beta)} (Y_{11}^{\beta\beta} a_{1(\beta)} + Y_{11}^{\beta\gamma} a_{1(\gamma)})^* + a_{1(\gamma)} (Y_{11}^{\gamma\gamma} a_{1(\gamma)} + Y_{11}^{\gamma\beta} a_{1(\beta)})^*] = 0.$$

De aquí, teniendo en cuenta las (74.5) y (74.9), se desprende que

$$\operatorname{Re} Y_{11}^{\beta\gamma} (a_{1(\beta)}^* a_{1(\gamma)} + a_{1(\beta)} a_{1(\gamma)}^*) = 0,$$

pero como la magnitud entre paréntesis es real, entonces

$$\operatorname{Re} Y_{11}^{\beta\gamma} = 0 \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, P). \tag{74.11}$$

De modo análogo se establece que a semejantes condiciones iniciales

$$\operatorname{Re} Z_{11}^{\beta\gamma} = 0 \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, P). \tag{74.12}$$

2. Matriz de dispersión. En virtud de las correlaciones (73.18b) y (73.19b) y al cumplirse las igualdades (74.9), (74.10), la matriz

de dispersión R es *simétrica*, como lo son Z y Y:

$$R_{11}^{\beta\gamma} = R_{11}^{\gamma\beta} \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, P) \tag{74.13}$$

(esto mismo puede ser establecido por medio de las fórmulas del suplemento 9).

Seguidamente, es importante que para un transformador de guía de ondas no absorbente y pasivo, la matriz de dispersión es *unitaria* (suplemento 9). Demostremos esta afirmación. La matriz R unitaria, según la (S9.6), deberá subordinarse a la correlación

$$\tilde{R} = R^{-1}. \tag{74.14}$$

Expresando con ayuda de la fórmula (73.18b) R por Z, escribimos la matriz inversa R^{-1} en la forma

$$R^{-1} = (Z - I)^{-1}(Z + I) \tag{74.15}$$

(una sencilla comprobación muestra que la multipliación de esta matriz por R da la matriz unitaria I). Hallemos la matriz conjugada $\tilde{R}$, es decir, transpuesta y complejamente conjugada. Pero la matriz R es simétrica y, por lo tanto $\tilde{R} = R^*$; de este modo

$$\tilde{R} = (Z^* + I)^{-1}(Z^* - 1) = (-Z + I)^{-1}(-Z - I) = \\ = (Z - I)^{-1}(Z + I). \tag{74.16}$$

Comparando los resultados de las (74.15) y (74.16), podemos ver que la igualdad (74.14) efectivamente se cumple.

La cualidad unitaria de la matriz de dispersión es consecuencia del principio de conservación de la energía en la forma (74.4). Ya que

$$\dot{E}_{m(\alpha)} = (c_{1(\alpha)}^{+} + c_{1(\alpha)}^{-1})\, e_{1(\alpha)}$$

y

$$\dot{H}_{m(\alpha)} = (c_{1(\alpha)}^{+} - c_{1(\alpha)}^{-1})\, h_{1(\alpha)},$$

esta igualdad puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{P} \int_{S_\alpha} [(c_{1(\alpha)}^{+} + c_{1(\alpha)}^{-})\, e_{1(\alpha)},\ (c_{1(\alpha)}^{+} - c_{1(\alpha)}^{-})^*\, h_{1(\alpha)}^*]\, ds = 0.$$

De aquí

$$\mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{P} (|c_{1(\alpha)}^{+}|^2 - |c_{1(\alpha)}^{-}|^2 - c_{1(\alpha)}^{+}(c_{1(\alpha)}^{-})^* + c_{1(\alpha)}^{-}(c_{1(\alpha)}^{+})^*) = 0,$$

es decir,

$$\sum_{\alpha=1}^{P} (|c_{1(\alpha)}^{+}|^2 - |c_{1(\alpha)}^{-}|^2) = 0 \tag{74.17}$$

o bien

$$(c^+,\ c^+) = (c^-,\ c^-) \tag{74.17a}$$

(compárese con el suplemento 9, pág. 673). Las siguientes operaciones son las mismas que en el suplemento 9. Expresando c^- por c^+ mediante la correlación (73.17), se tiene

$$(c^+, c^+) = (Rc^+, Rc^+)$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$(c^+, Ic^+) = (c^+, \tilde{R}Rc^+).$$

Lo que de nuevo nos lleva a la (74.14).

3. Ejemplos. Conclusión. Consideremos varios sencillos ejemplos. Sea que en la región de régimen regular de un conducto de guía de ondas se ha destacado un segmento de longitud l (fig. (74.1). Como sólo se propaga una onda fundamental que pasa por la indicada región sin reflejarse, adquiriendo un desfasaje igual a $-\Gamma_1 l$ y no hay motivos para la creación de campos de orden superior, la matriz de dispersión tiene la forma

$$R = \begin{Vmatrix} 0 & e^{-i\Gamma_1 l} \\ e^{-i\Gamma_1 l} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (74.18)$$

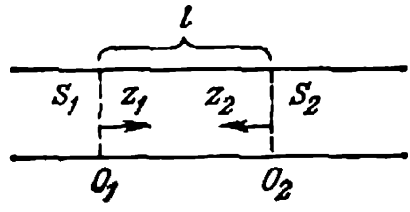


Fig. 74.1.

independientemente de la longitud l; escogiendo $l = n\Lambda$ ($n = 1, 2, \ldots$), en particular, obtenemos que

$$R = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (74.18a)$$

En la radiotecnia de las frecuencias ultraelevadas se emplean los llamados *acopladores direccionales*. Estos son dispositivos cuyo funcionamiento puede ser esclarecido tomando como ejemplo dos guías de ondas acopladas mediante los orificios A y B de muy pequeño diámetro (fig. 74.2, *a*) y situados a una distancia igual

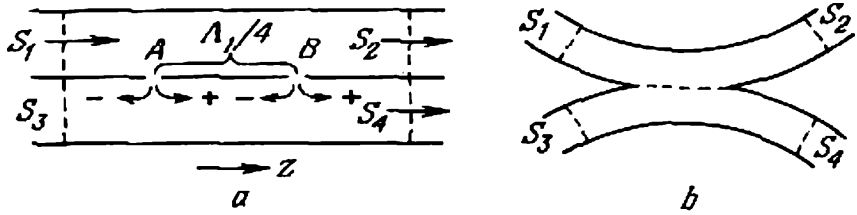


Fig. 74.2.

a $\Lambda_1/4$. Mientras menor sea el diámetro de los orificios, podremos con mayor razón suponer que cada uno de ellos actúa como si hubiera un solo orificio. Si en la guía de ondas 1 se propaga desde S_1 hacia S_2 la onda fundamental, entonces, en la guía de ondas acoplada 2 se excitan cuatro ondas fundamentales (además de los campos de orden superior), que, convencionalmente, se de-

signan por A^+, A^-, B^+ y B^-; el sentido de estos simbolos se comprende al estudiar la fig. 74.2, *a*. Las ondas A^+ y B^+ se superponen y crean una onda que sale de S_4. Ellas interfieren en fase, ya que el orificio A se excita con un avance de 90° en comparación con el orificio B, mientras que en la guía de ondas acoplada, la onda A^+ se retarda respecto a B^+ también en 90°. En lo que se refiere a las ondas A^- y B^-, ellas interfieren en la antifase, de forma que de S_3 no sale onda ninguna. Efectivamente, al avance de excitación de la onda A^- en comparación con B^- desde la guía de ondas 1 se adiciona, además, un avance de 90° a causa de la diferencia de recorridos en la guía de ondas 2. Así, la onda que se propaga en la guía de ondas 1 desde S_1 hacia S_2, produce en la guía de ondas 2 una onda que se propaga paralelamente. El dispositivo es simétrico y por lo tanto llegaremos a una deducción análoga al estudiar las ondas primarias que van desde S_2 hacia S_1, S_3 a S_4 y S_4 a S_3.

Disponemos de diversos métodos para construir acopladores direccionales (desde un punto de vista técnico mucho más interesantes) y, por esta razón, vamos a detenernos en su descripción general.

La vista general de un acoplador direccional se muestra convencionalmente en la fig. 74.2, *b*. Si dicho acoplador es ideal, entonces, como en el caso examinado anteriormente, tendremos:

$$R_{11}^{31} = R_{11}^{13} = R_{11}^{24} = R_{11}^{42} = 0. \tag{74.19a}$$

Si tampoco hay reflexiones, entonces,

$$R_{11}^{11} = R_{11}^{22} = R_{11}^{33} = R_{11}^{44} = 0 \tag{74.19b}$$

(más adelante demostraremos que estas condiciones deben cumplirse simultáneamente). A continuación, en virtud de la simetría del dispositivo

$$R_{12} = R_{21} = R_{34} = R_{43} = \dot{a} \tag{74.20a}$$

y

$$R_{14} = R_{41} = R_{32} = R_{23} = \dot{b}, \tag{74.20b}$$

siendo $\dot{a}$ y $\dot{b}$ ciertos números complejos. De esta manera, al escribir la matriz de dispersión para secciones de entrada referidas a la región de régimen regular, se tiene

$$R = \begin{Vmatrix} 0 & \dot{a} & 0 & \dot{b} \\ \dot{a} & 0 & \dot{b} & 0 \\ 0 & \dot{b} & 0 & \dot{a} \\ \dot{b} & 0 & \dot{a} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{74.21}$$

Una información posterior sobre los elementos de la matriz R será obtenida si tenemos en cuenta el hecho de que ella es unitaria. Multiplicando $\tilde{R} = R^*$ por R, debemos obtener la matriz

unitaria I:

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dot{a}^* & 0 & \dot{b}^* \\ \dot{a}^* & 0 & \dot{b}^* & 0 \\ 0 & \dot{b}^* & 0 & \dot{a}^* \\ \dot{b}^* & 0 & \dot{a}^* & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & \dot{a} & 0 & \dot{b} \\ \dot{a} & 0 & \dot{b} & 0 \\ 0 & \dot{b} & 0 & \dot{a} \\ \dot{b} & 0 & \dot{a} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{74.22}$$

En virtud de la regla de multiplicación de matrices (Suplemento 9, pág. 672), se halla

$$\left.\begin{aligned} (\tilde{R}R)_{11} &= |\dot{a}|^2 + |\dot{b}|^2 = 1, \\ (\tilde{R}R)_{13} &= \dot{a}^*\dot{b} + \dot{b}^*\dot{a} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{74.23}$$

así que designando $\dot{a} = ae^{i\varphi}$ y $\dot{b} = be^{i\psi}$ (a y b son magnitudes reales), se obtiene que

$$b = \sqrt{1-a^2},$$
$$\operatorname{Re}(a\dot{b})^* = 0, \quad \operatorname{Re} e^{i(\varphi-\psi)} = 0. \tag{74.24}$$

El segundo renglón significa que

$$\cos(\varphi - \psi) = 0,$$

es decir,

$$\varphi - \psi = \pm(2n-1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{74.24a}$$

y, así, llegamos a la conclusión de que las ondas directa y desviada se hallan en cuadratura.

Demostremos, por fin, que las condiciones iniciales (74.19a) y (74.19b) no son independientes, es decir, que un acoplador no reflector direccional debe ser ideal. Supongamos que en lugar de la (74.19a) tenemos

$$R_{11}^{21} = R_{11}^{13} = R_{11}^{24} = R_{11}^{42} = c, \tag{74.25}$$

y que introducimos este valor en la (74.22) en lugar de los respectivos ceros. Entonces, se tendrá que:

$$\left.\begin{aligned} (\tilde{R}R)_{13} &= a^*\dot{b} + \dot{b}^*\dot{a} = 0, \\ (\tilde{R}R)_{12} &= \dot{c}^*\dot{b} + \dot{b}^*\dot{c} = 0, \\ (\tilde{R}R)_{14} &= \dot{a}^*\dot{c} + \dot{c}^*\dot{a} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{74.26}$$

(el primero de los renglones coincide con el segundo renglón de las (74.23)). Pero estas ecuaciones son incompatibles. Efectivamente, escribamos otra vez las (74.26) en forma de tres proporciones:

$$\frac{\dot{a}^*}{\dot{a}} = -\frac{\dot{b}^*}{\dot{b}}, \quad \frac{\dot{b}^*}{\dot{b}} = -\frac{\dot{c}^*}{\dot{c}}, \quad \frac{\dot{a}^*}{\dot{a}} = -\frac{\dot{c}^*}{\dot{c}}.$$

Eliminando de la primera igualdad $\dot{a}^*/\dot{a}$ y $\dot{b}^*/\dot{b}$, se obtiene que

$$\frac{\dot{c}^*}{\dot{c}} = -\frac{\dot{c}^*}{\dot{c}} \quad (¿?)$$

La suposición (74.25) se rechaza.

El ejemplo del acoplador direccional es curioso a causa de que, partiendo de las propiedades generales de la matriz de dispersión y de la simetría del sistema, hemos conseguido establecer ciertas singularidades de dicha matriz que de modo directo no son evidentes. El número de tal clase de ejemplos podría ser ampliado.

En comparación con las matrices de resistencia y de admitancia, la matriz de dispersión nos da un medio más natural para describir los transformadores de guía de ondas, ya que en realidad suelen ser conocidos no los campos eléctricos y magnéticos completos en las secciones de entrada, sino las ondas incidentes. Al mismo tiempo, las matrices Z e Y nos permiten confeccionar "esquemas equivalentes" de transformadores de guía de ondas en forma de circuitos o, con mayor exactitud, de $2P$-polos; en este caso, los coeficientes $a_{1(\alpha)}$ y $b_{1(\alpha)}$ se consideran respectivamente como tensión y corriente de entrada.

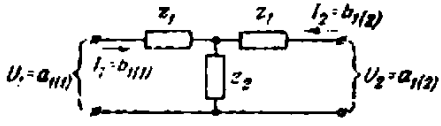


Fig. 74.3

Como ejemplo, tomemos un segmento de guía de ondas para el que ha sido obtenida la matriz de dispersión (74.18). En virtud de las (73.18b)

$$Z = \left\| \begin{matrix} 1 & e^{-i\Gamma_1 l} \\ e^{-i\Gamma_1 l} & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & -e^{-i\Gamma_1 l} \\ -e^{-i\Gamma_1 l} & 1 \end{matrix} \right\|^{-1},$$

es decir, de acuerdo con la (S9.7)

$$Z = \left\| \begin{matrix} 1 & e^{-i\Gamma_1 l} \\ e^{-i\Gamma_1 l} & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & e^{-i\Gamma_1 l} \\ e^{-i\Gamma_1 l} & 1 \end{matrix} \right\| \frac{1}{1 - e^{-i2\Gamma_1 l}}.$$

Multiplicando mutuamente las matrices, se halla que

$$Z = -i \left\| \begin{matrix} \operatorname{ctg} \Gamma_1 l & \operatorname{cosec} \Gamma_1 l \\ \operatorname{cosec} \Gamma_1 l & \operatorname{ctg} \Gamma_1 l \end{matrix} \right\|. \qquad (74.27)$$

Esto significa que la acción del segmento de una guía de ondas destacado en la región de régimen regular, puede expresarse por medio del esquema de un cuadripolo equivalente, por ejemplo, en T (fig. 74.3), siendo

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12} = -i (\operatorname{ctg} \Gamma_1 l - \operatorname{cosec} \Gamma_1 l)$$

y

$$Z_2 = Z_{12} = -i \operatorname{cosec} \Gamma_1 l.$$

En conclusión, hay que remarcar que sólo en ciertos casos sencillos, las matrices Z, Y y R de los transformadores de guía de

ondas no pueden ser determinadas partiendo de consideraciones elementales. Sin embargo, al investigar sistemas reales, los elementos de dichas matrices pueden ser hallados por medio de mediciones; los métodos correspondientes se exponen en los cursos dedicados a las mediciones de radio en frecuencias ultraelevadas. Para calcular las matrices Y, Z y R es preciso disponer de las soluciones de los problemas de contorno de electrodinámica, planteados especialmente para el transformador de guía de ondas que se considera. Esta cuestión será tratada en el § 76.

§ 75. Teoría de perturbaciones

1. Planteamiento del problema. Principio de comparación. Anteriormente ya señalamos que los problemas sobre los sistemas de guiado, resonadores de cavidad y transformadores de guía de ondas, sólo en pocos casos son *regulares*, es decir, tienen soluciones analíticas cerradas. Sin embargo, en ciertos casos, los problemas *irregulares* es más cómodo considerarlos como regulares, pero que sufrieron cierta desviación, perturbación de las condiciones iniciales.

Con suficiente pequeñez de la perturbación, la solución de un problema irregular perturbado puede determinarse frecuentemente con cierta aproximación teniendo la solución del problema regular.

Comencemos por comparar dos problemas de contorno para las ecuaciones de Maxwell.

Problema 1 ("inicial")

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \dot{E}_{m0} = -i\omega_0\mu_0\dot{H}_{m0}, \\ &\operatorname{rot} \dot{H}_{m0} = i\omega_0\varepsilon_0\dot{E}_{m0} + \dot{j}^{ex}_{m0} \end{aligned}\right\} \text{ en } V_0,$$

$$\dot{E}_{m0\tau} = 0 \text{ en } S_0 - S_{0\Sigma}$$

$$\dot{E}_{m0} = \dot{E}_{m0\Sigma} \text{ en } S_{0\Sigma},$$

Problema 2 ("perturbado")

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \dot{E}_m = -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_m; \\ &\operatorname{rot} \dot{H}_m = i\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_m + \dot{j}^{ex}_m \end{aligned}\right\} \text{ en } V,$$

$$\dot{E}_{m\tau} = 0 \text{ en } S - S_\Sigma,$$

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m\Sigma} \text{ en } S_\Sigma.$$

(75.1)

La permitividad ε_0 y la permeabilidad magnética μ_0 son magnitudes escalares reales; la frecuencia ω_0 siempre es real (esta última aclaración tiene sentido al considerar oscilaciones libres). Las regiones V_0 y V con superficies de separación S_0 y S, se cruzan o coinciden obligatoriamente, lo que constituye un importante caso particular (fig. 75.1, *a*).

Tomando las ecuaciones (75.1) (problema 1) en una forma complejamente conjugada y efectuando las operaciones ya conocidas (compárese, por ejemplo, con el § 71, punto 3 y el § 72, punto 2), de las (75.1) se obtienen las correlaciones

$$\oint_{S_0} [\dot{E}_m, \dot{H}^*_{m0}]\, ds = -i\dot{\omega} \int_{V_0} \dot{\mu}\dot{H}_m\dot{H}^*_{m0}\, dv + \\ + i\omega_0 \int_{V_0} \varepsilon_0\dot{E}_m\dot{E}^*_{m0}\, dv - \int_{V_0} \dot{j}^{ex}_{m0}\dot{E}_m\, dv \qquad (75.2)$$

y

$$\oint_{S_0} [\dot{E}^*_{m0},\ \dot{H}_m]\,ds = i\omega_0 \int_{V_0} \mu_0 \dot{H}_m \dot{H}^*_{m0}\,dv - $$

$$- i\dot{\omega} \int_{V_0} \dot{\varepsilon} \dot{E}_m \dot{E}^*_{m0}\,dv - \int_{V_0} \dot{j}^{ex}_m \dot{E}^*_{m0}\,dv \qquad (75.3)$$

(se supone que cuando las regiones V y V_0 no coinciden, existen las prolongaciones de las funciones $\dot{E}_m$ y $\dot{H}_m$ en la región V_0 subor-

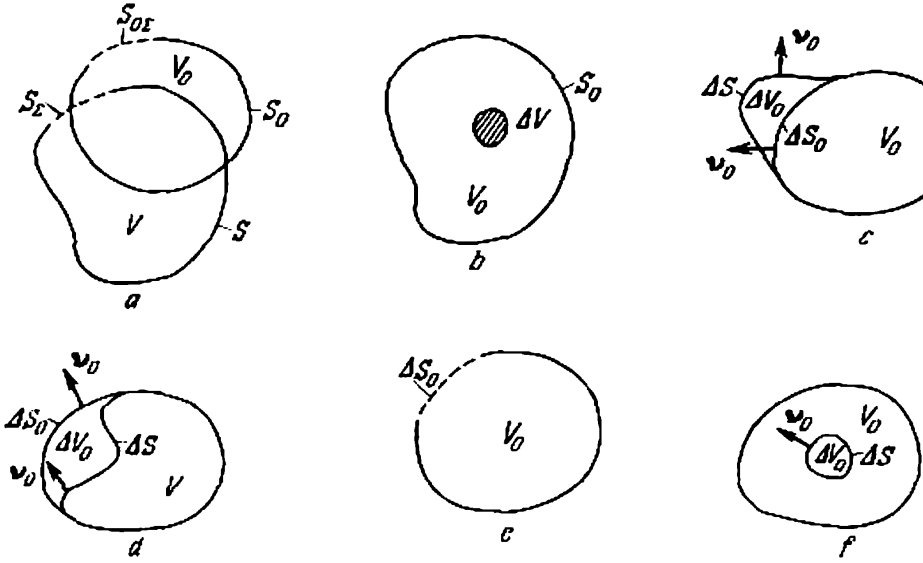


Fig. 75.1.

dinadas a las ecuaciones de Maxwell). Unificando las igualdades (75.2) y (75.3), se halla

$$i \oint_{S_0} \{[\dot{E}^*_{m0},\ \dot{H}_m] + [\dot{E}_m,\ \dot{H}^*_{m0}]\}\,ds = -i \int_{V_0} (\dot{j}^{ex*}_{m0} \dot{E}_m + \dot{j}^{ex}_m \dot{E}^*_{m0})\,dv +$$

$$+ \dot{\omega} \int_{V_0} (\Delta\dot{\varepsilon} \dot{E}_m \dot{E}^*_{m0} + \Delta\dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}^*_{m0})\,dv + \Delta\dot{\omega} \int_{V_0} (\mu_0 \dot{H}_m \dot{H}^*_{m0} + \varepsilon_0 \dot{E}_m \dot{E}^*_{m0})\,dv, \qquad (75.4)$$

siendo $\Delta\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} - \varepsilon_0$, $\Delta\dot{\mu} = \dot{\mu} - \mu_0$ y $\Delta\dot{\omega} = \dot{\omega} - \omega_0$.

2. Oscilaciones libres. Vamos a considerar un resonador de cavidad con cubierta idealmente conductora; en este caso, el problema perturbado diverge del inicial por el carácter del medio interior: la permitividad y la permeabilidad magnética reciben en cierta parte ΔV del volumen V_0 incrementos $\Delta\dot{\varepsilon}$ y $\Delta\dot{\mu}$ (fig. 75.1, *b*) (es posible que por todo el volumen: $\Delta V = V_0$). Suponiendo que en la (75.4)

$S_{0\tau} = 0$, $\dot{j}^{ex}_{m0} = 0$ y $\dot{j}^{ex}_{m} = 0$, se halla que

$$\frac{\Delta\dot{\omega}}{\dot{\omega}} = -\frac{\int\limits_{\Delta V} (\Delta\dot{\varepsilon}\dot{E}_m\dot{E}^*_{m0} + \Delta\dot{\mu}\dot{H}_m\dot{H}^*_{m0})\,dv}{\int\limits_{V_0} (\mu_0\dot{H}_m\dot{H}^*_{m0} + \varepsilon_0\dot{E}_m\dot{E}^*_{m0})\,dv} \qquad (75.5)$$

($\Delta\dot{\varepsilon} = 0$ y $\Delta\dot{\mu} = 0$ fuera de ΔV; la integral superficial se elimina, ya que para $S_{0\tau} = 0$ en toda la superficie de separación S_0 no hay componente eléctrica tangencial de ambos campos).

Sea, a continuación, que la perturbación consiste en que en la cubierta del resonador S_0 ha aparecido un orificio ΔS_0 (fig. 75.1, *e*) o bien, que la cubierta está deformada (fig. 75.1, *c*, *d*); en tal caso, ΔS_0 será la posición inicial de la frontera en el lugar de la deformación. Suponiendo que en la (75.4) $\dot{j}^{ex}_{m0} = \dot{j}^{ex}_{m} = 0$, $S_{0\tau} = 0$, $\Delta\dot{\varepsilon} = 0$ y $\Delta\dot{\mu} = 0$, hallamos que

$$\Delta\dot{\omega} = i\frac{\int\limits_{\Delta S_0} [\dot{E}_m, \dot{H}^*_{m0}]\,ds}{\int\limits_{V_0} (\mu_0\dot{H}_m\dot{H}^*_{m0} + \varepsilon_0\dot{E}_m\dot{E}^*_{m0})\,dv} \qquad (75.6)$$

($\dot{E}_{m0\tau} = 0$ por toda la superficie de separación S_0).

Para el caso de deformación de la frontera no es difícil verificar la transformación de la fórmula (75.6). Nótese, previamente, que *la correlación del tipo (75.2) se puede escribir tomando en* lugar de V_0 el volumen ΔV_0 de la deformación acotado por la superficie $\Delta S_0 + \Delta S$ y, si esto es necesario, considerando las funciones $\dot{E}_{m0}$ y $\dot{H}_{m0}$ prolongadas. Si, como en la (75.6), tomamos como positiva la normal exterior a la S_0, esto nos da que

$$i\int\limits_{\Delta S_0} [\dot{E}_m, \dot{H}^*_{m0}]ds = \pm\dot{\omega}\int\limits_{\Delta V_0} \mu_0\dot{H}_m\dot{H}^*_{m0}\,dv \pm \omega_0\int\limits_{\Delta V_0} \varepsilon_0\dot{E}_m\dot{E}^*_{m0}\,dv, \qquad (75.7)$$

donde el signo superior corresponde al aumento y el inferior, a la disminución del volumen V_0 durante la deformación (fig. 75.1, *c*, *d*). Así pues, la integral de superficie en el numerador de la (75.6) puede ser sustituida, en virtud de la (75.7), por una combinación de integrales de volumen.

Al ser necesario investigar la influencia de un cuerpo idealmente conductor ΔV_0 que se ubica en el interior de V_0 (fig. 75.1, *f*), se puede hacer uso del resultado obtenido más arriba para el caso de la deformación de la cubierta con disminución del volumen ("curvatura hacia el interior").

3. *Ondas libres.* *Ahora tomemos una guía de ondas hueca infi*nita. Primeramente, la perturbación va a consistir en la variación longitudinalmente homogénea del medio interior (digamos, al situar en el interior un vástago dieléctrico coaxial). Al considerar un

segmento de la guía de ondas, vamos a destacar el volumen V_0 limitado por las secciones transversales $S_{\perp 1}$ y $S_{\perp 2}$ (fig. 75.2, *a*). En este caso, $\dot{j}^{ex}_{m0} = \dot{j}^{ex}_{m} = 0$, $S_{0\Sigma} = S_{\perp 1} + S_{\perp 2}$ y, para cualquiera de las ondas libres,

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{m0} &= \dot{\mathcal{E}}_0 e^{-i\dot{\Gamma}_0 z}, \\ \dot{H}_{m0} &= \dot{\mathcal{H}}_0 e^{-i\dot{\Gamma}_0 z}, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{E}_{m} &= \dot{\mathcal{E}} e^{-i\dot{\Gamma} z}, \\ \dot{H}_{m} &= \dot{\mathcal{H}} e^{-i\dot{\Gamma} z}. \end{aligned}\right\}$$

Claro está que también $\Delta\dot{\omega} = 0$.

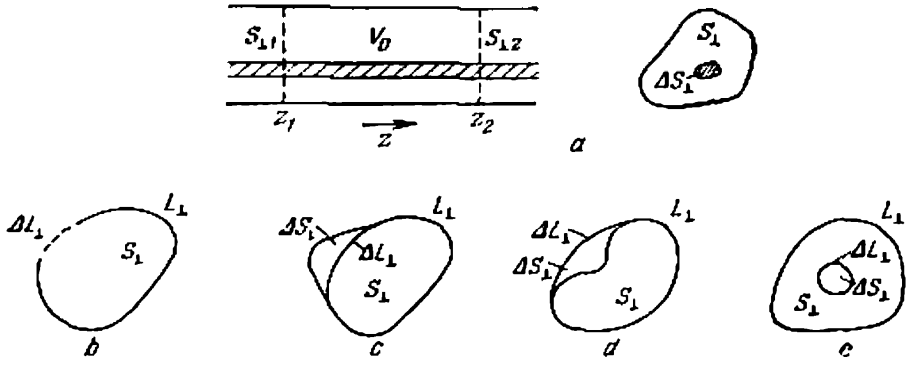


Fig. 75.2.

Las integrales en la (75.4) se transforman del modo siguiente:

$$i \oint_{S_0} \{[\dot{E}^*_{m0}, \dot{H}_m] + [\dot{E}_m, \dot{H}^*_{m0}]\}\, ds =$$

$$= i\left[e^{-i(\dot{\Gamma}^* - \Gamma_0) z_2} - e^{-i(\dot{\Gamma} - \Gamma_0) z_1}\right] \int_{S_\perp} [\dot{\mathcal{E}}^*_0, \dot{\mathcal{H}}] + [\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{H}}^*_0]\, z_0\, ds$$

($S_\perp$ es una sección transversal arbitraria de la guía de ondas) y

$$\dot{\omega} \int_V (\Delta\dot{\varepsilon}\dot{E}_m\dot{E}^*_{m0} + \Delta\dot{\mu}\dot{H}_m\dot{H}^*_{m0})\, dv =$$

$$= \omega \int_{z_1}^{z_2} e^{-i(\dot{\Gamma}^* - \Gamma_0) z} dz \int_{S_\perp} (\Delta\dot{\varepsilon}\dot{\mathcal{E}}\dot{\mathcal{E}}^*_0 + \Delta\dot{\mu}\dot{\mathcal{H}}\dot{\mathcal{H}}^*_0)\, ds =$$

$$= \omega \frac{e^{-i(\dot{\Gamma}^* - \Gamma_0) z_2} - e^{-i(\dot{\Gamma} - \Gamma_0) z_1}}{-i(\dot{\Gamma} - \Gamma_0)} \int_{\Delta S_\perp} (\Delta\dot{\varepsilon}\dot{\mathcal{E}}\dot{\mathcal{E}}^*_0 + \Delta\dot{\mu}\dot{\mathcal{H}}\dot{\mathcal{H}}^*_0)\, ds$$

(fuera de $\Delta S_\perp$, $\Delta\dot{\varepsilon} = 0$ y $\Delta\dot{\mu} = 0$). Por esta razón, de la (75.4) obtenemos que

$$\Delta\dot{\Gamma} = \omega \frac{\int_{\Delta S_\perp} (\Delta\dot{\varepsilon}\dot{\mathcal{E}}\dot{\mathcal{E}}^*_0 + \Delta\dot{\mu}\dot{\mathcal{H}}\dot{\mathcal{H}}^*_0)\, ds}{\int_{S_\perp} \{[\dot{\mathcal{E}}^*_0, \dot{\mathcal{H}}] + [\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{H}}^*_0]\}\, z_0\, ds} \qquad (75.8)$$

siendo $\Delta\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma} - \Gamma_0$.

Si la perturbación es debida a un corte en forma de ranura o bien a la deformación de la cubierta de la guía de ondas, que sigue siendo homogénea longitudinalmente (fig. 75.2, *b*, *c*, *d*), será válida la correlación

$$\Delta\dot{\Gamma} = -i \frac{\int\limits_{\Delta L_\perp} [\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{H}}_0^*] \nu_0 \, dl}{\int\limits_{S_\perp} \{[\dot{\mathcal{E}}_0^*, \dot{\mathcal{H}}] + [\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{H}}_0^*]\} z_0 \, ds} \qquad (75.9)$$

(compárese con (75.5)). Dejamos que el lector deduzca las fórmulas (75.9) en calidad de ejercicios [1].

4. Aplicación de la teoría de perturbaciones. La fórmula (75.5) y los posteriores resultados de la teoría de perturbaciones son correlaciones exactas, pero junto con magnitudes conocidas, contienen las amplitudes complejas de los vectores del campo perturbado, aún desconocidas. Sólo en el caso, cuando podemos hacer suposiciones fidedignas sobre dicho campo, las indicadas fórmulas son prácticamente aplicables y, además, como aproximadas: por lo general, esto sucede cuando las perturbaciones son pequeñas.

Primeramente, hagamos ciertas deducciones cualitativas. Sea que en un resonador hueco se introduce un pequeño cuerpo dieléctrico. Entonces, la frecuencia propia ω_0 recibe un incremento insignificante (de ordinario, complejo), de forma que $\Delta\dot{\omega}/\dot{\omega} \approx \Delta\dot{\omega}/\omega_0$; en la cavidad, el campo se deforma localmente y en el denominador de la (75.5), donde la integración se produce por todo el volumen, se podrá despreciar la diferencia entre el campo perturbado y el inicial, haciendo $\dot{\boldsymbol{E}}_m = \dot{\boldsymbol{E}}_{m0}$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m = \dot{\boldsymbol{H}}_{m0}$. Esto nos lleva a la fórmula aproximada

$$\frac{\Delta\dot{\omega}}{\omega_0} \approx -\frac{\int\limits_{\Delta V} (\Delta\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m\dot{\boldsymbol{E}}_{m0}^* + \Delta\dot{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_m\dot{\boldsymbol{H}}_{m0}^*)\, dv}{\int\limits_{V_0} (\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}_{m0}\dot{\boldsymbol{E}}_{m0}^* + \mu_0\dot{\boldsymbol{H}}_{m0}\dot{\boldsymbol{H}}_{m0}^*)\, dv}. \qquad (75.10)$$

El denominador es positivo y, por esto, el numerador nos indica el carácter de las variaciones de la frecuencia propia. Supongamos que $\Delta\dot{\varepsilon} = \Delta\varepsilon > 0$ es una magnitud escalar real (el medio es isótropo; la absorción, despreciable) y $\Delta\dot{\mu} = 0$. Podemos adivinar que $\dot{\boldsymbol{E}}_m\dot{\boldsymbol{E}}_{m0}^*$ es positivo. Así pues, la frecuencia propia ω_0 disminuirá: $\Delta\omega < 0$. Es evidente que el incremento de frecuencia será infinitamente pequeño ("imperceptible") si el campo perturbador resulta encontrarse en el "nodo" del campo eléctrico.

---

[1] Los detalles aquí omitidos, así como resultados más complejos de la teoría de perturbaciones, se exponen en [1.3].

Análogas consideraciones nos llevan de las fórmulas (75.6), (75.7) a la fórmula aproximada

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{\pm \int\limits_{\Delta V_0} \varepsilon_0 \dot{E}_m \dot{E}^*_{m0}\, dv \mp \int\limits_{\Delta V_0} \mu_0 \dot{H}_m \dot{H}^*_{m0}\, dv}{\int\limits_{V_0} (\varepsilon_0 \dot{E}_{m0} \dot{E}^*_{m0} + \mu_0 \dot{H}_{m0} \dot{H}^*_{m0})\, dv}, \qquad (75.11)$$

que se emplea al apreciar la influencia de las deformaciones de la cubierta del resonador y al situar en su interior cuerpos metálicos (los signos superiores corresponden al aumento del volumen, los inferiores, a su disminución). De aquí, por ejemplo, se puede llegar a la conclusión de que la introducción de un metal o la curvatura de la cubierta hacia el interior de la región donde predomina el campo magnético, provocarán, con suficiente pequeñez de la perturbación, el aumento de la frecuencia propia, mientras que al predominar el campo eléctrico, su disminución. La curvatura de la cubierta *hacia el exterior* provoca las variaciones inversas.

Más adelante se exponen varios ejemplos del cálculo de $\Delta\omega$.

Tomemos un resonador cilíndrico de sección cualquiera (fig. 75.3, a); en caso particular, puede ser un cilindro corriente (circular) (fig. 75.3, *b*) o bien un paralelepípedo (fig. 75.3, *c*). Sea que ciertas oscilaciones del tipo H se perturban al introducir en el "vientre" del campo eléctrico una capa dieléctrica transversal de grosor h. Considerando que la capa es *muy fina* y *teniendo en cuenta* la continuidad del vector $\boldsymbol{E}$ en la superficie de separación del dieléctrico (no habiendo componente normal), identifiquemos los campos inicial y perturbado en el interior de la capa. El numerador de la (75.10) toma la forma:

$$-\int\limits_{\Delta V} (\Delta\dot{\varepsilon} \dot{\boldsymbol{E}}_m \dot{\boldsymbol{E}}^*_{m0} + \Delta\dot{\mu} \dot{\boldsymbol{H}}_m \dot{\boldsymbol{H}}^*_{m0})\, dv \approx -\Delta\dot{\varepsilon} h \int\limits_{S_\perp} E^2_{m0}\Big|_{máx}\, ds.$$

Luego calculemos el *denominador*:

$$\int\limits_{V_0} (\varepsilon_0 \dot{\boldsymbol{E}}_{m0} \dot{\boldsymbol{E}}^*_{m0} + \mu_0 \dot{\boldsymbol{H}}_{m0} \dot{\boldsymbol{H}}^*_{m0})\, dv = 2\varepsilon_0 \int\limits_{V_0} E^2_{m0}\, dv =$$

$$= 2\varepsilon_0 \int\limits_{S_\perp} \int\limits_0^L E^2_{m0}\Big|_{máx} \operatorname{sen}^2 \frac{p\pi z}{L}\, ds\, dz = \varepsilon_0 L \int\limits_{S_\perp} E^2_{m0}\Big|_{máx}\, ds$$

y obtenemos

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx -\frac{h}{L} \frac{\Delta\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0}, \qquad (75.12)$$

donde la magnitud $\dot{\varepsilon}$ *que está incluida en* $\Delta\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} - \varepsilon_0$ *es la constante dieléctrica de la capa.*

Consideremos la perturbación del campo principal E_{110} de un resonador rectangular por un cilindro dieléctrico de poco grosor (fig. 75.3, *d*) que se sitúa en el "vientre" del campo eléctrico, de modo paralelo al vector $\boldsymbol{E}$.

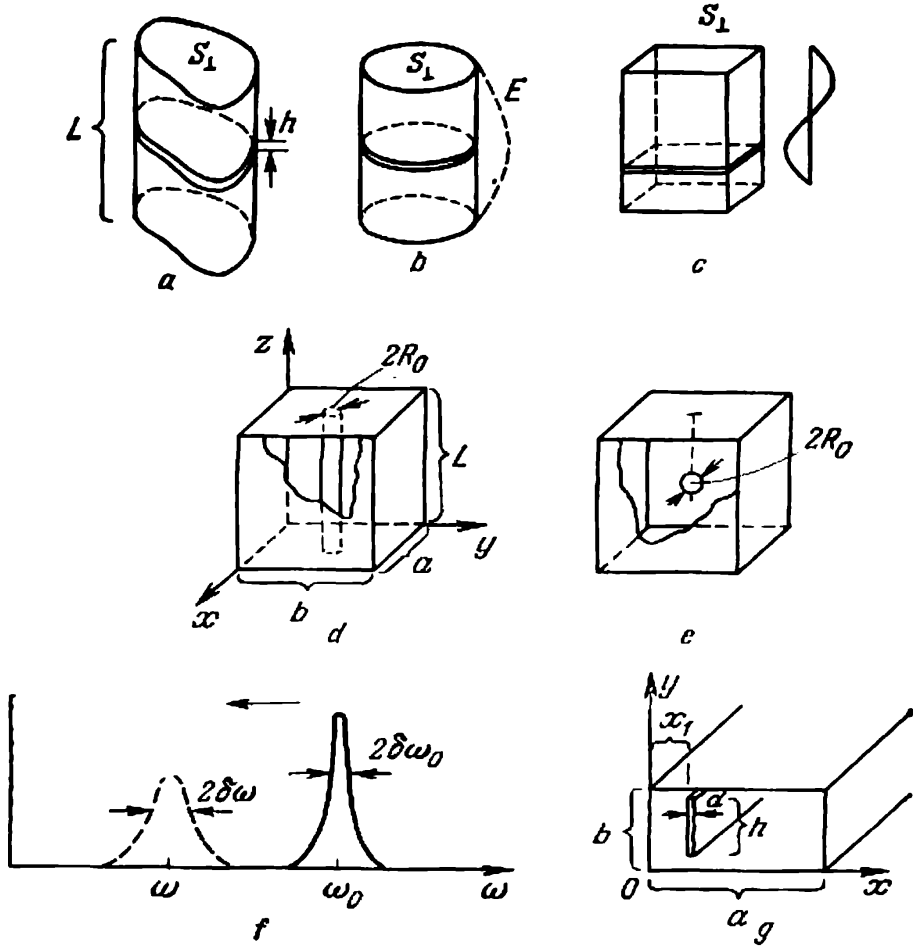


Fig. 75.3.

Al mismo tiempo

$$-\int_{\Delta V}(\Delta\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m\dot{\boldsymbol{E}}^*_{m0}+\Delta\dot{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_m\dot{\boldsymbol{H}}^*_{m0})\,dv\approx-\Delta\dot{\varepsilon}\pi R_0^2 L\dot{E}^2_{m0}\Big|_{\max},$$

$$\int_{V_0}(\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}_{m0}\dot{\boldsymbol{E}}^*_{m0}+\mu_0\dot{\boldsymbol{H}}_{m0}\dot{\boldsymbol{H}}^*_{m0})dv=2\varepsilon_0\int_{V_0}\dot{E}^2_{m0}\,dv=$$

$$=2\varepsilon_0\int_0^a\int_0^b\int_0^L E^2_{m0}\Big|_{\max}\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}^2\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy\,dz=\varepsilon_0\frac{abL}{2}\,E^2_{m0}\Big|_{\max},$$

de forma que

$$\frac{\Delta\dot{\omega}}{\omega_0} \approx -\frac{2\pi R_0^3}{ab}\frac{\Delta\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0}. \qquad (75.13)$$

Sea que ahora como cuerpo perturbador se emplea una esfera dieléctrica (fig. 75.3, *e*). Indiferentemente de su pequeñez, en el caso dado no podemos ya considerar que en el dieléctrico el campo perturbado no se diferencia del inicial. Sin embargo, con una pequeñez suficiente del cuerpo perturbador, puede darnos buen resultado la llamada "aproximación cuasiestacionaria", gracias a la cual la correlación entre el campo interior perturbado y el campo inicial en esta región es la misma que al situar la esfera en un campo electrostático homogéneo (§ 20, punto 3). Entonces (compárese con el § 50, punto 4),

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \frac{3\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}+2\varepsilon_0}\dot{\boldsymbol{E}}_{m0} \text{ en } \Delta V \qquad (75.14)$$

y el numerador de la (75.10) toma el aspecto

$$-\int_{\Delta V}(\Delta\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m\dot{\boldsymbol{E}}^*_{m0} + \Delta\dot{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_m\dot{\boldsymbol{H}}^*_{m0})\,dv \approx -\Delta\dot{\varepsilon}\frac{4\pi R_0^3\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}+2\varepsilon_0}E^2_{m0}\Big|_{\text{máx}},$$

así que

$$\frac{\Delta\dot{\omega}}{\omega_0} \approx -\frac{8\pi R_0^3}{abL}\frac{\Delta\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}+2\varepsilon_0}. \qquad (75.15)$$

Las fórmulas (75.12), (75.13), (75.15) y las semejantes a ellas, después de dividir las partes real e imaginaria, se descomponen en dos correlaciones: $\Delta\omega' = f_1(\varepsilon', \varepsilon'')$ y $\Delta\omega'' = f_2(\varepsilon', \varepsilon'')$, siendo en los casos sencillos

$$\frac{\Delta\omega'}{\omega_0} \approx -F\frac{\Delta\varepsilon'}{\varepsilon_0} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta\omega''}{\omega_0} \approx F\frac{\varepsilon''}{\varepsilon_0},$$

siendo F el "factor de forma", coeficiente que depende sólo de la configuración del sistema. Tomando en cuenta la relación entre ω'' y Q (69.28), así como la igualdad (71.15), a la que ahora es más oportuno darle la forma $Q = 2\delta\omega/\omega_0$, escribimos:

$$\frac{\Delta\omega''}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}\Delta\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right) = \frac{\Delta\delta\omega}{\omega_0}.$$

Aquí, $\Delta\delta\omega$ es el incremento de la mitad de la anchura de la curva de resonancia [1]. Podemos decir que al introducir en el resonador un cuerpo dieléctrico se produce la desviación y ensanchamiento

[1] El factor de calidad teórico del estado inicial es infinito (no se tuvo en cuenta la absorción ni en el dieléctrico, ni en la cubierta conductora), así pues, debería ser: $\Delta\delta\omega = \delta\omega$. Pero aquí se sobreentiende la aplicación de los resultados a resonadores reales, lo que es totalmente legítimo, hasta que es válido el principio de aditividad de las pérdidas pequeñas.

de la curva de resonancia para cada uno de los tipos de oscilaciones (fig. 75.3, *f*). Este efecto, a veces, se utiliza para la medición de la constante dieléctrica compleja de las materias (es decir, de las magnitudes ε' y ε''). De manera análoga puede medirse la magnitud $\dot{\mu}$. Proponemos que el lector confeccione por su cuenta el correspondiente ejemplo y que calcule la desviación de la frecuencia $\Delta\dot{\omega}$ que, en virtud de la (75.10), sólo depende de $\Delta\dot{\mu}$.

Hay que tener en cuenta que la acción del cuerpo perturbador puede ser más complicada que la deformación "independiente" de los campos de diferentes oscilaciones propias en estado inicial. Las oscilaciones que como resultado de las perturbaciones han degenerado, pueden recibir diferentes incrementos de las frecuencias propias, mientras que los campos perturbados se presentan en forma de las superposiciones de los campos iniciales deformados: la perturbación liga a los tipos de oscilaciones. En este caso, el empleo de la fórmula (75.10) en cierto grado se complica. En lo que se refiere a la fórmula (75.11), su aplicación para verificar apreciaciones cuantitativas es muy limitada. Por lo general, se supone que $\dot{E}_m = \dot{E}_{m0}$ y $\dot{H}_m = \dot{H}_{m0}$, pero esto sólo raramente lleva al cálculo satisfactorio de $\Delta\dot{\omega}$.

En conclusión, consideremos un ejemplo de guía de ondas. Una guía de ondas rectangular se perturba por una placa dieléctrica fina (fig. 75.3, *g*); es preciso hallar el incremento de la constante de propagación de la onda H_{10}. Tomando la fórmula (75.8), escribimos:

$$\int_{S_\perp} \{[\dot{\mathcal{E}}_0^*, \dot{\mathcal{H}}] + [\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{H}}_0^*]\}\, z_0\, ds \approx 2 \int_{S_\perp} [\dot{\mathcal{E}}_0, \dot{\mathcal{H}}_0^*]_z\, ds =$$

$$= \frac{2}{W^H} \int_{S_\perp} \dot{\mathcal{E}}_0^2\, ds = \frac{2}{W^H} \int_0^a \int_0^b \dot{\mathcal{E}}_0^2 \Big|_{\text{máx}} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{a}\, dx\, dy = \frac{ab}{W^H} \dot{\mathcal{E}}_0^2 \Big|_{\text{máx}}$$

y

$$\omega \int_{\Delta S_\perp} (\Delta\dot{\varepsilon}\, \dot{\mathcal{E}}\, \dot{\mathcal{E}}_0^* + \Delta\dot{\mu}\, \dot{\mathcal{H}}\, \dot{\mathcal{H}}_0^*)\, ds \approx \omega \Delta\dot{\varepsilon}\, dh\, \dot{\mathcal{E}}_0^2 \Big|_{\text{máx}} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x_1}{a}.$$

De este modo,

$$\Delta\dot{\Gamma} \approx \frac{dh}{ab}\, \omega W^H \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x_1}{a}\, \Delta\dot{\varepsilon},$$

o bien

$$\frac{\Delta\dot{\Gamma}}{\Gamma_0} \approx \frac{dh}{ab}\, \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi x_1}{a}}{1 - (\lambda/2a)^2}\, \frac{\Delta\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0}. \qquad (75.16)$$

La teoría de perturbaciones puede también difundirse a los transformadores de guía de ondas; por ejemplo, existen fórmulas que permiten calcular los incrementos de los elementos de matriz de dispersión al perturbarse el sistema.

Los resultados de la teoría de perturbaciones son de forma sencilla y, por esta causa, cómodos. Sin embargo, debido a la pequeñez de los efectos que se consideran, la rama de su aplicación es relativamente estrecha.

§ 76. Algoritmos generales para sistemas irregulares

1. Planteamiento del problema. Resonadores. Los resonadores, sistemas de guía de ondas y otros dispositivos análogos reales siempre son, en su total, irregulares. Frecuentemente, dichas irregularidades son muy considerables en comparación con los sistemas regulares que se analizan fácilmente. La teoría general sobre los sistemas irregulares se basa en el empleo de los métodos de proyección (Suplemento 8, punto 4). En la actualidad, dicha teoría abarca, prácticamente, todos los problemas de electrodinámica aplicada; aquí, los resultados tienen la forma de algoritmos universales adaptados para resolver clases enteras de problemas y que deben encontrar su realización en computadoras electrónicas. En el presente manual no es posible exponer todas las cuestiones de esta rama con la totalidad debida [1] y vamos sólo a limitarnos a aclarar los principios generales.

Detengámonos en el método para confeccionar un algoritmo universal para la clase de problemas sobre un resonador con todo género de inclusiones interiores. Supongamos que el resonador sin inclusiones ha sido ya estudiado; sea éste cualquier resonador regular (en la fig. 76.1, *a* se ha representado, para mayor precisión, un resonador rectangular), de modo que son conocidos los sistemas de funciones propias $\{\boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{E}_{n'}\}$ y $\{\boldsymbol{H}_n, \boldsymbol{H}_{n'}\}$ (§ 71, puntos 2, 3, 6). Es necesario hallar los campos y las frecuencias propias del resonador habiendo cualesquiera inclusiones.

Haciendo uso del método de proyección, representemos las amplitudes complejas del campo $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ que investigamos, en forma de las sumas

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^{N} &= \sum_{n=1}^{N} a_n \boldsymbol{E}_n + \sum_{n'=1}^{N'} a_{n'} \boldsymbol{E}_{n'}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^{N} &= \sum_{n=1}^{N} b_n \boldsymbol{H}_n + \sum_{n'=1}^{N'} b_{n'} \boldsymbol{H}_{n'} \end{aligned} \qquad (76.1)$$

(compárese con las series (71.3)). Para $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ que están subordinadas a las ecuaciones homogéneas de Maxwell, son válidas las

[1] Ellas están detalladamente expuestas en [1. 3].

correlaciones [1]

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{V-V_M}(\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}}_m-i\dot{\omega}\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m)\,\dot{\boldsymbol{E}}^*_{k^{(\prime)}}dv=0,\\&\int\limits_{V-V_M}(\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{E}}_m+i\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_m)\,\dot{\boldsymbol{H}}^*_{k^{(\prime)}}dv=0\end{aligned}\right\}\quad k^{(\prime)}=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty \qquad (76.2)$$

(la integración se verifica por el volumen interior del resonador, restando el volumen ocupado por los cuerpos metálicos que se toman como conductores ideales). Estas son las correlaciones de

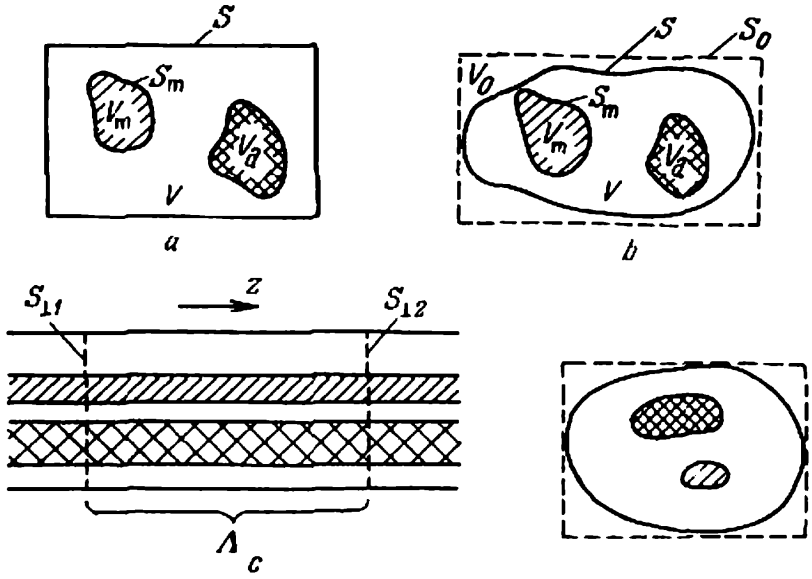


Fig. 76.1.

proyección del tipo (S8.15) (compárese con las (71.9)). Después de aplicar la fórmula (S1.31), obtenemos que

$$\left.\begin{aligned}0=&\int\limits_{V-V_M}\dot{\boldsymbol{H}}_m\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{E}}^*_{k^{(\prime)}}dv-i\dot{\omega}\int\limits_{V-V_M}\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m\dot{\boldsymbol{E}}^*_{k^{(\prime)}}dv-\\&-\int\limits_{S_M}[\dot{\boldsymbol{E}}^*_{k^{(\prime)}},\ \dot{\boldsymbol{H}}_m]\,d\boldsymbol{s},\\0=&\int\limits_{V-V_M}\dot{\boldsymbol{E}}_m\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}}^*_{k^{(\prime)}}dv+i\dot{\omega}\int\limits_{V-V_M}\dot{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_m\dot{\boldsymbol{H}}^*_{k^{(\prime)}}dv,\\&k^{(\prime)}=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty.\end{aligned}\right\} \qquad (76.3)$$

[1] En las (76.2) el símbolo $k^{(\prime)}$ significa que se tienen en cuenta dos casos, en uno de los cuales se toma k y en el segundo, k'. Más adelante la raya entre paréntesis cerca de cualquier símbolo tiene un sentido análogo.

Aquí, en lugar de $\dot{\boldsymbol{E}}_m$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m$ tenemos derecho de introducir sus representaciones $\dot{\boldsymbol{E}}_m^N$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m^N$, limitando la selección de los índices $k^{(\prime)}$ en los límites de la base escogida ($k^{(\prime)} = 1, 2, \ldots, N^{(\prime)}$); en señal de que ya se trata de una solución aproximada, también vamos a escribir $\dot{\omega}^N$ en lugar de $\dot{\omega}$ (designación de las frecuencias aproximadas). De este modo, llegaremos a las correlaciones del tipo (S8.18).

Es cómodo supeditar las funciones básicas a la ortonormalización (71.8) para $|\dot{\varepsilon}| = \varepsilon_0$ y $|\dot{\mu}| = \mu_0$; de acuerdo con esto en las ecuaciones de Maxwell (71.4) $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0$ y $\dot{\mu} = \mu_0$ (no hay que confundir estas constantes con la permitividad y la permeabilidad magnética *del medio en el interior del resonador que investigamos* y que están incluidas en las (76.3)). Introduciendo en las integrales las sumas (76.1), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones que, a continuación, se escribe en forma de matrices:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}^N(Ua + U'a') - (\Omega\hat{M} + iS)b - (\Omega\hat{M}' + iS')b' &= 0, \\ \dot{\omega}^N({}'Ua + {}'U'a') - i'Sb + i'S'b' &= 0, \\ \Omega\hat{U}a + \Omega\hat{U}'a' - \dot{\omega}^N(Mb + M'b') &= 0, \\ {}'Mb + {}'M'b' &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (76.4)$$

Aquí, a y a' son vectores confeccionados de los coeficientes a_n y $a_{n'}$ de las sumas (76.1) respectivamente; un sentido análogo tienen los vectores b y b'. Las matrices que componen las (76.4) constan de los siguientes elementos:

$$\hat{U}_{kn}^{(\prime)} = \varepsilon_0 \int\limits_{V-V_M} \boldsymbol{E}_n^{(\prime)} \boldsymbol{E}_k^* dv; \quad \hat{M}_{kn}^{(\prime)} = \mu_0 \int\limits_{V-V_M} \boldsymbol{H}_n^{(\prime)} \boldsymbol{H}_k^* dv; \qquad (76.5)$$

$${}^{(\prime)}U_{kn}^{(\prime)} \int\limits_{V-V_M} \varepsilon \boldsymbol{E}_n^{(\prime)} \boldsymbol{E}_k^{(\prime)} dv; \quad {}^{(\prime)}M_{kn}^{(\prime)} = \int\limits_{V-V_M} \mu \boldsymbol{H}_n^{(\prime)} \boldsymbol{H}_k^{(\prime)} dv; \qquad (76.5)$$

$${}^{(\prime)}S_{kn}^{(\prime)} = \int\limits_{S_M} [\boldsymbol{E}_k^{(\prime)}, \boldsymbol{H}_n^{(\prime)}] ds; \quad \Omega_{kn} = \omega_n \delta_{kn}.$$

Por ejemplo, $U_{kn} = \int\limits_{V-V_M} \dot{\varepsilon} \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{E}_k^* dv$, *etc. La permitividad* $\dot{\varepsilon}$ *y la* permeabilidad magnética $\dot{\mu}$ son funciones de las coordenadas (posiblemente, tensores); en particular, en la fig. 76.1, *a*, se supone que *ellas tienen ciertos valores constantes en el interior de* V_D *y otros,* fuera de él. La matriz Ω es diagonal; está compuesta por las frecuencias propias ω_n del resonador vacío.

La solución del sistema homogéneo (76.4) conduce a la definición de *una serie de valores propios aproximados de* $\dot{\omega}^N$ (como las raíces de una ecuación característica, obtenida al reducir a cero el determinador del sistema) y los coeficientes de las representaciones

(76.1). A medida que aumenta el orden de las matrices, estos valores y coeficientes se aproximan a los valores exactos y tienden a ellos en el límite, cuando $N \to \infty$.

El sistema (76.4) se conserva al investigar un resonador que, además, se distingue por su complicada cubierta, es decir, es irregular incluso sin las inclusiones interiores (fig. 76.1, *b*). En tal caso, para obtener el (76.4) el resonador se sitúa mentalmente en una región regular (la frontera a trazos en la fig. 76.1, *b*) que nos dota la base. En comparación con lo anterior, la diferencia va a constar en que las matrices ${}^{(')}S^{(')}$ en las (76.4), ahora, tienen los elementos

$$ {}^{(')}S^{(')}_{kn} = \int\limits_{S_M + S} [\dot{\boldsymbol{E}}^{*(')}_k, \boldsymbol{H}_n{}^{(')}]\, d\boldsymbol{s}, \qquad (76.6) $$

donde la integración también se difunde a la cubierta del resonador. La matriz Ω se confecciona de las frecuencias de base.

Claro está que además de las ecuaciones (76.4), hay otras formas algebraicas a las que llevan los métodos de proyección y, aquí, nos referimos a sus ventajas e insuficiencias para el cálculo en comparación con las (76.4).

Si se consideran las oscilaciones forzadas de un resonador irregular para manantiales definidos, entonces, el método de proyección se desarrolla de la misma manera que en el § 71, punto 4. En este caso, se obtiene un sistema de ecuaciones cuyo primer miembro coincide con el (76.4); en cuanto al segundo miembro, él puede ser escrito directamente partiendo de las correlaciones (71.11); naturalmente, en lugar de $\dot{\omega}^N$ tendremos la frecuencia dada de excitación prefijada ω. Recomendamos que el lector copie este sistema de ecuaciones.

2. Guías de ondas y transformadores de guía de ondas. Conclusión. Si se exige determinar la constante de propagación de cierta onda de una guía de ondas transversalmente no regular, se puede destacar una región volumétrica limitada por dos secciones transversales $S_{\perp 1}$ y $S_{\perp 2}$ y representar el campo interior en forma de las sumas de tipo (76.1). Sea la longitud del segmento destacado igual a $\Lambda = 2\pi/\Gamma$ (fig. 76.1, *c*) (magnitud incógnita). Como bases, en lugar de $\{\boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{E}_{n'}\}$ y $\{\boldsymbol{H}_n, \boldsymbol{H}_{n'}\}$, tomemos un sistema de funciones que satisfaga la ecuación de Helmholtz y las condiciones límites anteriores en la superficie lateral de la guía de ondas (o bien la región básica auxiliar, fig. 76.1, *d*), pero con dependencia longitudinal $e^{-i\frac{2\pi}{\Lambda}z}$; tales funciones toman en $S_{\perp 1}$ y $S_{\perp 2}$ iguales valores, o sea, están sumidas a condiciones límites "periódicas" (según z). Podemos convencernos con facilidad de que para el planteamiento dado del problema nuevamente retornaremos al sistema de ecuaciones algebraicas (76.4), en las que en lugar de $\dot{\omega}^N$ se dará la frecuencia ω, mientras que los elementos matriciales (76.5) (salvo ${}^{(')}S^{(')}_{kn}$) se reducirán a las integrales respecto a la sección

transversal de la guía de ondas (sustrayendo el área de un vástago metálico introducido, si él se encuentra en la guía de ondas), multiplicadas por la desconocida longitud de onda $\Lambda = \Lambda^N$ que puede, también, ser compleja. De forma análoga, los elementos matriciales ${}^{(\cdot)}S_{kn}^{(\cdot)}$ se reducen a integrales de contorno.

Consideremos, seguidamente, un transformador de guía de ondas arbitrario (fig. 76.2, *a*); en diferencia del § 74, las secciones de

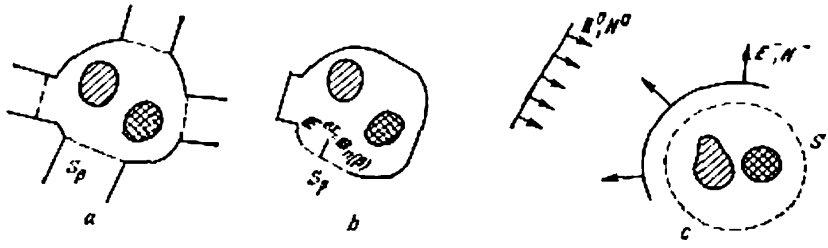


Fig. 76.2.

entrada no deben obligatoriamente encontrarse en las regiones de régimen regular. Se plantean las condiciones de cortocircuito

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{m(\alpha)} &= 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \beta - 1, \beta + 1, \ldots, P, \\ \dot{E}_{m(\beta)} &= e_{n(\beta)} \end{aligned}\right\} \qquad (76.7)$$

(compárese con las (74.2)), entonces, según las (73.12), (73.13), para cualquier sección de entrada S_α (en caso particular cuando $\alpha = \beta$) $b_{k(\alpha)} = Y_{kn}^{\alpha\beta}$. Sea $\dot{H}_m^{\beta n}$ la amplitud compleja del vector H en el interior de la cavidad obtenida para el cortocircuito indicado (fig. 76.2, *b*) y excitada de acuerdo con la condición (76.7) a través del orificio S_β por un campo exterior ($\dot{E}_m^{ex} = e_{n(\beta)}$). Entonces, en virtud de (73.11) y (73.12)

$$Y_{kn}^{\alpha\beta} = b_{k(\alpha)} = |\dot{W}_{k(\alpha)}| \int\limits_{S_\alpha} \dot{H}_m^{\beta n} h_{k(\alpha)}^{*} ds \quad (\dot{H}_m^{\beta n} = \dot{H}_{m(\alpha)} \text{ en } S_\alpha). \qquad (76.8)$$

Así pues, cualquier elemento de la matriz de admitancia del transformador de guía de ondas puede ser definido por la fórmula (76.8), al ser conocida la solución del problema de la excitación del resonador para el planteamiento indicado. Esta solución o más exactamente, la representación que converge con ella por término medio, se obtiene de la forma que se indicó anteriormente en el punto 1. Hay que subrayar que para hacer uso de la fórmula (76.8) es necesario que la representación también converja por término medio en la cubierta del resonador. Precisamente, tal propiedad tiene la representación en la base $\{H_n, H_{n'}\}$. Si se exigiera hallar de modo análogo los elementos de la matriz de resistencia, habría que representar el campo eléctrico en las secciones de entrada, lo que es posible en una diferente base (en el caso de la base $\{E_n, E_{n'}\}$

tendrá lugar sólo la convergencia por término medio en el volumen del resonador). Existen también las posibilidades de confeccionar algoritmos universales que nos permitirán definir directamente la matriz de dispersión.

Es curioso que el método descrito con anterioridad puede también emplearse para obtener algoritmos universales para los problemas exteriores de electrodinámica, de antenas y difracción. La antena o el objeto de difracción se rodea mentalmente por una frontera esférica (fig. 76.2, *c*) que juega el papel de sección de entrada de un "transformador de guía de ondas"; el espacio circundante se define como un canal de guía de ondas por el que se propagan ondas esféricas de diferentes tipos. El sistema que consideramos se caracteriza totalmente por la matriz de admitancia, resistencia o bien de dispersión del indicado transformador de guía de ondas. El campo de radiación o dispersión se halla como la superposición de las ondas esféricas divergentes. Como vemos, el problema exterior de electrodinámica se reduce a una serie de problemas sobre la excitación de un resonador esférico con una inclusión en forma de la antena u objeto de difracción que investigamos. También es posible la definición directa de la matriz de dispersión de la antena u objeto de difracción.

3. **Conclusión.** Remarquemos otra vez que la obtención de las enunciaciones más ventajosas desde un punto de vista de cálculo, no era el objetivo de lo expuesto anteriormente. Fue sólo mostrado un enfoque general para los problemas de electrodinámica que nos lleva a la confección de algoritmos para las computadoras electrónicas universales. Además, es extremadamente característico, un enfoque único para resolver los problemas interiores y exteriores de electrodinámica. En general, se puede demostrar que un problema de antena o difracción es el problema interior de contorno para la región esférica mostrada en la fig. 76.2, *c*, en cuya frontera han sido prefijadas unas condiciones de impedancia del tipo general (una "interpretación de impedancia" [1]).

La siguiente observación está relacionada con el cálculo de variación. El lector que conozca esta rama de las matemáticas puede tomar en consideración que las ecuaciones (76.4) y las análogas a ellas, pueden ser obtenidas según el método de Ritz, basándose en las correspondientes funcionales.

Pueden también considerarse como funcionales ("función de funciones") las fórmulas (62.9), (62.13), (69.16). El valor inferior de χ^2 o bien de k_0^2 siempre puede ser obtenido, sustituyendo en una de dichas fórmulas las funciones vectoriales que no sean soluciones de las ecuaciones de electrodinámica, sino que sólo permitan verificar las operaciones exigidas. En tal caso, son válidas para susti-

---

[1] V. V. Nikolski, Radiotecnia y electrónica 16, № 7, 1120; № 8, 1342 (1971).

tuir en la (62.13) y en la segunda fórmula (69.16) (con $\dot{H}_m$) funciones que no satisfacen las condiciones límites. Es natural que la exactitud del resultado depende de la proximidad de dichas funciones "tolerables" a las soluciones reales.

V. Sistemas *periódicos* y cuasiópticos

Sin considerar los sistemas de guiado *periódicos*, es decir, aquellos que constan de elementos estructurales que se repiten, la representación de los procesos ondulatorios dirigidos sería incompleta. Tal tipo de sistemas encuentran múltiples aplicaciones, en particular, en electrónica de frecuencias superelevadas (de hiperfrecuencias) y en la técnica de las antenas. Hablando en rigor, la teoría de ondas guiadas expuesta en los §§ 61—68 ya no puede ser aplicada, *ya que las propiedades de los sistemas no quedan constantes en* la dirección de transmisión de energía, es decir, los sistemas no son homogéneos en sentido longitudinal. Sin embargo, cuando el período espacial $\dot{\Lambda}$ es suficientemente pequeño, el proceso ondulatorio, con gran aproximación, aparece como una onda guiada habitual (§ 61), *cuya longitud es mucho mayor que* $\dot{\Lambda}$. *Como veremos*, los sistemas periódicos nos dan uno de los medios para obtener tales ondas *lentas* (§ 62, punto 4).

Sistemas periódicos especiales se emplean para canalizar ondas extremadamente cortas. Dichos sistemas pueden considerarse como un conjunto de lentes o espejos. Esta propia descripción prevé que las dimensiones de los elementos supera considerablemente la longitud de onda; con mayor razón, lo dicho es justo en lo que se *refiere a la distancia entre distintos elementos por separado* (próxima al período espacial). Tales sistemas se denominan *cuasiópticos*.

Nuestra tarea no contiene el objetivo de describir todos los posibles sistemas electrodinámicos que tienen el carácter de lentes o espejos y que, por lo tanto, pueden ser tomados como cuasiópticos. En lo general, estos suelen ser antenas o elementos de antena que se estudian en los cursos de la teoría de antenas. Sin embargo, además de los periódicos, van a ser también estudiados tales sistemas *cuasiópticos que juegan el papel de resonadores de cavidad* y que se emplean en la técnica de los láseres.

§ 77. Sistemas periódicos y superficies de impedancia

1. Procesos ondulatorios en los sistemas periódicos. En la fig. 77.1 se muestran varios sistemas, cuya estructura es periódica a lo largo del eje z; a una distancia igual a $\dot{\Lambda}$ dicha estructura se repite.

Supongamos que no hay absorción. A causa de la simetría, la estructura transversal de los campos libres en los sistemas periódicos debe repetirse cada dos períodos $\mathring{\Lambda}$. Sin embargo, tomando dos secciones transversales distanciadas a $\mathring{\Lambda}$, no debemos obligatoriamente encontrar allí iguales fases de las oscilaciones. Pero, si el

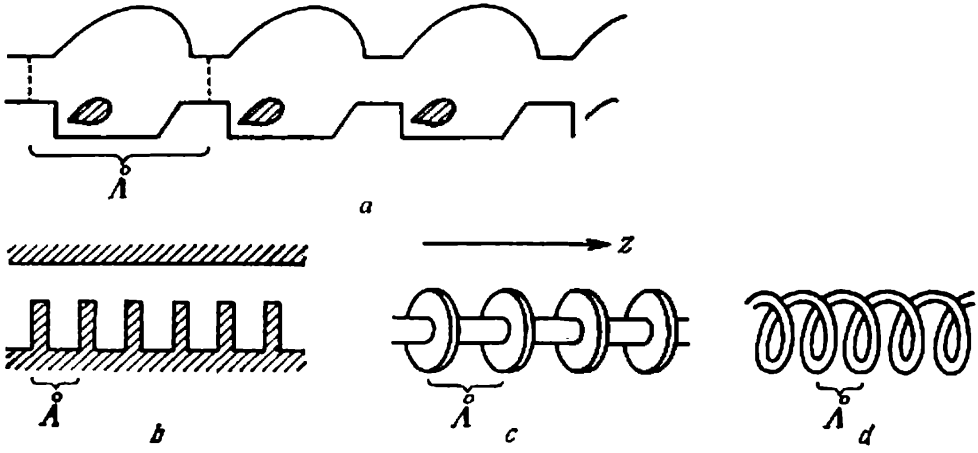


Fig. 77.1.

respectivo desfasaje es igual a φ, durante el posterior desplazamiento a $n\,\mathring{\Lambda}$, el desfasaje complementario será $n\varphi$. En general, para las amplitudes complejas de los vectores del campo, son válidas las correlaciones

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z+\mathring{\Lambda}) &= \dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z)\, e^{-i\varphi}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m(x, y, z+\mathring{\Lambda}) &= \dot{\boldsymbol{H}}_m(x, y, z)\, e^{-i\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{77.1}$$

En ocasiones, dicen que estas igualdades expresan el contenido del *teorema de Floquer*.

Antes de hallar la solución de un problema concreto de electrodinámica sobre uno u otro sistema periódico, es natural, que no podemos decir por qué ley varía la fase del campo a lo largo de su segmento arbitrario de longitud $\mathring{\Lambda}$, es decir, de acuerdo con la terminología establecida, a lo largo de la *célula* de la estructura. Pero hay un procedimiento que permite hacer ciertas deducciones respecto al carácter del campo. Introduzcamos la magnitud

$$\gamma = \varphi/\mathring{\Lambda} \tag{77.2}$$

y confeccionemos las funciones

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{E}}(x, y, z) &= \dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z)\, e^{i\gamma z}, \\ \dot{\mathfrak{H}}(x, y, z) &= \dot{\boldsymbol{H}}_m(x, y, z)\, e^{i\gamma z}, \end{aligned}\right\} \tag{77.3}$$

las que, como se desprende de (77.1), son periódicas, de manera que, por ejemplo, $\dot{\mathfrak{E}}(x, y, z+\mathring{\Lambda}) = \dot{\mathfrak{E}}(x, y, z)$. Desarrollando $\dot{\mathfrak{E}}(x,y,z)$

en una serie de Fourier del tipo (S8.1), se tiene

$$\dot{\mathcal{E}}(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathcal{E}}_n(x, y) e^{-i\frac{2\pi n}{\Lambda} z},$$

$$\dot{\mathcal{E}}_n(x, y) = \frac{1}{\Lambda} \int_z^{z+\Lambda} \dot{\mathcal{E}}(x, y, z) e^{i\frac{2\pi n}{\Lambda} z} dz =$$

$$= \frac{1}{\Lambda} \int_z^{z+\Lambda} \dot{E}_m(x, y, z) \cdot e^{i\left(\gamma + \frac{2\pi n}{\Lambda}\right) z} dz. \quad (77.4)$$

Así pues, en virtud de la (77.3),

$$\dot{E}_m(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathcal{E}}_n(x, y) e^{-i\left(\gamma + \frac{2\pi n}{\Lambda}\right) z} \quad (77.5)$$

y del mismo modo podemos representar la amplitud compleja $\dot{H}_m$.

El desarrollo obtenido es una de las principales correlaciones de la teoria de los sistemas periódicos de guiado. Según la (77.5), *un proceso ondulatorio libre en un sistema periódico, puede ser* considerado como la superposición de un conjunto infinito de ondas planas homogéneas con distribuciones transversales $\dot{\mathcal{E}}_n(x, y)$ (y $\dot{\mathcal{H}}_n(x, y)$) con constantes de propagación,

$$\Gamma_n = \gamma + \frac{2\pi n}{\Lambda}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty. \quad (77.6)$$

Como de aqui se desprende, a estas ondas parciales son propias las velocidades de fase (§ 61, punto 1)

$$v_{f(n)} = \frac{\omega}{\Gamma_n} = \frac{\omega}{\gamma + \frac{2\pi n}{\Lambda}} \quad (77.7a)$$

con *una misma* velocidad de grupo (§ 35, véase también el § 62, punto 3)

$$v_{g(n)} = \frac{d\omega}{d\Gamma_n} = \frac{d\omega}{d\gamma}, \quad (77.7b)$$

que caracteriza la transmisión de energia.

En dependencia de la magnitud n en la (77.6), las velocidades de fase $v_{f(n)}$ de las ondas parciales (77.7a) que, generalmente, se *denominan "armónicas espaciales", tienen diferentes signos.* De este modo, el proceso ondulatorio en el sistema periódico se representa en forma del conjunto de ondas *directas* ($v_f/v_g > 0$) e *inversas* ($v_f/v_g < 0$); estas últimas tienen la propiedad de que las velocidades de fase y de grupo son contrarias.

¿Qué sentido tiene el desarrollo confeccionado? Para cada una de las coordenadas $x = x_1$ e $y = y_1$ fijadas, en la (77.4) obtenemos

una serie de Fourier de cierta función z, prefijada en el segmento $(z, z+\mathring{\Lambda})$ que converge en ella (de ordinario, sólo por término medio). La función que se desarrolla y las armónicas espaciales están determinadas en aquellas regiones donde no hay campo. Por ejemplo, para las coordenadas fijadas en la fig. 77.2 x_1, y_1, en forma de la serie de Fourier se representa una función igual a $\delta(x_1, y_1, z)$ en l_2 e igual a cero en l_1 y l_3. En la región rayada en la fig. 77.2, la serie de Fourier está determinada y converge a cero.

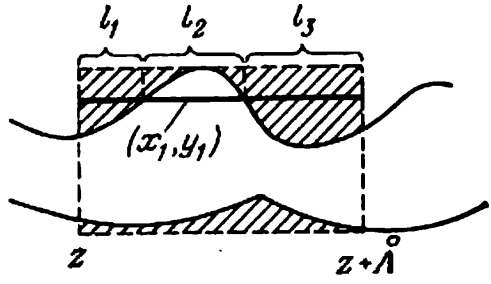


Fig. 77.2.

El contenido físico de las armónicas espaciales se halla en que en la región donde existe el campo se puede (por lo menos en principio) realizar la interacción con una de ellas, empleando para esto, por ejemplo, electrones con la velocidad necesaria [1].

Por fin, señalemos que todo lo anterior puede, con facilidad, difundirse a los sistemas con absorción. Para esto, en las (77.1) y más adelante, hay que considerar que φ es complejo.

2. Sistema periódico más sencillo. En la fig. 77.3, *a* está representada una sencilla "estructura en peine" que ha sido concebida en forma de una serie de bandas paralelas, idealmente conductoras,

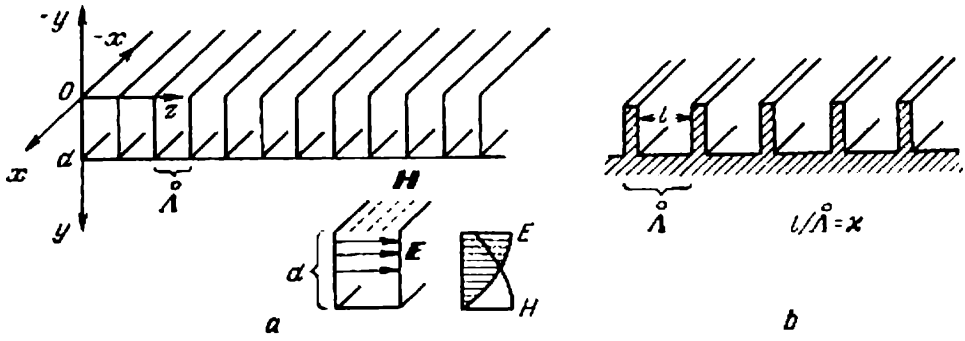


Fig. 77.3.

cuyo grosor se desprecia y que son adyacentes a una banda igual a las primeras que es la frontera; el sistema es ilimitado en los sentidos z y x y por x es homogéneo.

Si el período de la estructura es extremadamente pequeño en comparación con la longitud de onda en un mismo medio homogéneo ($\mathring{\Lambda} \ll \lambda$), puede esperarse que también será pequeño con relación a la longitud de onda del primer armónico principal $\mathring{\Lambda}_0 = 2\pi/\Gamma_0$.

[1] Sobre las partículas cargadas en el campo electromagnético se tratará más adelante (§ 80).

Al cumplirse esta condición, nos da resultados satisfactorios el siguiente enfoque.

Estudiando una onda del tipo E que se propaga a lo largo del eje z, vamos a considerar que el campo en cada una de las ranuras del peine en la dirección y tiene el carácter de una onda estacionaria del tipo TEM. Para expresarlo podemos emplear directamente las fórmulas (36.17) sustituyendo, respectivamente, las coordenadas (compárense las figs. 36.1 y 36.5 con la fig. 77.3, *a*), es decir, $z \to y-d$, $x \to z$, $y \to x$. Así pues, con la aproximación dada y para cada z fijada

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= -iz_0 2\dot{A} \operatorname{sen} k(y-d), \\ \dot{H}_m &= x_0 \frac{2\dot{A}}{W} \cos k(y-d), \end{aligned}\right\} 0 \leqslant y \leqslant d, \qquad (77.8)$$

mientras que la superficie del peine ($y=0$) puede caracterizarse por la impedancia $\dot{z}_S$ (62.30):

$$\dot{E}_m(0) = \dot{z}_S[\dot{H}_m(0), \dot{y}_0]; \quad \dot{z}_S = \frac{\dot{E}_m(0)}{\dot{H}_m(0)} = iW \operatorname{tg} kd. \qquad (77.9)$$

Como fue mostrado en el § 62, punto 4, si $\operatorname{tg} kd > 0$ la *superficie de impedancia* dada es capaz de guiar la onda lenta E, cuyo campo, en virtud de las (62.28)—(62.30) y (61.1), tendrá las siguientes componentes

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= \dot{B}\dot{z}_S e^{\beta y} e^{-i\Gamma z}, \\ \dot{H}_{mx} &= \dot{B} e^{\beta y} e^{-i\Gamma z}, \end{aligned}\right\} y \leqslant 0 \qquad (77.10)$$

(así como la componente $\dot{E}_{my}$ que proponemos al lector que la halle). Igualando las componentes tangenciales en las (77.10) y (77.8) para $y=0$, se halla que en las (77.8)

$$\dot{A} = -i \frac{\dot{B}\dot{z}_S}{2 \operatorname{sen} kd} e^{-i\Gamma z}, \quad (e^{-i\Gamma z} \approx e^{-i\Gamma(z+\mathring{\Delta})}). \qquad (77.11)$$

De acuerdo con las (62.26), la constante de propagación Γ es igual a

$$\Gamma = \sqrt{k^2+\beta^2} > k, \qquad (77.12)$$

y, en virtud de las (77.9) y (62.30), tenemos que

$$\frac{\beta}{k} = \operatorname{tg} kd > 0 \qquad (77.13)$$

y, seguidamente, teniendo en cuenta la (77.12)

$$\Gamma/k = \sec kd, \qquad (77.14)$$

o bien

$$\frac{v_f}{v} = \cos kd \; (v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}). \qquad (77.14a)$$

Vemos que la onda puede existir para $0 < d < \lambda/4$, a continuación, para $\lambda/2 < d < 3\lambda/4$, etc. Su retardo y carácter superficial aumentan en cada una de estas bandas al crecer d/λ y, seguidamente la onda sufre corte.

Podemos decir que la solución simplificada que hemos estudiado toma un valor medio por z. Efectivamente, al emplear tal procedimiento en relación a la serie (77.4), sólo queda la parte no periódica $\dot{\mathcal{E}}_0(x, y)$.

En adelante, el principio de mediación nos permite de modo sencillo llegar al análisis de la estructura en peine con nervios de grosor finito (fig. 77.3, *b*). Se supone que para las ranuras sigue siendo válida la fórmula (77.9), mientras que en las caras laterales, idealmente conductores, $\dot{Z}_S = 0$ ($E_z(0) = 0$). Por esto la impedancia mediada, es igual a

$$\dot{Z}_S = i\varkappa W \operatorname{tg} kd, \qquad (77.15)$$

siendo $\varkappa = l/\Lambda$ la relación entre el ancho de la ranura y el periodo de la estructura (fig. 77.3, *b*). Esta magnitud, en lugar de la (77.9), se introduce en las posteriores correlaciones, así que, por ejemplo, en lugar de (77.13), se obtiene

$$\beta/k = \varkappa \operatorname{tg} kd. \qquad (77.16)$$

A pesar de que el enfoque empleado anteriormente para estudiar estructuras en peine (fig. 77.3, *a*, *b*) es bastante basto, lleva a *representaciones cualitativas fidedignas* e incluso, en ciertos casos, resulta ser útil en cálculos técnicos. En esencia, con esto, el peine se asemeja a una capa dieléctrica ubicada en un plano idealmente conductor (§ 39, punto 4, fig. 3.97, *b*), cuya frontera es *una superficie de impedancia*, mientras la propia capa es una guia de ondas dieléctrica del más sencillo tipo. Incluso podemos considerar que el peine es una capa de un "dieléctrico artificial" (véase más abajo el § 82, punto 1) y caracterizarlo por medio de la constante dieléctrica equivalente.

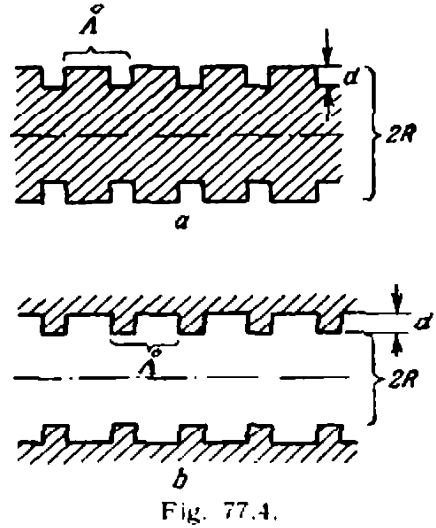


Fig. 77.4.

Proponemos al lector estudiar por su cuenta un sistema en forma de peine apantallado (fig. 77.1, *b*).

3. Sistemas de simetría axial. En la fig. 77.4 se muestran esquemáticamente dos sistemas periódicos con sección transversal circular y superficie en peine (ondulada); uno de ellos (fig. 77.4, *a*) abierto y el segundo (77.4, *b*), apantallado. El primer sistema es análogo a la guia de ondas dieléctrica con conductor interior,

estudiado en el § 77, punto 3: como capa dieléctrica se emplea la parte ondulada del conductor.

Representando, con la anterior aproximación, una onda azimutalmente homogénea del tipo E guiada por un vástago ondulado (fig. 77.4, *a*), para el campo exterior debemos obtener una expresión de las amplitudes complejas del tipo (67.23), es decir,

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= E_0\left[z_0 H_0^{(2)}(\dot{\chi}r) + r_0\frac{i\Gamma}{\dot{\chi}}H_1^{(2)}(\dot{\chi}r)\right]e^{-i\Gamma z},\\ \dot{H}_m &= \alpha_0 E_0\frac{i\omega\varepsilon}{\dot{\chi}}H_1^{(2)}(\dot{\chi}r)\,e^{-i\Gamma z}, \end{aligned}\right\} r > R. \qquad (77.17)$$

Si la profundidad de las ranuras es relativamente pequeña ($d \ll R$), entonces, la superficie del cilindro puede localmente considerarse como una superficie de impedancia para la que la fórmula (77.15) es válida, de manera que

$$\frac{\dot{E}_{mz}(R)}{\dot{H}_m(R)} = i\varkappa W \operatorname{tg} kd \qquad (77.18)$$

(compárese con la (67.14) y las siguientes). Igualando la (77.18) a la impedancia que se desprende de las (77.17), obtenemos la ecuación transcendente

$$-\varkappa kR \operatorname{tg} kd = \dot{\chi}R\frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}R)} \qquad (77.19)$$

que recomendamos comparar con (67.22) y (68.8).

Cuando el sistema está apantallado (fig. 77.4, *b*), entonces, suele denominarse "guía de ondas con aletas radiales", en lugar de las (77.17), tendremos

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_m &= E_0\left[z_0 J_0(\dot{\chi}r) + r_0\frac{i\Gamma}{\dot{\chi}}J_1(\dot{\chi}r)\right]e^{-i\Gamma z},\\ H_m &= \alpha_0 E_0\frac{i\omega\varepsilon}{\dot{\chi}}J_1(\dot{\chi}r)\,e^{-i\Gamma z}, \end{aligned}\right\} r < R, \qquad (77.20)$$

mientras que en vez de la (77.18), una correlación con signo contrario (si antes al aplicar las (62.30) $\nu_0 = -r_0$, en el caso dado, $\nu_0 = r_0$). De este modo, se obtiene la ecuación

$$\varkappa kR \operatorname{tg} kd = \dot{\chi}R\frac{J_0(\dot{\chi}R)}{J_1(\dot{\chi}R)} \qquad (77.21)$$

(compárese con la (68.10)).

Por último, pasemos a estudiar el llamado "guía de ondas en hélice" (fig. 77.1, *d* 77.5, *a*). Al verificar su descripción más sencilla, se supone que a lo largo del conductor de la espiral (es decir, por una línea helicoidal) se propaga una onda TEM con su velocidad habitual $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Entonces la velocidad de fase del

proceso ondulatorio en la dirección del eje del sistema, es igual a

$$v_f = v \operatorname{sen} \gamma \tag{77.22}$$

(fig. 77.5, *a*); el "ángulo de arrollamiento" γ, es el ángulo formado por el conductor con el plano $z = \text{const}$ ($\operatorname{tg} \gamma = d/2\pi R$).

Como modelo satisfactorio de una guía de ondas en hélice se toma, frecuentemente, un cilindro con conductibildad anisotrópica (fig. 77.5, *b*), en el que la corriente en cada uno de sus puntos sólo puede tener una dirección igual a la que es propia de la corriente de la espira que pasa en esta región. Investiguemos en este sistema una onda azimutalmente homogénea.

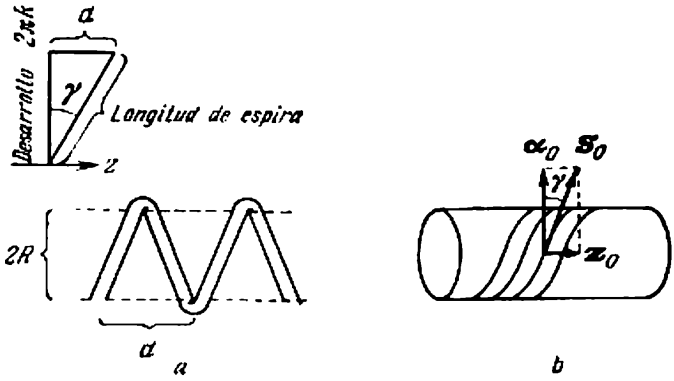


Fig. 77.5.

Haciendo uso de las expresiones (67.1), se escribe:

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \begin{cases} \dot{C}_1 J_0(\dot{\chi} r), & r < R; \\ \dot{C}_1' H_0^{(2)}(\dot{\chi} r), & r > R; \end{cases} \qquad \dot{\mathcal{H}}_z = \begin{cases} \dot{C}_2 J_0(\dot{\chi} r), & r < R; \\ \dot{C}_2' H_0^{(2)}(\dot{\chi} r), & r > R, \end{cases} \tag{77.23}$$

siendo $\dot{\chi} = \sqrt{k^2 - \Gamma^2}$. Con ayuda de las fórmulas (61.9) determinamos las componentes azimutales (compárese con (67.5)):

$$\dot{\mathcal{E}}_\alpha = \begin{cases} -i\dot{C}_2 \dfrac{\omega\mu}{\dot{\chi}} J_1(\dot{\chi} r), & r < R, \\ -i\dot{C}_2' \dfrac{\omega\mu}{\dot{\chi}} H_1^{(2)}(\dot{\chi} r), & r > R, \end{cases}$$

$$\dot{\mathcal{H}}_\alpha = \begin{cases} i\dot{C}_1 \dfrac{\omega\varepsilon}{\dot{\chi}} J_1(\dot{\chi} r), & r < R, \\ i\dot{C}_1' \dfrac{\omega\varepsilon}{\dot{\chi}} H_1^{(2)}(\dot{\chi} r), & r > R. \end{cases} \tag{77.24}$$

Las componentes tangenciales del vector $\boldsymbol{E}$ deben ser continuas en la superficie del cilindro (para $r = R$); teniendo esto en cuenta en (77.23) y (77.24), se tiene

$$\dot{C}_1' = \dot{C}_1 \frac{J_0(\dot{\chi} R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi} R)} \quad \text{y} \quad \dot{C}_2' = \dot{C}_2 \frac{J_1(\dot{\chi} R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi} R)}. \tag{77.25}$$

La conductibilidad anisotrópica del cilindro se manifiesta en que *la componente eléctrica paralela a la dirección de la corriente*, es igual a cero por ambos lados de su superficie (lo que corresponde a conductibilidad ideal del "canal de corriente"):

$$\dot{\mathcal{E}}_S(R-0)=\dot{\mathcal{E}}_S(R+0)=0 \qquad (77.26a)$$

mientras que la igual componente magnética es continua

$$\dot{\mathcal{H}}_S(R-0)=\dot{\mathcal{H}}_S(R+0) \qquad (77.26b)$$

(ésta no está ligada a la corriente superficial); señalemos inmediatamente que

$$s_0=\alpha_0\cos\gamma+z_0\operatorname{sen}\gamma \qquad (77.27)$$

(véase la fig. 77.5, *b*).

En virtud de la (77.27), a base de la condición (77.26b), teniendo en cuenta (77.23), (77.24), obtenemos

$$i\dot{C}_1\frac{\omega\varepsilon}{\dot{\chi}}J_1(\dot{\chi}R)\cos\gamma+\dot{C}_2J_0(\dot{\chi}R)\operatorname{sen}\gamma=$$
$$=i\dot{C}_1'\frac{\omega\varepsilon}{\dot{\chi}}H_1^{(2)}(\dot{\chi}R)\cos\gamma+\dot{C}_2'H_0^{(2)}(\dot{\chi}R)\operatorname{sen}\gamma,$$

es decir, que después de eliminar $\dot{C}_2'$ y $\dot{C}_1'$ por medio de las (77.25)

$$\dot{C}_2\dot{\chi}H_0^{(2)}(\dot{\chi}R)=i\dot{C}_1\omega\varepsilon H_1^{(2)}(\dot{\chi}R)\operatorname{cotg}\gamma. \qquad (77.28)$$

A continuación realizamos la condición (77.26a), debido a que

$$i\dot{C}_2\omega\mu J_1(\dot{\chi}R)\operatorname{cotg}\gamma=\dot{C}_1\dot{\chi}J_0(\dot{\chi}R). \qquad (77.29)$$

Las dos últimas igualdades conducen a la siguiente ecuación transcendente respecto al número de onda transversal $\dot{\chi}$ de la onda en un *sistema en hélice:*

$$\left(\frac{\dot{\chi}}{k}\right)^2=-\frac{J_1(\dot{\chi}R)\,H_1^{(2)}(\dot{\chi}R)}{J_0(\dot{\chi}R)\,H_0^{(2)}(\dot{\chi}R)}\operatorname{cotg}^2\gamma. \qquad (77.30)$$

Este es el resultado que necesitábamos

Retornemos a la sencilla fórmula (77.22) que escribimos inicialmente y, *ahora, tratemos de aclarar el grado de su aplicación.* Para una onda lenta $\dot{\chi}$ es puramente imaginario. Si en este caso $|\dot{\chi}R|\gg 1$, entonces, como se desprende de las representaciones asintóticas de las *funciones cilíndricas (Suplemento 6, punto 2)* su combinación en la (77.30) es próxima a la unidad, de modo que dicha ecuación toma el aspecto

$$\dot{\chi}\approx -ik\operatorname{cotg}\gamma. \qquad (77.30a)$$

Por esta razón

$$\Gamma=\sqrt{k^2-\dot{\chi}^2}\approx k^2\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\gamma}=\frac{k}{\operatorname{sen}\gamma},$$

lo que es equivalente a la (77.22). En virtud de la (77.30a) el empleo de la desigualdad $|\dot{\chi}R| \gg 1$ es equivalente a lo siguiente: $kR \gg \operatorname{tg}\gamma$. Al mismo tiempo, el modelo del sistema espiral en forma de un cilindro de conducción anisótropa tiene sentido mientras el periodo, o sea, el paso d de la espiral es pequeño en comparación con la longitud de onda $\Lambda = 2\pi/\Gamma$; teniendo en cuenta que $d = 2\pi R \operatorname{tg}\gamma$ y $\Gamma = k/\operatorname{sen}\gamma$, nos convencemos de la equivalencia de las desigualdades $d \ll \Lambda$ y $kR \ll 1$. Así pues, la fórmula (77.22) puede ser empleada, cuando

$$1 \gg kR \gg \operatorname{tg}\gamma. \qquad (77.31)$$

En conclusión remarquemos una singularidad de la onda azimutalmente homogénea de una guía de ondas en hélice. En diferencia de las ondas de dicha clase de diversos sistemas de guiado (§§ 67, 68) que podían ser sólo de los tipos E o H, la onda de la guía de ondas espiral tiene componentes longitudinales tanto eléctrica como magnética. Podemos decir que la espiral "liga", incluso, campos de los tipos E y H azimutalmente homogéneos.

§ 78. Sistemas cuasiópticos

1. Líneas de transmisión de lentes y espejos. Como ya dijimos, los sistemas periódicos, considerados anteriormente en el § 77, son, principalmente, un medio para obtener procesos ondulatorios lentos que se emplean en electrónica de frecuencias ultraelevadas, así como en la técnica de antenas. Sitio especial ocupan los sistemas periódicos creados al resolver el problema de la canalización de ondas electromagnéticas extremadamente cortas: milimétricas, submilimétricas y luminosas. La cuestión consiste en que incluso con ondas milimétricas, el empleo de sistemas de guiado longitudinalmente homogéneos resulta ser desventajoso a causa de la elevada absorción. Si, por ejemplo, en el caso de una guía de ondas circular se conserva la relación λ/R, como se desprende de las fórmulas (65.17)—(65.19), etc. el coeficiente de atenuación Γ''_m crece, al disminuir λ como $\mathcal{R}_s/R$, es decir, como $\lambda^{-3/2}$. En realidad Γ''_m crece con mayor rapidez, ya que las rugosidades de la superficie del metal (§ 73, punto 1) se manifiestan en mayor grado al disminuir la longitud de onda (la electroconductibilidad equivalente $\tilde{\sigma}$ en $\mathcal{R}_s = \sqrt{\omega\mu/2\tilde{\sigma}}$ disminuye). Esto quiere decir, que a medida que se pasa a ondas más cortas, hay que dar preferencia a aquellas líneas de transmisión que son capaces de guiar en el aire el flujo de energía electromagnética haciendo contacto mínimo con el metal, más aún que simultáneamente se facilita la realización práctica de semejantes dispositivos. Efectivamente, podemos con facilidad representar que a las exigencias requeridas satisface un sistema periódico de *lentes* o *espejos* (fig. 78.1, *a*—*e*), sin embargo, el propio concepto de lente o espejo

puede tener sólo sentido con dimensiones suficientemente grandes del objeto en comparación con λ, es decir, cercanas al límite de la óptica geométrica (§ 50, puntos 2 y 3). Los sistemas de esta clase se denominan *cuasiópticos*.

Un sistema de lentes de gran diámetro $2R$ puede transmitir un flujo de energía dentro de un canal de $d \ll 2R$ de anchura. Como

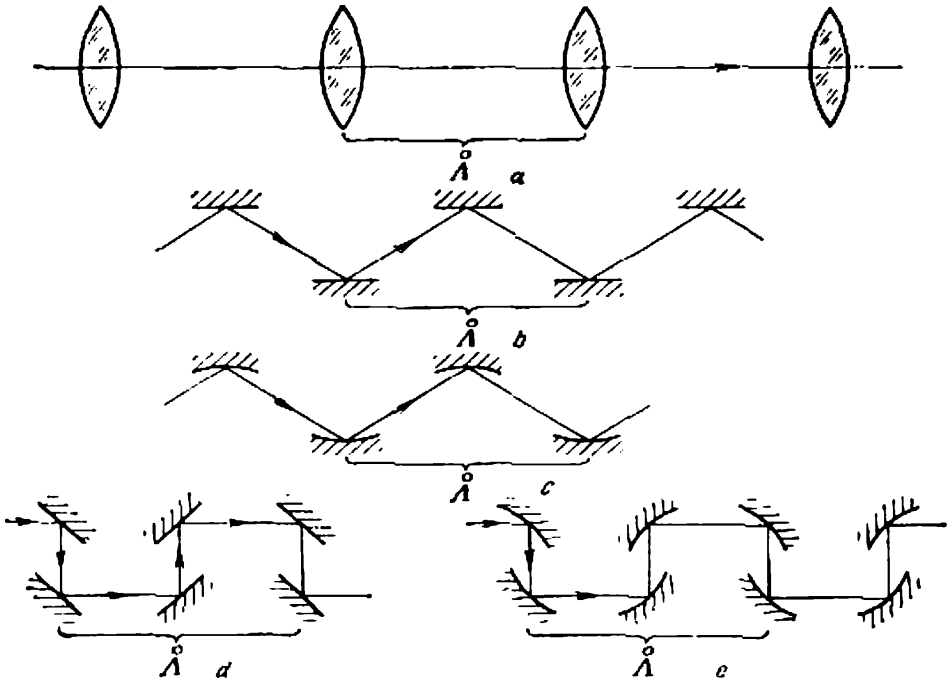


Fig. 78.1

en todo sistema periódico, en este caso se observa la condición (77.1), en la que φ puede considerarse como magnitud real, es decir, la célula cuasióptica, prácticamente, sólo provoca el desfasaje. En la aproximación a la óptica geométrica, el proceso se caracteriza por el cuadro mostrado en la fig. 78.2, *a* de los rayos en el espacio entre las lentes. Todos los rayos hacen contacto con cierta superficie (de trazos) que es la frontera del haz de rayos, y que se llama *cáustica*. En realidad, en la cáustica no hay caída brusca, hasta cero, de la intensidad del campo, sino que transcurre su disminución gradual, de tipo exponencial. Pero casi nunca las lentes son tan grandes. Generalmente se cumplen las desigualdades

$$R \gg \lambda \quad \text{y} \quad R \ll \lambda \tag{78.1}$$

de modo que todavía no está determinada la correlación de las magnitudes R^2 y $\lambda\lambda$ que pueden obtenerse multiplicando los miembros respectivos de las igualdades. Entretanto, si tomamos una de las lentes como abertura radiante, la magnitud $\sqrt{\lambda\lambda}$ será, en virtud

de la (54.10), ni más ni menos que el radio de la primera zona de Fresnel en la región de la segunda lente (adyacente). Está claro, que si la desigualdad $R^2 \gg \lambda\mathring{A}$ no se cumple, la lente puede no "interceptar" casi todo el flujo de energía dirigido a ella: la transmisión se acompañará de una considerable atenuación a causa de

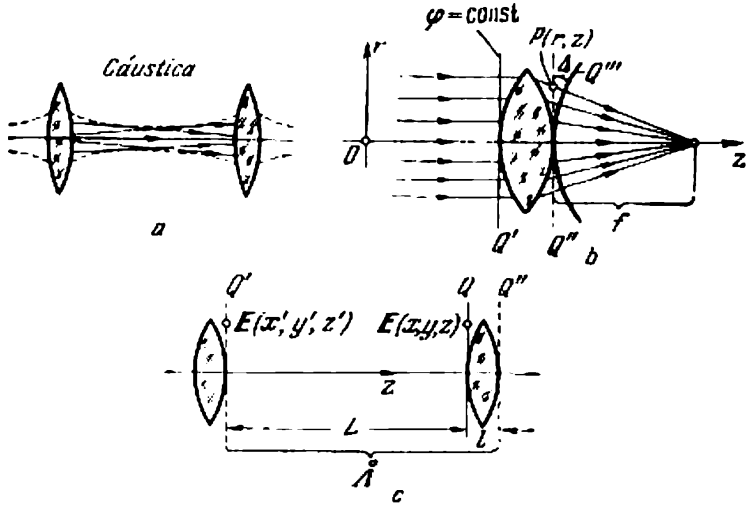


Fig. 78.2.

la radiación fuera de los límites de la línea de lentes, "pérdidas de radiación"; en este caso, en las correlaciones (77.1), φ es una magnitud compleja. Sin duda, desde el punto de vista de la óptica geométrica, dicho efecto de difracción no puede ser aclarado.

2. Teoría de la línea de lentes. Comencemos por considerar la acción de una lente como "corrector de fase"; esta cuestión particular puede tratarse desde el punto de vista de la óptica geométrica. Dado que en una lente de forma arbitraria incide un haz de rayos paralelos (fig. 78.2, *b*) que a causa de una conocida ley (§ 50, punto 3) converge tras de ella en el foco. ¿Cómo se distribuye la fase del campo en el plano Q'' (línea de trazos) tras de la lente? Encontramos la respuesta en la definición de la longitud Δ del segmento del rayo que une Q'' en el punto arbitrario $P(r, z)$ con el frente esférico Q''' que converge en el foco de la onda; hagamos que Q'' tenga contacto con Q''' (en el eje de la lente). Como se ve en la fig. 78.2, *b*

$$(\Delta + f)^2 = f^2 + r^2.$$

De aquí, despreciando Δ^2 en comparación con $2\Delta f$, se halla que

$$\Delta = r^2/2f.$$

Para determinar la fase en el punto $P(r, z)$ en Q'', es suficiente multiplicar esta magnitud por el número de onda del espacio exte-

rior k_0 y añadir la constante arbitraria φ_0:

$$\varphi = k_0 \frac{r^2}{2f} + \varphi_0. \tag{78.2}$$

Seguidamente, ya que en Q' la fase es constante, la fórmula obtenida expresa también la variación de fase del proceso ondulatorio que introduce la lente en los segmentos desde Q' a Q'' para diferentes r. El resultado es fidedigno para cualquier haz *paraxial* (cuando los rayos forman con el eje z pequeños ángulos). Podemos decir, que el campo de una línea de lentes es puro transversalmente ($E_z \approx 0$, $H_z \approx 0$). Si en el plano Q la amplitud compleja del vector $\boldsymbol{E}$ es igual a $\dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z)$ (fig. 78.2, *c*), entonces, en virtud de la (78.2), tras de la lente en Q''

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z+l) = \dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z)\, e^{-i\left(k_0 \frac{r^2}{2f} + \varphi_0\right)}. \tag{78.3}$$

Vamos a considerar el sector entre los planos Q' y Q haciendo uso del principio de Huygens: partiendo de la magnitud $\dot{\boldsymbol{E}}_m(x', y', z')$ definida en Q', determinaremos la magnitud $\dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z)$ en Q. En virtud de la (53.4)

$$d\dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z) = \frac{ik_0 \dot{\boldsymbol{E}}_m(x', y', z')}{4\pi}(1+\cos\vartheta_q)(\vartheta_{0q}\cos\alpha_q - \alpha_{0q}\operatorname{sen}\alpha_q)\frac{e^{-ik_0|r-r'|}}{|r-r'|}\,dx'\,dy'.$$

Empleando, a continuación, las mismas aproximaciones que en el § 54, punto 1, en lugar de la (54.1), se obtiene que

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z) = \frac{ik_0}{2\pi}\frac{\bar{e}^{ik_0 L}}{L}\int_{Q'} \dot{\boldsymbol{E}}_m(x', y', z')\, e^{-ik_0 \frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2L}}\,dx'\,dy' \tag{78.4}$$

siendo $z = z' + L$.

Ahora, obsérvese (fig. 78.2) que

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z+l) = \boldsymbol{E}_m(x, y, z' + \mathring{\Lambda}) \tag{78.5}$$

e imponemos la condición (77.1) que escribimos de la siguiente forma:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z' + \mathring{\Lambda}) = \dot{\varkappa}\dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z'), \quad \dot{\varkappa} = e^{-i\dot{\varphi}} \tag{78.6}$$

(tomando los valores complejos de $\varphi = \dot{\varphi}$). La unión de las fórmulas (78.3)—(78.6), da que

$$\dot{\varkappa}\dot{\boldsymbol{E}}_m(x, y, z') = \frac{ik_0}{2\pi L} e^{-i\left[k_0\left(L + \frac{r^2}{2f}\right) + \varphi_0\right]} \int_{Q'} \dot{\boldsymbol{E}}_m(x', y', z')\, e^{-ik_0 \frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2L}}\,dx'\,dy' \tag{78.7}$$

La amplitud compleja $\dot{E}_m$ como función de las coordenadas transversales, es una magnitud incógnita y el resultado obtenido (78.7) es ni más ni menos que la *ecuación integral*, a la que dicha magnitud está sometida. Con mayor exactitud, esta es la *ecuación integral de Fredholm de segundo orden* homogénea; es la enunciación del problema de los valores propios (compárese con la (S8.11))

$$\mathscr{L}\dot{E}_m = \dot{\varkappa}\dot{E}_m, \tag{78.7a}$$

siendo $\mathscr{L}$ el operador integral:

$$\mathscr{L}u(x, y) = \frac{ik_0}{2\pi L}\int\limits_{Q(\xi,\ \eta)} u(\xi, \eta)\, e^{-i\left[k_0\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{2L}+\psi\right]} d\xi\, d\eta, \tag{78.7b}$$

siendo $\psi = k_0\left(L + \frac{r^2}{2f}\right) + \varphi_0$.

El conjunto de las *funciones propias* de las ecuaciones (78.7) $\dot{E}_m = u_n$ que corresponden a los *valores propios* $\dot{\varkappa} = \dot{\varkappa}_n$, describe distintos *procesos ondulatorios libres*. Como puede ser aclarado, a la

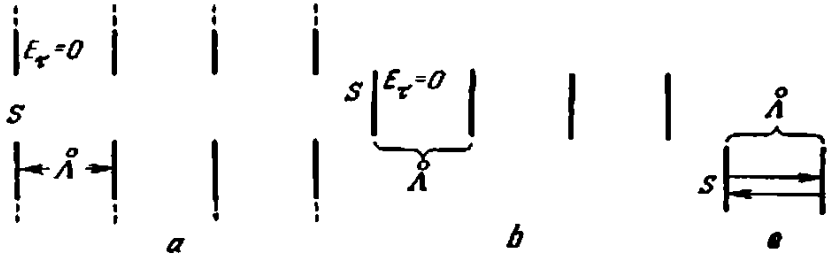


Fig. 78.3.

onda fundamental responde (desde el punto de vista de la óptica geométrica) el haz de rayos más estrecho. En los regímenes forzados, dicha onda juega el papel principal, ya que posee las pérdidas de radiación mínimas (véase el final del punto 1).

Obsérvese, que de acuerdo con el principio de Huygens (§§ 47, 53) en la (78.7) la integración debe extenderse por todo el plano. Sin embargo, en ciertas ocasiones, en la teoría de las líneas de lentes, es oportuna la aproximación de Kirchhoff (§ 53, punto 1), de acuerdo con la cual, como región de integración sólo se toma la proyección S de la lente en el plano transversal (compárese con la enunciación (53.1)).

En la aproximación de Kirchhoff la forma límite del sistema de lentes es la "línea con aletas radiales" (fig. 78.3, *a*), es decir, el sistema de planos opacos con orificios S fuera de los cuales (en los propios planos) se supone que el campo no existe. Para tal línea, hay que hacer en la (78.7b) que $Q = S$, $L = \mathring{\Lambda}$ y $\psi = k_0 L$ (sin "corrección de fase").

3. Sistemas de espejos. Resonadores abiertos. Los sistemas periódicos de espejos (fig. 78.1, *b*—*e*) se consideran desde el mismo

punto de vista que las líneas de lentes. La óptica geométrica proporciona el cuadro de los rayos, mientras que el principio de Huygens, con la aproximación de Kirchhoff, nos permite tener en cuenta las pérdidas de radiación. En este caso, es posible obtener ecuaciones integrales análogas a (78.7).

Si tomamos un sistema de espejos planos S (fig. 78.3, *b*) que completa la línea con aletas radiales (fig. 78.3, *a*), entonces, de un lado esto ya no será una línea de transmisión: en la aproximación de Kirchhoff dos espejos adyacentes forman un sistema energéticamente aislado (fig. 78.3, *c*). Por otro lado en virtud del principio de dualidad (§ 55, punto 1), no hay necesidad de resolver de nuevo el problema sobre los espejos, teniendo la solución del problema sobre los diafragmas que a ellos complementan. Como se desprende de lo expuesto anteriormente (punto 2), podemos directamente escribir la ecuación integral para un sistema periódico (fig. 78.3, *b*) y, por consiguiente, también para un sistema de dos espejos (fig. 78.3, *c*).

Suponiendo que las partes opacas son conductores ideales, debemos (§ 55, punto 1) sustituir en la ecuación integral $\dot{E}_m$ por $\dot{H}_m$. Tomando en la (78.7b) $Q = S$, $L = \mathring{\Lambda}$ y $\psi = k_0 L$ (véase el final del punto 2), en lugar de la (78.7), se obtiene

$$\varkappa \dot{H}_m(x, y, z') = \frac{ik_0 e^{-ik_0 \mathring{\Lambda}}}{2\pi \mathring{\Lambda}} \int_S \dot{H}_m(x', y', z') e^{-ik_0 \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2\mathring{\Lambda}}} dx'\, dy'. \tag{78.8}$$

Nos resta dar la interpretación de este resultado. Un sistema de dos espejos es un *resonador abierto*. Cuando la distancia entre los espejos es considerablemente menor que sus dimensiones transversales, decimos que por sus propiedades tal resonador es cercano al sistema idealizado que consideramos en el § 36, punto 4; si la correlación entre las dimensiones del sistema es otra, aquí jugará importante papel la difracción. La procedencia de la ecuación integral (78.8) puede ser interpretada de la forma siguiente. Sea que para la distribución del campo $\dot{H}^{(1)}$, uno de los espejos excita en el segundo el campo $\dot{H}^{(2)}$ que puede ser definido por medio del principio de Huygens como $\dot{H}_m^{(2)} = \mathscr{L}\dot{H}_m^{(1)}$. A su vez, el nuevo campo en el primer espejo $\dot{H}^{(3)}$ se define como $\dot{H}_m^{(3)} = \mathscr{L}\dot{H}_m^{(2)}$. Si de este modo definimos el proceso de reiterada reflexión en los espejos, a causa del cual en ellos se establece cierta distribución propia del campo, entonces, en la correlación $\dot{H}_m^{(n+1)} = \mathscr{L}\dot{H}_m^{(n)}$ (para el "n—ésimo paso"), cuando $n \to \infty$ el campo en cada uno de los espejos puede diferenciarse solamente del campo en otro por un factor constante: $\dot{H}_m^{(n+1)} = \varkappa \dot{H}_m^{(n)}$; dicho factor indica la diferencia de fase y la amplitud (como motivo de las pérdidas de radiación). La igualdad que hemos escrito es, precisamente, la ecuación integral (78.8).

Las funciones propias de la ecuación (78.8) $\dot{H}_m = v_n$ nos dan las distribuciones transversales del campo $\dot{H}$ para diferentes oscilaciones

libres del resonador, a ellas corresponden los valores propios $\varkappa = \varkappa_n$. Como cada tipo de oscilaciones propias se caracteriza por el retorno al primer espejo de la onda reflejada con la misma fase, esto significa que la magnitud $\varkappa_n^2$ debe ser positiva y real; podemos convencernos fácilmente que esto tendrá lugar con $\varphi' = p\pi$ ($\varphi = \varphi' - i\varphi''$, p es un

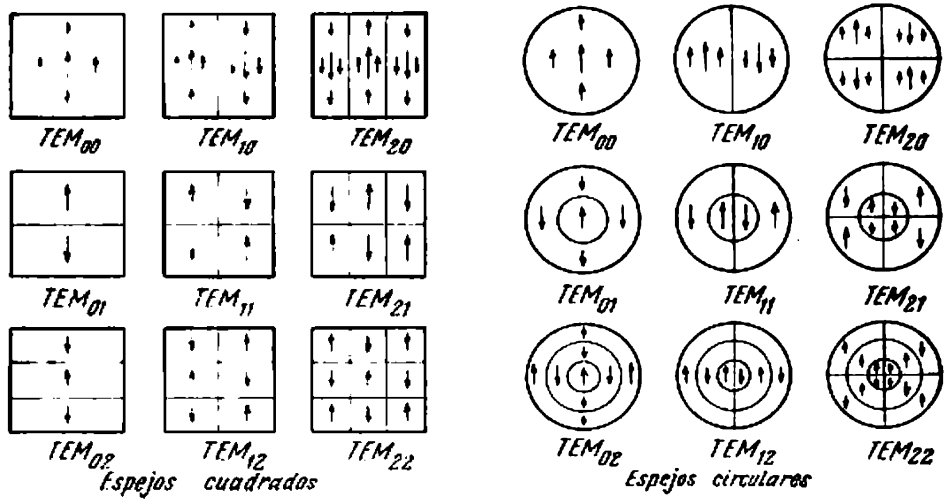


Fig. 78.4.

número entero). Partiendo de esta condición, se definen las frecuencias propias. En la fig. 78.4 se muestra la clasificación de las estructuras de diversas oscilaciones propias para espejos cuadrados y circulares según Fox y Li [1]; esquemáticamente se expone la estructura del campo eléctrico transversal. Es preciso remarcar que estos campos, llamados *TEM*, en realidad tienen componentes longitudinales (aunque despreciablemente pequeñas).

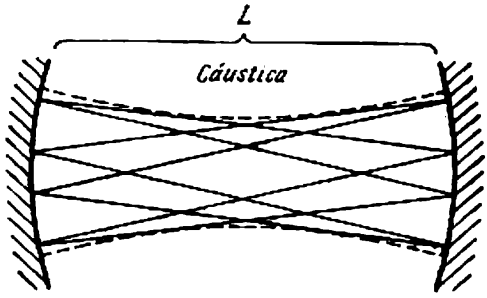


Fig. 78.5.

Existe cierta semejanza entre la línea de lentes y el resonador abierto, formado por espejos enfocadores (no planos). Tal resonador tiene oscilaciones propias que se definen en las representaciones de la óptica geométrica por iguales cuadros de rayos como las ondas libres en una línea de lentes equivalente. Un sencillo haz de rayos con superficie de cáustica se muestra en la fig. 78.5 (compárese con la fig. 78.2). La ecuación integral para un resonador compuesto de espejos enfocadores iguales coincide con la

[1] A. G. Fox, T. Li, Bell System Techn. Journ. 40, № 2, 453 (1961) (véase, además, [E.9]).

ecuación (78.7), ya que el factor de corrección de fase resulta ser para el espejo igual que para la lente.

Nos queda señalar las singularidades de los resonadores especulares abiertos, gracias a las que estos encuentran aplicación en la técnica.

La cuestión es que para todo resonador hueco el número de frecuencias propias, dispuestas en cierto intervalo $\Delta\omega$, crece rápidamente al aumentar ω; podemos convencernos de que esto es así, en

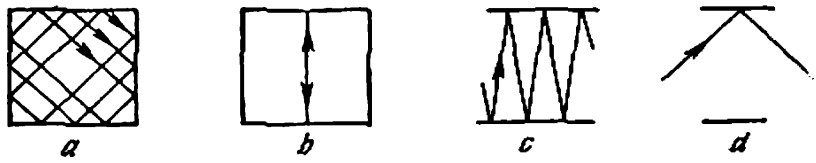


Fig. 78.6.

el ejemplo de un resonador rectangular (§ 70, punto 1). Considerando las oscilaciones forzadas en el resonador para frecuencias extremadamente altas, ya no podemos destacar las curvas de resonancia que corresponden a tipos independientes de oscilaciones (de orden superior). Podemos decir que las oscilaciones se "mezclan". *El sistema deja de ser resonante.*

La concentración señalada del espectro, es decir, el crecimiento relativo del número de oscilaciones de orden superior, se liga, interpretándolo desde el punto de vista de radiación, con la posibilidad de haber múltiples tipos de reflexiones reiteradas en el resonador (fig. 78.6, *a*). En el caso, cuando por cualquier causa sólo existen rayos paralelos (fig. 78.6, *b*), el espectro no se concentra: las frecuencias propias suceden a intervalos iguales. Tal caso, fue precisamente el objeto de estudio en el § 35, punto 4. La falta de concentración del espectro es propiedad de un sistema *monodimensional* (en diferencia del tridimensional, así como bidimensional).

Por lo demás entre dos planos paralelos infinitos es posible *la existencia no sólo de rayos normales a los que corresponden las* oscilaciones *TEM* (§ 36, punto 4), sino que también rayos inclinados (oscilaciones E y H). Pero la situación varía considerablemente, en cuanto se toma un sistema de dos espejos limitados. Aquí, además de los rayos normales, sólo podemos representarnos rayos inclinados bajo relativamente pequeños ángulos a la normal (fig. 78.6, *c*); bajo grandes ángulos las reflexiones múltiples no son posibles (fig. 78.6, *d*). Por este motivo, el espectro de un resonador abierto especular, en considerable grado, resulta estar "enrarecido".

En virtud de la singularidad indicada, dichos resonadores encuentran aplicación en las bandas de ondas más cortas, particularmente en calidad de sistemas de resonancia en los láseres.

La deformación (en caso particular, el pandeo) de los espejos planos provoca el crecimiento brusco de las pérdidas de radiación para las oscilaciones de todos los tipos. A los resonadores de espejos cóncavos es propio un menor enrarecimiento del espectro, pero, al contrario, son, generalmente, más estables respecto a las deformaciones.

Para un estudio más detallado de los sistemas cuasiópticos, recomendamos al lector los libros [C.4] y [G.4].

Capítulo 6

Singularidades de los campos en diversos medios

1. Campos y partículas cargadas

En esta parte vamos a estudiar ciertas representaciones más sencillas sobre las partículas cargadas en los campos electromagnéticos; al hacerlo, no tocaremos ni la física cuántica, ni la relativista. Los modelos de la física clásica, resultan ser suficientes para la explicación de muchos procesos que en radiotecnia tienen gran importancia.

Los datos sobre el movimiento de las partículas en campos estacionarios se emplean en la teoría de los tubos electrónicos radiotécnicos, ellos se consideran en la asignatura llamada *óptica electrónica*. Para la electrónica de las frecuencias ultraelevadas, son característicos los campos electromagnéticos no cuasiestacionarios, cuando hay flujos electrónicos. El movimiento oscilatorio de un sistema de partículas en un campo electromagnético alternativo, es la base de los modelos electrodinámicos de diferentes medios, por ejemplo, un metal y gas ionizado.

El conocimiento de las cuestiones enumeradas nos dará la posibilidad de pasar al estudio de las ondas de radio en la ionosfera, cosa que comenzamos en el § 41.

§ 79. Partículas en campos estacionarios

1. Campos electrostáticos. Supongamos que en un campo electrostático invariable, cuya intensidad es E, se encuentra una partícula material libre con carga q. Bajo la acción de la

fuerza

$$F = qE$$

dicha partícula deberá moverse con aceleración.

Nuestro objetivo no es hallar el campo total del sistema, ya que en el campo electrostático inicial se superpondrá el campo electromagnético no estacionario de la carga en movimiento. Sólo consideraremos el propio movimiento, suponiendo que él es suficientemente lento: la velocidad v es considerablemente menor que la velocidad de la luz. En virtud de la mecánica clásica

$$qE = m\frac{dv}{dt}, \tag{79.1}$$

siendo m la masa de la partícula. Dado, en caso particular, que el campo electrostático es homogéneo y, además $E = x_0 E$. Entonces

$$\frac{q}{m}E = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$0 = \frac{dv_y}{dt}, \tag{79.1a}$$

$$0 = \frac{dv_z}{dt}.$$

De aquí

$$v_x(t) = \frac{q}{m}Et + v_x(0),$$

$$v_y(t) = v_y(0), \tag{79.2}$$

$$v_z(t) = v_z(0).$$

Si, por ejemplo, $v_x(0) = v_y(0) = 0$ y $v_z(0) = v_0$ (es decir, $v(0) = z_0 v_0$), entonces, de acuerdo con las (79.2), se tiene

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q}{m}Et, \quad \frac{dz}{dt} = v_0. \tag{79.2a}$$

La solución de este sistema de corrientes ecuaciones diferenciales, es

$$x(z) = \frac{qE}{2mv_0^2}z^2 + x(0), \quad z(0) = 0. \tag{79.3}$$

La partícula se mueve por una trayectoria parabólica (fig. 79.1,*a*).

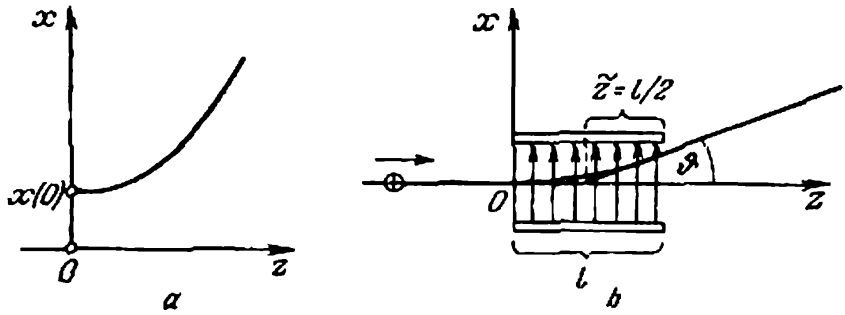


Fig. 79.1.

Tal movimiento se produce en los sistemas de deflexión de los tubos de rayos catódicos. Idealizando hasta cierto grado el dispositivo real, sustituyámoslo por un condensador plano y consideremos que su campo es homogéneo en el interior e igual a cero en el exterior de las placas. El ángulo de salida del haz electrónico ϑ se determina del modo siguiente (fig. 79.1,*b*):

$$\operatorname{tg}\vartheta = \left.\frac{dx}{dz}\right|_{z=l} = \frac{qEl}{mv_0^2}, \tag{79.4a}$$

y como en tal caso la deflexión x es igual a

$$x(l) = \frac{qEL^2}{2mv_0^2}, \tag{79.4b}$$

entonces fuera de las placas (por inercia) las partículas se mueven de tal forma como si el haz se hubiera "refractado" en el punto $\tilde{z} = x(l)/\operatorname{tg}\vartheta = l/2$ (fig. 79.1,*b*).

En técnica se emplean frecuentemente sistemas con campos electrostáticos no homogéneos que influyen en los haces electrónicos como lentes. Vamos a examinar, en rasgos generales, dos tipos de tales *lentes electrostáticas*.

Puede jugar el papel de lente un diafragma circular en una pantalla conductora. El haz de partículas que va por la normal a las superficies equipotenciales en un campo homogéneo (fig. 79.2,*a*)

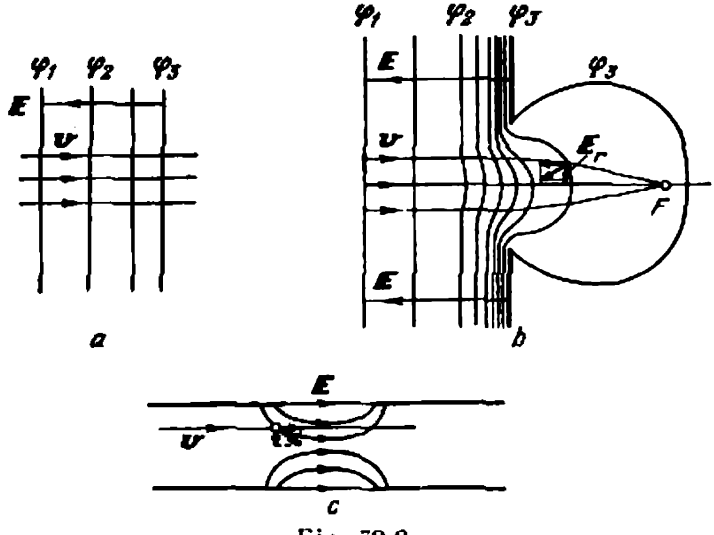


Fig. 79.2.

no se deforma. Sea que tal campo existe en el semiespacio limitado por la pantalla. Si en ésta hay un diafragma, el campo parece deformado como se muestra en la fig. 79.2,*b* por medio de un sistema de equipotenciales. Vemos que en este caso está presente una componente radial que deberá causar un efecto "compresor" en el flujo de partículas que se retarda por el campo (en el

caso dado las partículas son positivas). Aquí, un haz de partículas suficientemente estrecho deberá concentrarse tras el diafragma en un "foco".

También puede servir de lente un cilindro conductor cortado transversalmente (fig. 79.2,*c*). El haz de partículas coaxial paralelo que pasa por él, sufrirá la acción de la componente radial del campo dirigida hacia el eje en una de las regiones y desde el eje, en otra. Si las partículas que se aceleran por el campo longitudinal, llegan a la segunda región más tarde, ellas la pasarán con mayor *rapidez*. Por esta razón, el sistema resulta ser colector.

2. Campos magnéticos estacionarios. Una partícula con carga q que se mueve en un campo magnético estacionario con una velocidad $\boldsymbol{v}$, se halla bajo la influencia de la fuerza de Lorentz $\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}]$ (§ 1, punto 1). Debido a esto

$$q[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}] = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{79.5}$$

Dado que se trata de un campo homogéneo, siendo además $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{z}_0 \mu_0 H$. Entonces

$$\mu_0 \frac{q}{m} v_y H = \frac{dv_x}{dt}, \quad -\mu_0 \frac{q}{m} v_x H = \frac{dv_y}{dt},$$
$$0 = \frac{dv_z}{dt}. \tag{79.5a}$$

Eliminando de las dos primeras ecuaciones v_y, o bien v_x, hallamos las ecuaciones diferenciales de segundo orden respecto a una de estas dos funciones que resultan ser iguales:

$$\frac{d^2 v_{x,y}}{dt^2} + \left(\mu_0 \frac{q}{m} H\right)^2 v_{x,y} = 0. \tag{79.6}$$

De este modo

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t) = A\cos\Omega t + B\operatorname{sen}\Omega t,$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y(t) = A'\cos\Omega t + B'\operatorname{sen}\Omega t \tag{79.7a}$$

$\left(\Omega = \mu_0 \frac{q}{m} H\right)$, mientras que de la tercera columna de las (79.5a), obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = v_z(t) = v_z(0). \tag{79.7b}$$

Precisemos los coeficientes constantes en la (79.7a). De la primera ecuación (79.5a), se desprende:

$$\Omega(A'\cos\Omega t + B'\operatorname{sen}\Omega t) = \Omega(-A\operatorname{sen}\Omega t + B\cos\Omega t),$$

es decir,

$$A' = B \quad \text{y} \quad B' = -A.$$

Por lo tanto, las expresiones (79.7a) toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= A\cos\Omega t + B\operatorname{sen}\Omega t - V\cos(\Omega t - \varphi_0), \\ v_y(t) &= B\cos\Omega t - A\operatorname{sen}\Omega t = -V\operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_0), \end{aligned} \tag{79.8}$$

siendo $V = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\varphi_0 = \operatorname{arctg} B/A$, con todo la constante V es ni más ni menos que el valor absoluto de la velocidad de la partícula en el plano $x0y$: $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Integrando las ecuaciones (79.7a, b), teniendo en cuenta las (79.8), se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{V}{\Omega}\operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_0) + \frac{V}{\Omega}\operatorname{sen}\varphi_0 + x(0), \\ y(t) &= \frac{V}{\Omega}\cos(\Omega t - \varphi_0) - \frac{V}{\Omega}\cos\varphi_0 + y(0), \\ z(t) &= v_z(0)\,t + z(0). \end{aligned} \tag{79.9}$$

En caso particular, cuando $v_z(0) = 0$, el resultado obtenido describe el movimiento por una circunferencia de radio $R = V/\Omega$. Efectivamente, tenemos la ecuación

$$\left[x(t) - \frac{V}{\Omega}\operatorname{sen}\varphi_0 - x(0)\right]^2 + \left[y(t) + \frac{V}{\Omega}\cos\varphi_0 - y(0)\right]^2 = \left(\frac{V}{\Omega}\right)^2. \tag{79.10}$$

La rotación transcurre con una frecuencia circular $\Omega = \mu_0 \frac{q}{m} H$, mientras que la posición del centro de la trayectoria circular de la partícula y su radio, se determinan por los datos iniciales. En virtud de la (79.8), $\mathbf{v}(0) = (\boldsymbol{x}_0 \cos\varphi_0 + \boldsymbol{y}_0 \operatorname{sen}\varphi_0)V$.

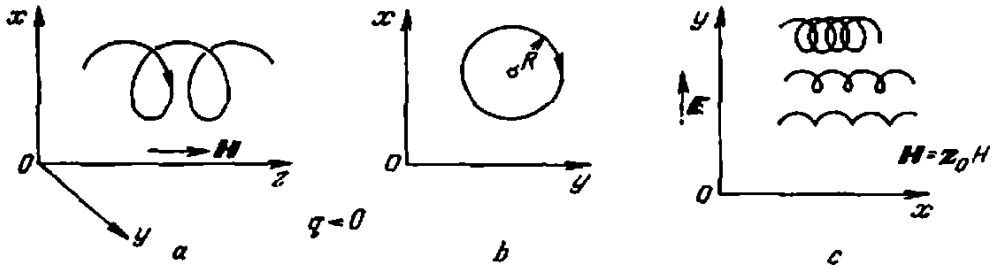


Fig. 79.3.

Cuando $v_z(0) \neq 0$, la partícula cargada se mueve por una línea helicoidal (fig. 79.3,*a*, *b*): se suman los movimientos considerados *anteriormente por una órbita circular y el movimiento rectilíneo* uniforme a lo largo del eje z.

Semejantemente a los campos electrostáticos, los magnéticos estacionarios se emplean para desviar y enfocar los haces electrónicos. Proponemos al lector en calidad de ejercicio, considerar un *haz que pasa por un sector limitado de un campo homogéneo (modelo* de un sistema de desviación, a base de un electroimán) y calcular el ángulo de desviación.

3. Campos electromagnéticos estacionarios. Por fin, tomemos el caso más general, cuando en la partícula cargada influye un campo electromagnético. Aquí, en lugar de las (79.1) y (79.5), tenemos la siguiente ecuación del movimiento

$$q\{\boldsymbol{E}+[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}]\}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{79.11}$$

Siendo $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{y}_0 E$ y $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{z}_0\mu_0 H$, de aquí se desprende:

$$\Omega v_y=\frac{dv_x}{dt},\ \frac{q}{m}E-\Omega v_x=\frac{dv_y}{dt},\ 0=\frac{dv_z}{dt}, \tag{79.11a}$$

siendo, como en el punto 2, $\Omega=\mu_0\frac{q}{m}H$.

La eliminación de la componente v_y en las dos primeras ecuaciones (79.11a), da

$$\frac{d^2v_x}{dt^2}+\Omega^2 v_x=\Omega\frac{q}{m}E \tag{79.12}$$

y por consiguiente

$$\frac{dx}{dt}\equiv v_x(t)=A\cos\Omega t+B\operatorname{sen}\Omega t+C, \tag{79.13a}$$

donde la constante C que se determina al poner la (79.13*a*) en la (79.12), resulta ser igual a

$$C=\frac{1}{\Omega}\frac{q}{m}E=\frac{E}{\mu_0 H}. \tag{79.13b}$$

Ahora, del primer renglón de las (79.11a), se tiene

$$\frac{dy}{dt}\equiv v_y(t)=-A\operatorname{sen}\Omega t+B\cos\Omega t \tag{79.14}$$

y, del tercero

$$\frac{dz}{dt}\equiv v_z(t)=v_z(0). \tag{79.15}$$

Del mismo modo que al obtener las (79.8) de las (79.7a), tomamos $V=\sqrt{A^2+B^2}$ y $\varphi_0=\operatorname{arctg}B/A$. Después de las correspondientes transformaciones, integramos las ecuaciones (79.13)—(79.15). Así se obtiene

$$\begin{aligned} x(t)&=\frac{V}{\Omega}\operatorname{sen}(\Omega t-\varphi_0)+\frac{V}{\Omega}\operatorname{sen}\varphi_0+\frac{E}{\mu_0 H}t+x(0),\\ y(t)&=\frac{V}{\Omega}\cos(\Omega t-\varphi_0-\frac{V}{\Omega}\cos\varphi_0+y(0),\\ z(t)&=v_z(0)t+z(0). \end{aligned} \tag{79.16}$$

Como antes (punto 2), a lo largo de eje z sólo tiene lugar movimiento uniforme. En cuanto al proceso que se produce en el plano $x0y$ cuando $v_z(0)=0$, éste resulta ser un movimiento por una *cicloide*; efectivamente, las dos primeras ecuaciones (79.16) son las ecuaciones paramétricas de una cicloide. De ellas, con fa-

cilidad, se obtiene

$$\left[x(t)-\frac{V}{\Omega}\operatorname{sen}\varphi_0-x(0)-\frac{E}{\mu_0 H}t\right]^2+$$
$$+\left[y(t)+\frac{V}{\Omega}\cos\varphi_0-y(0)\right]^2=\left(\frac{V}{\Omega}\right)^2. \qquad (79.17)$$

Por esto, se puede decir que la partícula se mueve por una circunferencia de radio $R=V/\Omega$ con frecuencia circular Ω, pero que la propia circunferencia (su centro) se desplaza a lo largo del eje x con una velocidad constante $E/\mu_0 H$. El tipo de la cicloide depende de la correlación entre la velocidad lineal de movimiento por la circunferencia V y la velocidad de desplazamiento de su centro $E/\mu_0 H$, lo que se muestra en la fig. 79.3,*c*. Los parámetros de la trayectoria se determinan por los datos iniciales: si $v_z(0)=0$, de las (79.13) y (79.14), tenemos: $\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{x}_0\left(V\cos\varphi_0+\frac{E}{\mu_0 H}\right)+$ $+\boldsymbol{y}_0 V\operatorname{sen}\varphi_0$.

Hay que señalar que la clase de movimiento de partículas cargadas que hemos considerado, es característico (en rasgos generales) para una serie de aparatos de la electrónica de frecuencias ultraelevadas, del tipo de *magnetrones*.

4. Sobre la precesión del momento magnético. Conclusión. Las partículas materiales pueden poseer momento magnético, lo que tiene una sencilla explicación clásica. Efectivamente, con esta aproximación podemos hablar de los movimientos orbitales de los electrones en los átomos y de sus espines como corrientes circulares que se manifiestan como dipolos magnéticos (§ 23, puntos 3, 4). En virtud de la (23.10), el momento magnético equivalente a la corriente cerrada, se determina por la fórmula: $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{z}_0 IS\mu_0$ (el medio es el vacío). Al mismo tiempo, de acuerdo con la (1.4), sobre una corriente tal en un campo magnético exterior actúa un momento de fuerza $\boldsymbol{K}=IS\mu_0[\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{H}]$, es decir,

$$\boldsymbol{K}=[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{H}]. \qquad (79.18)$$

Emplearemos esta correlación al considerar una partícula que posee un momento magnético $\boldsymbol{m}$. Ya que este último está condicionado por cierto movimiento de rotación, significa que la partícula también tiene momento de la cantidad de movimiento que designaremos por $\boldsymbol{S}$, siendo, además

$$\boldsymbol{m}=\gamma\boldsymbol{S}, \qquad (79.19)$$

donde γ es constante. En particular, para el espín de un electrón $\gamma=-2{,}21\cdot 10^5\,(A/M)^{-1}s^{-1}$. Tomando la conocida ley de la mecánica clásica

$$\boldsymbol{K}=\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}, \qquad (79.20)$$

a base de las (79.18) y (79.19), se obtiene que

$$\gamma[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{H}]=\frac{d\boldsymbol{m}}{dt}. \qquad (79.21)$$

Esta expresión es ni más ni menos que la ecuación del movimiento de una partícula con momento magnético $\boldsymbol{m}$ en un campo magnético de intensidad $\boldsymbol{H}$.

Cuando $\boldsymbol{H}=\text{const}$, el movimiento a describir es la llamada *precesión* alrededor de la dirección $\boldsymbol{H}$. Señalemos primeramente que durante el movimiento la longitud del vector $\boldsymbol{m}$ se conserva. Efectivamente, multiplicando de modo escalar por $\boldsymbol{m}$ ambos miembros de la (79.21), se tiene que

$$0 \equiv \gamma[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{H}]\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}\frac{d\boldsymbol{m}}{dt},$$

de donde

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{m}^2 = 0,$$

lo que demuestra la anterior afirmación. El vector $d\boldsymbol{m}/dt$ que tiene el sentido de la velocidad de desplazamiento del extremo de $\boldsymbol{m}$ en el diagrama vectorial (con el comienzo fijado) en virtud de la (79.21), es perpendicular a $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{H}$. En otras palabras, para dos posiciones sucesivas del momento magnético $\boldsymbol{m}(t)$ y $\boldsymbol{m}(t+\Delta t)$, el incremento $\Delta\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}(t+\Delta t)-\boldsymbol{m}(t)$, cuando $\Delta t \to 0$, es perpendicular al plano de $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{H}$ (fig. 79,4, *a*). Esto quiere decir que la "flecha magnética" $\boldsymbol{m}$ (enlazada con la partícula), quedándose situada bajo un ángulo ϑ respecto a $\boldsymbol{H}$ (fig. 79.4, *b*) *precesa* de modo semejante al eje de un trompo en el campo de gravitación: su extremo gira alrededor de la dirección $\boldsymbol{H}$ con una velocidad lineal constante $V=|d\boldsymbol{m}/dt|=|\gamma[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{H}]|=|\gamma m H \operatorname{sen}\vartheta|$. Es fácil hallar también la velocidad angular (frecuencia circular) de rotación $\Omega=V/R$, siendo $R=m\operatorname{sen}\vartheta$ (fig. 79.4, *b*). Se obtiene

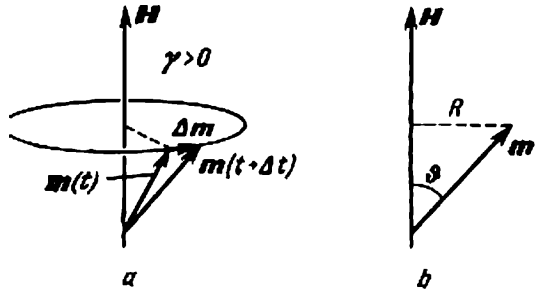


Fig. 79.4.

$$\Omega=|\gamma H|. \qquad (79.23)$$

El sentido de rotación forma con el vector $\boldsymbol{H}$ un *sistema dextrógiro*.

Como modelo de magnético, medio continuo, sirve un sistema de partículas, cada una de las cuales se desplaza de acuerdo con la ecuación (79.21), teniendo en cuenta que la imanación $\boldsymbol{M}$ es el momento magnético del sistema referido a la unidad de volumen (§ 21, punto 3). Por esta razón, haciendo $\boldsymbol{M}=N'\boldsymbol{m}$, donde N' es

el número necesario de partículas, escribimos:

$$\gamma[\boldsymbol{M}, \boldsymbol{H}] = \frac{d\boldsymbol{M}}{dt}. \qquad (79.24)$$

Esta es la llamada *ecuación del movimiento de la imanación*.

Al deducir la ecuación (79.24) no se han tomado en consideración las pérdidas de energía en el medio. Por regla general, esto se hace introduciendo en la (79.24) un término complementario, cuya forma responde a uno u otro modelo del "mecanismo" de absorción. Se utiliza ampliamente la *ecuación de Landau-Lifshitz*

$$\gamma[\boldsymbol{M}, \boldsymbol{H}] - \eta\mu_0 \frac{[\boldsymbol{M}, [\boldsymbol{M}, \boldsymbol{H}]]}{M^2} = \frac{d\boldsymbol{M}}{dt}. \qquad (79.25)$$

Aquí el término disipador es un vector perpendicular a $\boldsymbol{M}$; él influye en la amplitud de la precesión, sin cambiar la magnitud de $\boldsymbol{M}$. El parámetro η (magnitud positiva), se determina de manera experimental.

Como conclusión haremos dos observaciones. Vamos a marcar una vez más (véase el comienzo del punto 1) que en todos los casos el campo por el que se mueve la partícula, se ha considerado preestablecido. Sin embargo, una carga que se mueve con aceleración (corriente alterna), emite y la "reacción de radiación", o sea, la pérdida de energía, varía su movimiento. Menospreciar este hecho, no es siempre admisible.

La siguiente observación consiste en que el movimiento de las partículas puede considerarse desde el punto de vista del principio de la acción mínima de mecánica. Al mismo tiempo se descubre la analogía con el principio de Fermat (§ 56, punto 4), del cual, como sabemos, se deducen las leyes de la óptica geométrica. Así se componen los fundamentos de la *óptica electrónica* que trata las trayectorias de las partículas cargadas en campos estacionarios; sus leyes resultan ser análogas.

§ 80. Partículas en campos alternativos y modelos de medios

1. Interacción de los campos con flujos de partículas. Indicando la velocidad $\boldsymbol{v}$ y la densidad de carga ρ de un flujo de partículas cargadas, éste puede ser caracterizado como función de las coordenadas; en este caso, en virtud de la (6.3), también está determinada la densidad de la corriente de conducción

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}. \qquad (80.1)$$

Supongamos que un campo magnético alternativo puede no tener más manantiales que un flujo de electrones; por otro lado, el movimiento de las partículas está condicionado por dicho campo. Si la función $\boldsymbol{j}$ resultara ser conocida, entonces, hallando la solu-

ción de las ecuaciones de electrodinámica (28.1) (o bien (28.6), (28.7)), deberíamos obtener precisamente aquel campo, gracias al que las partículas se mueven por la trayectoria dada con una velocidad $\boldsymbol{v}$, creando una corriente de la densidad $\boldsymbol{j}$. En realidad, hablando en rigor, los parámetros del flujo $\boldsymbol{v}$ y ρ no pueden ser conocidos de antemano, lo que significa que las ecuaciones de electrodinámica (28.1) conviene resolverlas *conjuntamente* (como un sistema único) con las ecuaciones de movimiento de la carga (80.1) y (79.11). Un planteamiento tan completo del problema, lleva, incluso en sus formas particulares, a considerables dificultades y, por lo tanto, generalmente se emplea toda serie de simplificaciones.

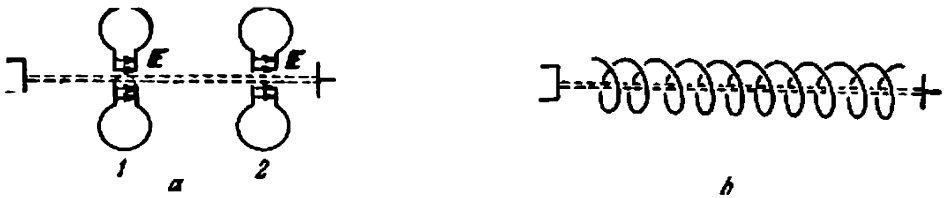


Fig. 80.1.

En la electrónica de frecuencias ultraelevadas se consideran campos electromagnéticos en resonadores de cavidad y en sistemas de guiado, excitados o amplificados por flujos electrónicos. En caso particular, un sistema de dos resonadores (corrientemente toroidales) con orificios atravesados por un flujo electrónico (fig. 80.1, *a*) puede servir de aparato del tipo de *klistrón*. Si en el primer resonador existe un campo, éste, como se suelen decir, modula la velocidad del flujo de partículas, acelerándolas o desacelerándolas, en dependencia del intervalo de tiempo de llegada al espacio de interacción (región del resonador), en el que la dirección del vector $\boldsymbol{E}$ varia periódicamente. Por esta razón, la función $\boldsymbol{j}$ que caracteriza la corriente en el segundo resonador, ya tiene componente armónica y en él se excitan oscilaciones electromagnéticas. Los resonadores se pueden acoplar y, de este modo, crear un sistema capaz de autoexcitarse.

En la fig. 80.1, *b* se muestra esquemáticamente el paso del flujo electrónico por el interior de un sistema de guiado en forma de una guía de ondas espiral (§ 77, punto 3). Si el movimiento de las partículas es tal, que ellas fundamentalmente se frenan por la onda progresiva de la espiral (guía de ondas), entonces, la energía se desprende al campo electromagnético y la amplitud de la onda crece. De esta forma funcionan los aparatos del tipo de las *válvulas de ondas progresivas*.

Aclaremos ciertas singularidades de la interacción del flujo electrónico con la onda progresiva, suponiendo que el campo eléctrico en la región del flujo es puramente longitudinal e invariable en la sección transversal (el haz es estrecho). De este modo $\boldsymbol{E}$ y, respectivamente, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{j}$ y ρ, van a considerarse como funciones de

la coordenada longitudinal z y el tiempo t. Confeccionando la derivada de $v = v_z(z, t)$ por t, se tiene

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z},$$

de modo que la ecuación de movimiento (79.1), toma el aspecto

$$\frac{q}{m}E = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z}. \tag{80.2}$$

Representemos las funciones $E(z, t)$, $v(z, t)$, $j(z, t)$ y $\rho(z, t)$ como series de Fourier de la forma (S8.1), así que en particular

$$v(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(z)\, e^{in\omega t}, \tag{80.3a}$$

considerando, además, que

$$v_0(z) = \text{const}, \quad v_1(z) = \dot{v}_m e^{-i\dot{\Gamma}z},$$
$$v_0 \gg |\dot{v}_m| = v_m, \tag{80.3b}$$

mientras que vamos a despreciar los demás términos de la serie, suponiendo que ellos no son esenciales para el proceso de interacciones a estudiar. Además, las funciones enumeradas van a ser descritas de manera análoga. En esencia, se supone que en el haz predomina la componente constante, y la variable tiene el carácter de una onda armónica de una frecuencia ω y constante de propagación $\dot{\Gamma}$.

Introduciendo en la (80.2) las indicadas representaciones de E y v, obtenemos la siguiente correlación lineal aproximada para la componente variable:

$$\frac{q}{m}\dot{E}_m \approx i\omega\dot{v}_m - i\dot{\Gamma}v_0\dot{v}_m. \tag{80.4}$$

Igualmente, de la (80.1), se halla que

$$\dot{j}_m \approx \rho_0\dot{v}_m + \dot{\rho}_m v_0. \tag{80.5}$$

Por fin, hacemos uso de la ecuación de continuidad (4.2) que en el caso dado tiene el aspecto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial z} \tag{80.6}$$

y que da

$$\dot{\rho}_m \approx \frac{\dot{\Gamma}}{\omega}\dot{j}_m. \tag{80.7}$$

Eliminando de las (80.4), (80.5) y (80.7) las amplitudes complejas $\dot{\rho}_m$ y $\dot{v}_m$, hallamos el siguiente enlace entre $\dot{j}_m$ y $\dot{E}_m$:

$$\dot{j}_m \approx \frac{-ik_q\frac{\rho_0}{v_0}\frac{q}{m}}{(k_q - \dot{\Gamma})^2}\dot{E}_m, \tag{80.8}$$

donde se ha designado por $k_q = \omega/v_0$. Esto permite expresar la densidad de potencia de la componente variable en el haz $\dot{p} = \frac{\dot{j}_m \dot{E}_m}{2}$, mediante la igualdad

$$\dot{p} \approx \frac{ik_q \frac{p_0}{v_0} \frac{q}{m}}{2(k_q - \dot{\Gamma})^2} E_m^2. \tag{80.9}$$

Las partículas dan su energía al campo cuando $\operatorname{Re} \dot{p} < 0$ (§ 30); en tal caso la amplitud de la onda progresiva aumenta: $\Gamma'' < 0$ ($\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma''$). Y como una transformación elemental del anterior resultado lleva a la expresión

$$\dot{p} \approx \frac{k_q \frac{p_0}{v_0} \frac{q}{m} [-2(k_q - \Gamma')\Gamma'' + i(k_q^2 - 2k_q\Gamma' + \Gamma'^2 - \Gamma''^2)]}{2[(k_q^2 - 2k_q\Gamma' + \Gamma'^2 - \Gamma''^2)^2 + 4(k_q - \Gamma')^2\Gamma''^2]} E_m^2, \tag{80.9a}$$

entonces, como vemos, la amplificación de la onda tendrá lugar cuando

$$k_q - \Gamma' < 0 \quad (\Gamma'' < 0), \tag{80.10}$$

es decir, teniendo en cuenta las (61.2) y siendo

$$v_0 > v_f. \tag{80.10a}$$

La componente constante de la velocidad de las partículas debe superar la velocidad de fase de la onda.

Esta deducción ha sido obtenida para una serie de simplificaciones que llevan a la *linealización* de las ecuaciones iniciales que, por lo general, son no lineales. Sin embargo, los resultados reflejan los rasgos principales del proceso y la fórmula (80.9) es útil para efectuar estimaciones aproximadas. Como suele decirse, el flujo electrónico en un campo se agrupa, dividiéndose en cúmulos independientes. Cuando hay "sincronismo" entre el movimiento de los electrones y la onda, cuando $v_0 = v_f$, los cúmulos se localizan en sus nodos y, sólo al ser $v_0 > v_f$, se produce eficaz desaceleración de los electrones por el campo: si, por lo contrario, $v_0 < v_f$, entonces, los electrones se aceleran por el campo y absorben energía, a causa de lo cual la onda se amortigua ($\Gamma'' > 0$).

En conclusión, señalemos que el flujo electrónico puede ser considerado como un medio con constante dieléctrica compleja, cuya forma se esclarece al comparar la (80.9a) con la expresión de la densidad de la potencia $\dot{p}$ que se desprende de la (30.9). En caso particular, en virtud de la (30.16), $\operatorname{Re} \dot{p} = \omega\varepsilon'' E_m^2/2$. Al cumplir la desigualdad (80.10) el medio resulta ser *activo* (regenerativo): $\varepsilon'' < 0$.

2. Modelo más sencillo del plasma. Para la posterior exposición el *plasma* es un importante ejemplo, es decir, un gas ionizado parcial o totalmente, al haber un campo electromagnético que oscila armónicamente. En tal caso, se tiene un sistema de

partículas cargadas, electrones o iones, así como también átomos neutrales. Al principio, no vamos a tener en cuenta sus colisiones. Con todo, el movimiento de cada una de las partículas cargadas bajo la acción del campo eléctrico, se define por la ecuación (79.1), a la que daremos la forma

$$\frac{q}{m}\boldsymbol{E} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \tag{80.11}$$

siendo $\boldsymbol{r}$ el radio vector que indica la posición de la partícula. Suponiendo $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_m \cos(\omega t + \varphi)$, hallamos la solución:

$$\boldsymbol{r} = -\frac{q\boldsymbol{E}}{m\omega^2} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0, \tag{80.12}$$

además, la función $\boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0$ caracteriza la posición de la partícula sin campo. Claro está que el primer término de la solución que expresa las oscilaciones armónicas forzadas en el campo, puede ser obtenido según el método de las amplitudes complejas, en virtud del cual la ecuación (80.11) se convierte en la expresión algebraica $\frac{q}{m}\dot{\boldsymbol{E}}_m = -\omega^2 \boldsymbol{r}_m$, de donde

$$\boldsymbol{r}_m = -\frac{q\dot{\boldsymbol{E}}_m}{m\omega^2}. \tag{80.12a}$$

El plasma es un sistema neutral de cargas (la cantidad de electrones e iones negativos es igual al número de iones positivos). Por esta razón, es posible calcular el momento eléctrico de un elemento arbitrario de su volumen ΔV por medio de la fórmula (18.2), lo que, en virtud de la (80.12), da

$$\boldsymbol{p}_{\Delta V} = \sum_i^{(\Delta V)} q_i \left(-\frac{q_i \boldsymbol{E}}{m_i \omega^2} + \boldsymbol{v}_{0i} t + \boldsymbol{r}_{0i}\right), \tag{80.13}$$

donde el índice i significa la suma por todas las partículas en el interior de ΔV. Pero nos interesa solamente la componente armónica del momento. Pasando a la amplitud compleja y tomando en cuenta que todas las cargas tienen una magnitud absoluta idéntica, igual a la carga del electrón ($|q_i| = e$, los iones se consideran univalentes), se obtiene que

$$\boldsymbol{p}_{m\Delta V} = -\frac{e^2 \boldsymbol{E}_m}{\omega^2} \sum_i^{(\Delta V)} \frac{1}{m_i}. \tag{80.13a}$$

Despreciemos, seguidamente, la influencia de los iones, puesto que sus masas son muy grandes en comparación con la del electrón que designaremos por m. De modo que

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{m\,\Delta V} = -\frac{e^2 N_{\Delta V}}{m\omega^2}\dot{\boldsymbol{E}}_m, \tag{80.13b}$$

siendo $N_{\Delta V}$ el número de *electrones* en el volumen ΔV. Pasando al límite, como en la (18.10), determinamos la amplitud compleja

del vector de la polarizabilidad del medio:

$$\dot{P}_m = -\frac{e^2 N'}{m\omega^2}\dot{E}_m \qquad (80.14)$$

(N' es el número de electrones referido a la unidad de volumen).

El resultado obtenido proporciona la posibilidad de caracterizar el plasma por medio de las susceptibilidad eléctrica $\dot{\chi}^e$ y permitividad $\dot{\varepsilon}$ que se hallan de inmediato, a base de las fórmulas (5.4) (o bien (18.11)) y (5.8):

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 (1 + \dot{\chi}^e) = \varepsilon_0 - \frac{e^2 N'}{m\omega^2}. \qquad (80.15)$$

Al pasar a la permitividad relativa y poniendo los valores numéricos de los parámetros del electrón e y m, se tiene que

$$\dot{\varepsilon}_r = 1 - \frac{e^2 N'}{\varepsilon_0 m\omega^2} = 1 - 80{,}6\frac{N'}{f^2}. \qquad (80.15a)$$

Aquí, la concentración N' se expresa por el número de electrones en 1 m^3, mientras que la frecuencia f, en Hz (o bien, lo que prácticamente es más cómodo, la frecuencia se toma en kHz y el número de electrones se refiere a 1 cm^3).

La magnitud $\dot{\varepsilon}$ ha resultado ser real; esto refleja el hecho de que el sistema de las partículas que oscilan en el campo, en término medio, ni rinde ni toma energía. Es interesante que para la concentración dada de electrones N', en dependencia de la frecuencia, la constante dieléctrica puede ser magnitud positiva o negativa, pasando por el cero para $\omega^2 = e^2 N'/\varepsilon_0 m$. Es posible también transformar la expresión (80.15) en la forma siguiente:

$$\dot{\varepsilon}_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \left(\omega_p^2 = \frac{e^2 N'}{\varepsilon_0 m}\right). \qquad (80.15b)$$

El parámetro ω_p se denomina *frecuencia de plasma*.

3. **Plasma absorbente.** Para poder tomar en cuenta la absorción en el plasma, introduzcamos en la consideración el desprendimiento de energía de los electrones oscilantes al chocar con partículas pesadas. Suponiendo que cuando choca con una partícula neutral o un ion un electrón que se mueve a una velocidad igual a $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ éste le transmite su impulso $m\,d\boldsymbol{r}/dt$ y el número medio de tales choques por unidad de tiempo es ν deberemos tener en cuenta en las ecuaciones de movimiento una variación complementaria del impulso por la unidad de tiempo igual a $m\nu\,d\boldsymbol{r}/dt$. Al mismo tiempo en lugar de la (80.11), escribimos

$$\frac{q}{m}\boldsymbol{E} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + \nu\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \qquad (80.16)$$

El efecto conjunto de los choques es semejante a las manifestaciones de la fuerza de rozamiento.

Ya que, como anteriormente en el punto 2, representan interés sólo las oscilaciones armónicas forzadas de los electrones, conviene hacer uso del método de las amplitudes complejas que lleva de la (80.16) a la ecuación algebraica

$$\frac{q}{m}\dot{E}_m = -\omega^2 \dot{r}_m + i\omega\nu\dot{r}_m, \text{ de donde}$$

$$\dot{r}_m = -\frac{q\dot{E}_m}{m\omega}\frac{1}{\omega - i\nu} \tag{80.17}$$

(compárese con la (80.12a)). Ahora, del modo anterior, en lugar de la (80.14), obtenemos

$$\dot{P}_m = -\frac{e^2N'}{m\omega}\frac{1}{\omega - i\nu}\dot{E}_m \tag{80.18}$$

y, seguidamente, pasamos a la expresión de la constante dieléctrica compleja

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 - \frac{e^2N'}{m\omega}\frac{1}{\omega - i\nu}, \tag{80.19}$$

o bien

$$\dot{\varepsilon}_r = 1 - \frac{e^2N'}{\varepsilon_0 m(\omega^2 + \nu^2)} - i\frac{e^2N'\nu}{\varepsilon_0 m\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \tag{80.19a}$$

La comparación de este resultado con la expresión (29.2) permite obtener la fórmula de la conductibilidad del plasma

$$\sigma = \frac{e^2N'\nu}{m(\omega^2 + \nu^2)}. \tag{80.20}$$

Escribamos las fórmulas aproximadas, empleadas frecuentemente, de la constante dieléctrica compleja que se desprenden de la (80.19a), para $\omega^2 \gg \nu^2$

$$\dot{\varepsilon}_r \approx 1 - \frac{e^2N'}{\varepsilon_0 m\omega^2} - i\frac{e^2N'\nu}{\varepsilon_0 m\omega^3}; \tag{80.21}$$

si $\omega^2 \ll \nu^2$

$$\dot{\varepsilon}_r \approx 1 - \frac{e^2N'}{\varepsilon_0 m\nu^2} - i\frac{e^2N'}{\varepsilon_0 m\omega\nu}. \tag{80.22}$$

Por fin, marquemos que el modelo electrodinámico del plasma que hemos considerado, es, simultáneamente, el modelo de un metal. Para los metales, corrientemente, se supone que

$$\dot{\varepsilon} \approx -i\frac{\sigma}{\omega} \tag{80.23}$$

(con semejante aproximación fueron obtenidas las fórmulas (33.17), (33.19) y otras). De acuerdo con la (80.19), tal aproximación es válida para frecuencias relativamente bajas, siendo además,

$$\sigma = e^2N'/m\nu \tag{80.24}$$

(compárese con la (80.22)).

Sin embargo, para N' y ν propias de los metales, resultan ser "bajas" todas frecuencias de radiodifusión.

4. Sobre el modelo de un dieléctrico. Conclusión. El modelo estático de un dieléctrico, en forma de un sistema de cargas enlazada fue analizado en el § 18. Al desviarse de la posición de equilibrio, sobre una carga de este tipo actúa una fuerza de "recuperación" proporcional a la desviación, semejante a la fuerza de elasticidad; en un dieléctrico polarizado de modo estático, se equilibra por la fuerza del campo $q\boldsymbol{E}$.

Designando la fuerza de recuperación por $\alpha \boldsymbol{r}$, la introduciremos en la ecuación de movimiento (80.16) que toma el aspecto

$$\frac{q}{m}\boldsymbol{E} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + \nu\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \frac{\alpha}{m}\boldsymbol{r}. \tag{80.25}$$

Señalemos que el parámetro ν no tiene, en este caso, el sentido de la frecuencia de los choques del electrón con las partículas pesadas; no obstante, en el dieléctrico hay fuerzas del tipo de rozamiento y por esta razón, el término $\nu\, d\boldsymbol{r}/dt$ se conserva.

Empleando el método de las amplitudes complejas, es decir, reduciendo la (80.25) a la forma $\frac{q}{m}\dot{\boldsymbol{E}}_m = -\omega^2\dot{\boldsymbol{r}}_m + i\omega\nu\dot{\boldsymbol{r}}_m + \frac{\alpha}{m}\dot{\boldsymbol{r}}_m$, se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{r}}_m = -\frac{q\dot{\boldsymbol{E}}_m}{m}\,\frac{1}{\omega^2 - \frac{\alpha}{m} - i\omega\nu} \tag{80.26}$$

y, a continuación,

$$\dot{\boldsymbol{P}}_m = -\frac{e^2N'}{m}\,\frac{1}{\omega^2 - \frac{\alpha}{m} - i\omega\nu}\,\dot{\boldsymbol{E}}_m, \tag{80.27}$$

de donde

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 - \frac{e^2N'}{m}\,\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\nu}, \tag{80.28}$$

donde se ha designado $\omega_0^2 = \alpha/m$.

Por una serie de causas, relacionadas con la necesidad de precisar la fuerza que actúa sobre la carga ligada, así como por la limitación de las representaciones de la física clásica, la definición de un dieléctrico caracterizado por la permitividad $\dot{\varepsilon}$ de la forma (80.28), resulta ser, en la mayoría de los casos, excesivamente simplificada; sin embargo, tal definición puede ser, por ejemplo, suficiente para un gas. Una singularidad esencial del modelo dinámico de un dieléctrico es la presencia de *resonancia* al coincidir la frecuencia del proceso electromagnético ω con la *frecuencia propia* ω_0 del medio; por lo general, un dieléctrico tiene espectro de las frecuencias propias. Recordemos que ya se habló en el § 60, punto 2 de la absorción por resonancia en los gases al tratar la propagación de las ondas de radio en la troposfera.

Los modelos confeccionados de los medios están unidos por la uniformidad del enfoque, pero según su valor son diferentes. En diferencia del modelo de un dieléctrico, el modelo del plasma, siendo más complejo, pero con menos pretensiones a adecuación, tiene extensa aplicación práctica al considerar las *ondas de radio en la ionosfera*.

§ 81. Ondas de radio en la ionosfera

1. Ionización de la atmósfera y refracción de ondas de radio. En rasgos generales, la descripción de la ionosfera y las particularidades de la propagación de diversas ondas de radio ionosféricas se dio en los §§ 41, 42. Retornando a esta cuestión, para la explicación de los procesos electromagnéticos, ahora, haremos uso del modelo del plasma confeccionado en el § 80.

Sobre la estructura de la ionosfera ya hablamos con suficiente detalle. La causa principal de la ionización de los gases de la atmósfera, es la radiación ultravioleta del Sol, con mayor exactitud, la radiación en una banda de ondas más cortas que 0,1μ; señalemos que a esta zona del espectro llega una parte insignificante de la radiación solar. Una radiación electromagnética con ondas de mayor longitud (con menor energía de cuantos) no puede efectuar el trabajo necesario para la ionización. Según su importancia, el segundo factor de ionización pueden considerarse los flujos corpusculares que, principalmente, también son de origen solar.

¿Qué provoca la formación de las capas ionizadas descritas en el § 42? Esto se puede comprender al considerar el ejemplo de una atmósfera idealizada de composición homogénea. La densidad de la energía de flujo ionizante que viene a la Tierra, a medida que penetra en la atmósfera disminuye a causa de la absorción. Por lo contrario, la densidad del gas disminuye al crecer la distancia de la Tierra. Debido a esto, la cantidad de electrones libres por unidad de volumen N', como función de la altura tiene el máximo: a cierta altura la ionización es la más intensiva y, en ella, se encuentra el "nucleo" de la capa.

En el § 41, punto 2, fue descrito el cuadro de la refracción en la ionosfera. Para fundamentarlo tenemos que cerciorarnos de que durante la entrada vertical en la capa ionosférica, a medida de elevarse la ionización, la densidad óptica del medio *disminuye*. Pero este hecho, se desprende directamente de la fórmula (80.15), o la (80.19). En realidad, la permitividad dieléctrica (o bien, el módulo ε) disminuye al aumentar N' (siendo $\omega > \omega_p$). Concretando la fórmula (41.11) con ayuda de las expresiones (80.15) y (80.15a), se tiene

$$\operatorname{sen} \vartheta_0 = \sqrt{1 - \frac{e^2 N'}{\varepsilon_0 m \omega^2}} = \sqrt{1 - 80{,}6 \frac{N'}{f^2}}. \qquad (81.1)$$

Aquí N' es el valor de la concentración a la altura del "retorno del rayo" a la frecuencia f dada y el ángulo inicial ϑ_0.

A pesar de la simplicidad de la interpretación (más adelante ampliaremos la exposición), la igualdad (81.1) se utiliza frecuentemente para diversas apreciaciones. Sea que el rayo está dirigido verticalmente ($\vartheta_0 = 0$), en tal caso la igualdad (81.1) se satisface al reducir a cero la expresión subradical, o sea, cuando $\omega^2 = e^2 N'/\varepsilon_0 m = \omega_p^2$ (en virtud de la (80.15b) la frecuencia circular es igual a la del plasma). Supongamos que en tal caso $N'_{máx}$ es el valor máximo de la concentración electrónica en la capa dada; calculemos la frecuencia

$$f_{crit} = \frac{\omega_{p\ máx}}{2\pi} = \sqrt{80{,}6 N'_{máx}}, \qquad (81.2)$$

que se denomina *límite (crítica)*. Podemos afirmar que para frecuencias menores ($f < f_{crit}$) las ondas se reflejarán totalmente en la ionosfera y siendo mayores ($f > f_{crit}$), pasan a través de ella. Efectivamente, desde la frontera inferior de la capa hasta su núcleo, la concentración varía en los límites desde cero hasta $N'_{máx}$, de forma que en el primer caso se hallará obligatoriamente un nivel para él que $\omega = \omega_p$, es decir, se cumple la condición de reflexión total a incidencia normal. En el segundo caso, tal nivel no existe.

Para todo rayo oblicuo ($\vartheta_0 \neq 0$), existe su *frecuencia máxima de explotación*

$$f(\vartheta_0)_{máx} = \frac{\omega_{p\ máx}}{2\pi \cos \vartheta_0} = \frac{\sqrt{80{,}6 N'_{máx}}}{\cos \vartheta_0} > f_{crit}. \qquad (81.3)$$

En virtud de la (81.1), cuando $f < f(\vartheta_0)_{máx}$, en la capa se encontrará el nivel de retorno del rayo, y si $f > f(\vartheta_0)_{máx}$ el rayo saldrá de los límites de la ionosfera.

El ángulo ϑ_0 es siempre menor que el recto; su valor máximo $\vartheta_{0\ máx}$ (fig. 81.1), será

$$\vartheta_{0\ máx} = \text{arcsen}\ \frac{R_0}{R_0 + h},$$

siendo h la altura del rayo y R_0 el radio de la Tierra. Por esta razón, se crea la limitación de alta frecuencia de las ondas ionosféricas:

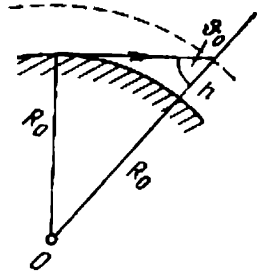


Fig. 81.1.

$$f \leqslant f(\vartheta_{0\ máx})_{máx} = \frac{\omega_{p\ máx}}{2\pi \cos \vartheta_{0\ máx}} = \frac{\sqrt{80{,}6 N'_{máx}}}{\cos \vartheta_{0\ max}}. \qquad (81.5)$$

Recordemos (§ 42, punto 3) que esta frontera se encuentra en la banda de las ondas cortas. En raros casos, en los años de la máxima actividad solar durante el día, la refracción en la ionosfera resulta ser suficiente para el retorno del rayo con $\lambda \lesssim 10$ m (en la parte de ondas más largas de la banda de ondas ultracortas).

Como ya decíamos, los sencillos razonamientos, basados en la aplicación de la igualdad (81.1) y sus corolarios, pueden ser utilizadas en la práctica. Tomando en la fig. 42.1 los valores de N', se puede confirmar con facilidad, las singularidades de banda de las ondas ionosféricas indicadas en el § 42, punto 3, condicionadas *por la concentración de electrones. La absorción (y su influencia* en la densidad óptica del medio) no se tiene en este caso en cuenta. Pero incluso, sin absorción la aplicación de la óptica geométrica *que es la base para todo lo expuesto anteriormente no se puede* conceptuar argumentada para regiones donde la permitividad es cercana a cero. La cuestión consiste en que, en este caso, aumenta ilimitadamente la longitud de onda λ en el medio y la variación de las propiedades del medio a distancias de un orden de λ ya no puede ser pequeña y, por esto, el criterio (56.20) no se cumple.

2. Absorción y dispersión. Conclusión. Saliendo de los límites de la óptica geométrica, consideremos una onda electromagnética plana homogénea que se propaga en un plasma infinito homogéneo. Hablando en rigor, la solución de tal problema electromagnético se haya en las fórmulas generales, obtenidas en el § 33; es sólo necesario concretizarlas. Ya que, en virtud de la (80.19a),

$$\varepsilon' = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}\right), \quad \operatorname{tg}\Delta = \frac{\nu}{\omega\left(\dfrac{\omega^2 + \nu^2}{\omega_p^2} - 1\right)}, \tag{81.6}$$

siendo $\omega_p^2 = e^2N'/\varepsilon_0 m$ *la frecuencia de plasma (80.15b), las fórmu*las (33.15) que expresan las partes real e imaginaria del número de onda complejo, tomarán la forma

$$k' = k_0\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}\right)\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2\left(\dfrac{\omega^2 + \nu^2}{\omega_p^2} - 1\right)^2}}\right]}, \tag{81.7}$$

$$k'' = k_0\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}\right)\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2\left(\dfrac{\omega^2 + \nu^2}{\omega_p^2} - 1\right)^2}}\right]}$$

($k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$). Si $\operatorname{tg}\Delta \ll 1$, es decir, el gas ionizado puede considerarse como un dieléctrico imperfecto, son cómodas las fórmulas aproximadas (33.16a), de acuerdo con las cuales y teniendo en cuenta los (81.6)

$$k' \approx k_0\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}}, \quad k'' \approx k'\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{2}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}}\,\frac{\nu\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2 - \omega_p^2}. \tag{81.8}$$

El más largo recorrido en la ionosfera, lo realizan las ondas cortas (§ 42, punto 3), siendo con todo, $\omega^2 \gg \omega_p^2$ por toda la longitud del recorrido, salvo en una pequeña región cerca del punto de retorno del rayo; además, en esta banda $\omega^2 \gg \nu^2$. En este caso, de las (81.8), se obtiene

$$k'' \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{2}\,\nu\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2. \qquad (81.9)$$

El factor de amortiguamiento crece linealmente al aumentar la frecuencia de colisiones ν y es inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia ω.

Dado ahora que $\operatorname{tg}\Delta \gg 1$ (el medio es conductor). Entonces, de acuerdo con las (33.17a) y (81.6)

$$k' \approx k'' \approx k_0\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\nu^2}}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\Delta}{2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu_0}{2}}\sqrt{\frac{\omega\nu\omega_p^2}{\omega^2+\nu^2}}. \qquad (81.10)$$

Este resultado es válido para frecuencias muy bajas; tomando en cuenta que en este caso $\omega^2 \ll \nu^2$, se tiene

$$k' \approx k'' \approx \sqrt{\varepsilon_0\mu_0/2}\,\omega_p\sqrt{\omega/\nu}, \qquad (81.11)$$

es decir, el factor de amortiguamiento crece como $\sqrt{\omega}$ con una frecuencia ω, mientras que al aumentar la frecuencia de colisiones ν, disminuye como $1/\sqrt{\nu}$.

Para finalizar, tomemos el caso más sencillo, cuando se pueden despreciar las colisiones (su frecuencia es muy pequeña). En virtud de la (80.15b), en este caso

$$k = k_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} = k_0\sqrt{1-\left(\frac{f_{crit}}{f}\right)^2}. \qquad (81.12)$$

Es interesante que la dependencia entre el número de onda y la frecuencia tiene aquí el mismo carácter que en el caso de las ondas rápidas E y H en un sistema de guiado (§ 62, punto 3): compárense las fórmulas (81.12) y (62.18). Si $\omega < \omega_p$ el proceso electromagnético pierde el carácter de onda progresiva y el campo se amortigua por la ley (compárese con las (62.22))

$$e^{-ikz} = e^{-k''z}, \quad k'' = k_0\sqrt{(f_{crit}/f)^2-1} \geqslant 0 \qquad (81.13)$$

cuando $f \leqslant f_{crit}$ (f_{crit} se determina por la fórmula (81.2)). La velocidad de grupo de la onda a examinar, resulta ser absolutamente igual que la velocidad para las ondas rápidas sin absorción:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = v_0\sqrt{1-\left(\frac{f_{crit}}{f}\right)^2}, \quad f \geqslant f_{crit} \qquad (81.14)$$

(compárese con la (62.23)); aquí $v_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Por esta razón, también

$$v_f v_{gr} = v_0^2. \qquad (81.15)$$

La ionosfera es un medio considerablemente dispersante, lo que, naturalmente, se desprende de la expresión general de k' (81.7).

En conclusión indiquemos que las leyes relativamente sencillas, establecidas anteriormente en los puntos 1, 2, son importantes para el estudio de líneas de radiocomunicación reales; más adelante (§ 88) esto se tendrá en cuenta. Sin embargo, no hemos tomado todavía en consideración importantes singularidades de la propagación de ondas ionosféricas de radio. Entre ellas, hay que señalar la influencia del campo magnético de la Tierra, a causa del cual el plasma de la ionosfera posee en realidad anisotropía de género particular, llamada *girotropia*. Esta última cuestión sera tratada a continuación, en el § 84, punto 1.

11. Medios anisótropos

El concepto de *anisotropía* fue introducido en el § 5, punto 4, sin embargo, en lo sucesivo se consideraron medios isótropos y sólo a veces, se indicaban ciertas limitaciones al difundir unos u otros principios generales a los medios anisótropos.

La anisotropia se manifiesta durante la ordenación estructural, aunque la propia ordenación no lleva siempre a la anisotropía. Los cristales son estructuras de ordenación natural. En la técnica artificialmente se obtienen, con frecuencia, estructuras macroscópicas *que pueden compararse con los cristales; tales son los dieléctricos artificiales* que se utilizan extensamente en la técnica de antenas.

En una serie de casos, la ordenación se causa por medio de factores externos que provocan una orientación determinada de los *procesos elementales en la materia. Al imponer un campo magnético* constante, el plasma se convierte en dieléctrico anisótropo respecto a un campo alternativo, lo que debe tenerse en cuenta al estudiar las ondas ionosféricas. Análogamente se comportan los magnéticos, de los cuales merecen ser mencionados los *ferritas* que han encontrado amplia región de aplicación en la radiotecnia de frecuencias ultraelevadas, gracias a su "transparencia" (en diferencia de los metales ferromagnéticos).

En un campo magnético constante, el ferrito se convierte en un magnético anisótropo respecto al campo alternativo. El tipo de anisotropía propia de dichos medios, se llama *girotropía*. Los medios girótropos no se someten al principio de reprocidad y esta circunstancia se emplea para la selección de los procesos ondulatorios según su dirección.

Para la técnica es también muy importante la posibilidad de controlar el proceso ondulatorio, mediante la "magnetización" de los ferritos. En la actualidad, la multicidad de los dispositivos ondulatorios en los que se emplean ferritos magnetizados es extremadamente grande.

§ 82. Naturaleza y manifestaciones de la anisotropía

1. Cristales y dieléctricos artificiales. En el § 77 fueron considerados sistemas, cuya estructura se repite en cierta dirección rectilínea; ellos fueron llamados periódicos. Es fácil imaginar sistemas con periodicidad tridimensional. Tal es, en rasgos generales, la estructura de los cristales. Nosotros no podemos detenernos detalladamente en el carácter de la ligazón de los iones o los átomos en los cristales, así como en las propiedades de su simetría; estas cuestiones se tratan en la física de los cuerpos sólidos y en cristalografía (véase, por ejemplo, [E.4]). La estructura (morfología) cristalina se caracteriza mediante la llamada "red espacial", en forma de un sistema ordenado de puntos. Son posibles, por ejemplo, puntos que van periódicamente a lo largo de las tres direcciones ortogonales (fig. 82.1); en este caso, la "célula elemental" de la red es un paralelepípedo.

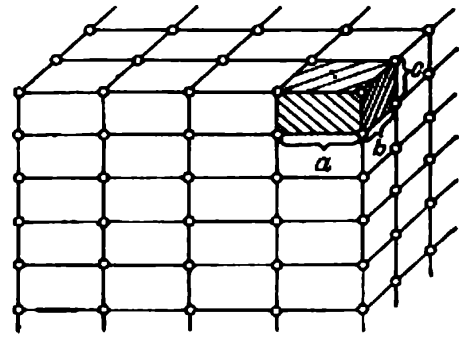


Fig. 82.1.

Vamos a limitarnos a este tipo de red espacial y, separando nuestra atención de la estructura real de una materia cristalina, supongamos que en cada nudo se encuentra una partícula polarizada (digamos, una molécula). Separando un volumen macroscópicamente pequeño ΔV, consideremos varios casos de aplicación del campo exterior (fig. 82.2, *a*, *b*, *c*). En cada uno de ellos, las partículas adquieren un momento eléctrico en el sentido del vector $\boldsymbol{E}$ y si se admite que el campo medio en cualquier punto de ΔV sólo depende de factores exteriores (manantiales) y de la densidad media de las partículas, entonces, a todas las direcciones del campo (fig. 82.2, *a*, *b*, *c*), el volumen ΔV adquiere un momento $\boldsymbol{p}_{\Delta V}$ de un mismo valor absoluto, que siempre es paralelo a $\boldsymbol{E}$. La materia se comporta como una substancia *isótropa* (compárese en el § 18, punto 2). En realidad, la polarización de las partículas depende de su interacción que es diferente para diversas orientaciones del campo exterior respecto a la estructura de la materia. En los casos mostrados en la fig. 82.3, *a* y en la fig. 82.3, *b*, el momento $\boldsymbol{p}_{\Delta V}$ es paralelo a $\boldsymbol{E}$, pero tiene distintos valores absolutos; por esta razón, en el tercer caso (en la fig. 82.3), los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{p}_{\Delta V}$ ya no son paralelos. Este es un tipo de *anisotropía* condicionado por el aspecto de la red. No existe si la red es cúbica ($a=b=c$ en la fig. 82.1). Sin embargo la anisotropía se engendra por las propias propiedades de las partículas. Imaginémonos que en los nudos de la red se encuentran dipolos de orientación rígida, sin "interacción"; la magnitud $\boldsymbol{p}_{\Delta V}$ se determinará, en este caso, sólo por la componente coaxial del vector $\boldsymbol{E}$ y variará junto con su dirección.

A pesar de poseer cierto artificio, los razonamientos anteriores esclarecen la naturaleza de la anisotropía de las propiedades dieléctricas de los cristales, como estructuras ordenadas. Escogiendo del debido modo los ejes x, y, z de coordenadas, el tensor de la

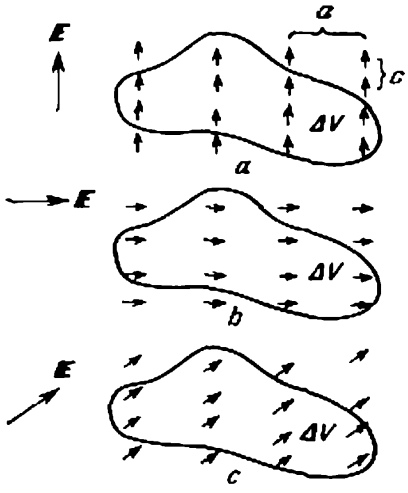


Fig. 82.2.

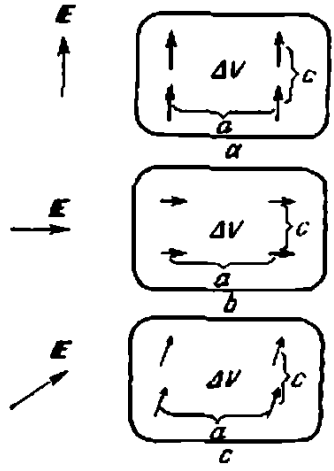


Fig. 82.3.

permitividad (§ 5, punto 4), tiene forma diagonal

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \qquad (82.1)$$

Si la estructura tiene una dirección destacada (con ella se hace coincidir el eje z), entonces en la (82.1) $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ y el cristal se denomina *uniaxial*. Para la red de la fig. 82.1, la uniaxilidad corresponde, por ejemplo, al caso cuando $a = b \neq c$ ($c \| z$), o bien $a = b \neq c$, pero las mismas partículas tienen eje de simetría destacado.

Señalemos, ahora, que se puede tomar un sistema ordenado de bolas, elipsoides, discos o cuerpos de otra forma (en caso particular, metálicos) y considerar en él campos espacialmente promediados. De esta manera, al tratar un proceso ondulatorio libre en tal sistema periódico, el objeto de estudio sólo será el armónico espacial nulo, al que corresponde el término para $n = 0$ en la (77.5). Con tal enfoque, el sistema periódico dado es, en grado suficiente, análogo a una estructura cristalina. Podemos afirmar, por ejemplo, que una red cúbica de bolas (si ellas mismas son de material isótropo) se comporta como un medio isótropo (fig. 82.4, *a*), mientras que cuando la célula elemental tiene forma de un paralelepipedo (fig. 82.4, *b*), se observará anisotropía; pero ésta deberá ser despreciablemente pequeña a distancias considerables entre las bolas. La red formada de discos (fig. 82.4, *c*) o de elipsoides (fig. 82.4, *d*)

es ya anisótropa a causa de la asimetría de los elementos por separado; una red cúbica de este tipo es semejante a un cristal uniaxial. Sin embargo, conviene tener en cuenta que para un campo electromagnético alternativo, no sólo la permitividad, sino también la permeabilidad magnética de tal dieléctrico artificial, es un tensor. Este hecho es evidente, si se tiene en cuenta que el vector $\boldsymbol{H}$ que se excita en el sistema ("difractado") del campo bajo la influencia del campo exterior, depende de la orientación de este último.

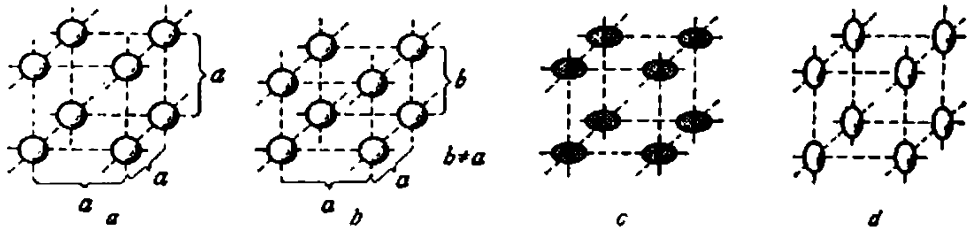


Fig. 82.4.

Los dieléctricos artificiales se utilizan en la técnica de antenas para fabricar lentes. Desde cierto punto de vista (con respecto al campo promediado), se puede considerar como dieléctrico artificial todo sistema periódico, lo que ya se indicó en el § 77, punto 2.

El problema de la determinación de los parámetros equivalentes de un dieléctrico artificial, se puede resolver fácilmente con una aproximación cuasiestática despreciando también la interacción de elementos independientes, es decir, suponiendo que cada uno de ellos reacciona al campo, como un cuerpo aislado en electrostática (magnetostática). Por ejemplo, teniendo en cuenta que una esfera metálica en un campo electrostático homogéneo de una intensidad $\boldsymbol{E}$, es semejante a un dipolo con momento $\boldsymbol{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \boldsymbol{E}$ (20.33)), podemos atribuir a un dieléctrico artificial que contiene en la unidad de volumen una cantidad N' de bolas, una polarizabilidad $\boldsymbol{P} = 4\pi N'\varepsilon_0 R^3 \boldsymbol{E}$ y, respectivamente, una constante dieléctrica

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + 4\pi N' R^3). \qquad (82.2)$$

Es natural que esta fórmula sólo resulta ser en cierto grado justa, cuando $R \ll \lambda$ y al haber entre las bolas grandes distancias.

En conclusión subrayemos que los factores físicos que condicionan la anisotropía de los cristales naturales son muy variados. Una serie de cristales tienen anisotropía magnética.

2. Plasma magnetizado. Un ejemplo importante de un medio que manifiesta anisotropía bajo la influencia del factor exterior de orientación de los procesos elementales, proporciona el plasma en un campo magnético constante. Retornando a la ecuación de movimiento (80.16), introducimos complementariamente a $g\boldsymbol{E}$, la fuerza de Lorentz $q[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}_0] = q\mu_0[d\boldsymbol{r}/dt, \boldsymbol{H}_0]$ que en este caso actúa en la partícula, siendo $\boldsymbol{H}_0$ la intensidad del campo magnético cons-

tante. La ecuación toma la forma

$$\frac{q}{m}\boldsymbol{E}+\frac{q}{m}\mu_0\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ \boldsymbol{H}_0\right]=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt}+\nu\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{82.3}$$

o bien, en las amplitudes complejas

$$\omega(\omega-i\nu)\dot{\boldsymbol{r}}_m+i\omega\frac{q}{m}\mu_0[\dot{\boldsymbol{r}}_m,\ \boldsymbol{H}_0]=-\frac{q}{m}\dot{\boldsymbol{E}}_m. \tag{82.3a}$$

La polarizabilidad del medio $\boldsymbol{P}$, se determina como lo hicimos en el § 80, punto 2, al obtener la fórmula (80.14), teniendo sólo en cuenta los electrones; entonces $\dot{\boldsymbol{P}}_m=N'g\dot{\boldsymbol{r}}_m$ y $q=e<0$. Dirijamos el eje z a lo largo del vector $\boldsymbol{H}_0$: $\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{z}_0H_0$. También haremos uso de la designación $\Omega=\mu_0\frac{|e|}{m}H_0$ (79.7a) y $\omega_p^2=e^2N'/\varepsilon_0m$ (80.15b). Al mismo tiempo de la (82.3a), se obtiene

$$\omega(\omega-i\nu)\dot{\boldsymbol{P}}_m-i\omega\Omega[\boldsymbol{P}_m,\ \boldsymbol{z}_0]=-\varepsilon_0\omega_p^2\dot{\boldsymbol{E}}_m, \tag{82.4}$$

o en forma de coordenadas

$$\begin{aligned}\omega(\omega-i\nu)\dot{P}_{mx}-i\omega\Omega\dot{P}_{my}&=-\varepsilon_0\omega_p^2\dot{E}_{mx},\\ i\omega\Omega\dot{P}_{mx}+\omega(\omega-i\nu)\dot{P}_{my}&=-\varepsilon_0\omega_p^2\dot{E}_{my},\\ \omega(\omega-i\nu)\dot{P}_{mz}&=-\varepsilon_0\omega_p^2\dot{E}_{mz}.\end{aligned} \tag{82.4a}$$

Resolviendo este sistema, expresamos las componentes del vector $\dot{\boldsymbol{P}}_m$:

$$\begin{aligned}\dot{P}_{mx}&=-\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega\,|(\omega-i\nu)^2-\Omega^2|}[(\omega-i\nu)\dot{E}_{mx}+i\Omega\dot{E}_{my}],\\ \dot{P}_{my}&=-\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega\,|(\omega-i\nu)^2-\Omega^2|}[-i\Omega\dot{E}_{mx}+(\omega+i\nu)\dot{E}_{my}],\\ \dot{P}_{mz}&=-\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega(\omega-i\nu)}\dot{E}_{mz},\end{aligned} \tag{82.5}$$

lo que conviene considerar como la forma desarrollada de la correlación $\dot{\boldsymbol{P}}_m=\varepsilon_0\overleftrightarrow{\chi^e}\dot{\boldsymbol{E}}_m$ (§ 5, puntos 2 y 4): el medio es anisótropo. Sin escribir la componente del tensor de la susceptibilidad eléctrica del plasma magnetizado $\overleftrightarrow{\chi^e}$, pasamos de inmediato al tensor de la constante dieléctrica $\overleftrightarrow{\varepsilon}=\varepsilon_0(\overleftrightarrow{I}+\overleftrightarrow{\chi^e})$ (5.15). Este tiene la forma

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon & -i\beta & 0\\ i\beta & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{pmatrix}, \tag{82.6}$$

siendo

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 \left\{ 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega - i\nu)}{\omega \left[(\omega - i\nu)^2 - \Omega^2 \right]} \right\}, \quad \dot{\beta} = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2 \Omega}{\omega \left[(\omega - i\nu)^2 - \Omega^2 \right]},$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega - i\nu)} \right], \quad \omega_p^2 = \frac{e^2 N'}{\varepsilon_0 m},$$

$$\Omega = \mu_0 \frac{|e|}{m} H_0. \tag{82.7}$$

Debido a que la constante dieléctrica del medio resulta ser un tensor característico de simetría oblicua de la forma (82.6), dicha constante posee una serie de propiedades específicas que serán examinadas en el § 83; tal permitividad se denomina *de girotropía*.

Un campo magnético constante, orientado por el eje z, crea en el plasma una dirección destacada; en este caso, a lo largo del eje z se conservan las propiedades anteriores: la componente del tensor de la constante dieléctrica $\dot{\varepsilon}_z$ (82.7) no se diferencia de $\dot{\varepsilon}$ (80.19) sin campo magnético. El parámetro Ω resulta ser ni más ni menos que la frecuencia circular de rotación de los electrones en el campo magnético (§ 79, punto 2) que, en el caso dado, transcurre en el plano xOy; tal frecuencia se denomina *frecuencia giroscópica* de los electrones. El proceso electromagnético en el plasma magnetizado tiene carácter de resonancia: la aproximación de ω a Ω provoca una *resonancia giromagnética*. Tomando el caso idealizado cuando no hay absorción ($\nu = 0$), advertimos que para $\omega \to \Omega$, el valor absoluto de las componentes del tensor de la constante dieléctrica en los dos primeros renglones de la (82.6) crece ilimitadamente: $|\dot{\varepsilon}| \to \infty$ y $|\dot{\beta}| \to \infty$. Notemos que para $\nu = 0$ el tensor es *hermitiano* (Suplemento 9): $\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx}^*$ (en virtud de la (82.6) $\dot{\varepsilon}_{xy} = -i\dot{\beta}$ y $\dot{\varepsilon}_{yx} = i\dot{\beta}$).

El origen de la girotropía del plasma magnetizado tiene extremadamente sencilla explicación: bajo la influencia del campo magnético constante, los electrones "se hacen girar" en un plano perpendicular a este campo, si en dicho plano se encuentra el vector de velocidad. Dado, por ejemplo, que el vector $\boldsymbol{E}$ está dirigido a lo largo del eje x y, por consiguiente, existe la componente v_x; la fuerza de Lorentz $q[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}_0]$ proporciona con todo un movimiento en dirección al eje y y se crean las respectivas componentes de la polarizabilidad $\boldsymbol{P}$ y la inducción $\boldsymbol{D}$. La simetría oblicua del tensor $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ está condicionada por la dirección del movimiento de rotación de los electrones. La girotropía no se manifiesta si $\boldsymbol{E}$ y, respectivamente, $\boldsymbol{v}$ están dirigidos paralelamente a $\boldsymbol{H}_0$ (por el eje z), puesto que en tal caso no actúa la fuerza de Lorentz.

Remarquemos, en conclusión, que a causa de haber despreciado los iones al deducir el tensor de la constante dieléctrica, las fórmulas (82.7), en uno u otro grado, pierden su validez en las proximidades de las frecuencias giroscópicas correspondientes $\Omega' =$

$= \mu_0 \frac{|e|}{m'} H_0$, siendo m' la masa de un ion. Ya que $m' \gg m_1$, entonces $\Omega' \ll \Omega$.

3. Ferritas magnetizadas. A los magnéticos es propia la girotropia provocada por la precesión del vector $\boldsymbol{M}$ (§ 79, punto 4). Esta se manifiesta en alto grado en las *ferritas* que teniendo propiedades ferromagnéticas, según el carácter de las pérdidas eléctricas ($\operatorname{tg}\Delta \ll 1$) son dieléctricos en frecuencias ultraelevadas, es decir, son "transparentes" para las ondas electromagnéticas.

Tomando la ecuación de movimiento de la imanación (79.24), señalemos, primeramente, que siendo el campo constante ($\boldsymbol{M} = \text{const}$), $[\boldsymbol{M}, \boldsymbol{H}] = 0$, es decir, los vectores $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{H}$ son paralelos, y el medio es isótropo. Dado, ahora, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{M}(t)$ y $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_0(t)$, donde con los índices nulos se han marcado las componentes constantes. Introduciendo estas funciones en la (79.24), se obtiene

$$\frac{d\boldsymbol{M}(t)}{dt} = \gamma \{[\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{H}(t)] + [\boldsymbol{M}(t), \boldsymbol{H}_0] + [\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{H}_0] + [\boldsymbol{M}(t), \boldsymbol{H}(t)]\}. \tag{82.8}$$

Si, como sucede con frecuencia, $M(t) \ll M_0$ y $H(t) \ll H_0$, se puede despreciar el término cuadrático $[\boldsymbol{M}(t), \boldsymbol{H}(t)]$ y la ecuación (82.8) *resulta linealizada respecto a la variable componente*. Considerando oscilaciones armónicas, es válido el empleo del método de las amplitudes complejas, haciendo las sustituciones $\boldsymbol{M}(t) \to \dot{\boldsymbol{M}}_m e^{i\omega t}$ y $\boldsymbol{H}(t) \to \dot{\boldsymbol{H}}_m e^{i\omega t}$. Entonces, de la (82.8) se desprende

$$[\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{H}_0] = 0, \quad i\omega \dot{\boldsymbol{M}}_m = \gamma \{[\boldsymbol{M}_0, \dot{\boldsymbol{H}}_m] + [\dot{\boldsymbol{M}}_m, \boldsymbol{H}_0]\}. \tag{82.9}$$

Dirijamos el eje z a lo largo del campo constante ($\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{z}_0 M_0$, $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{z}_0 H_0$). Representando la segunda igualdad (82.9) en la forma de coordenadas y trasladando las componentes del vector $\dot{\boldsymbol{M}}_m$ a la izquierda, se tiene

$$\begin{aligned} i\omega \dot{M}_{mx} - \gamma H_0 \dot{M}_{my} &= -\gamma M_0 \dot{H}_{my}, \\ \gamma H_0 \dot{M}_{mx} + i\omega \dot{M}_{my} &= \gamma M_0 \dot{H}_{mx}, \\ i\omega \dot{M}_{mz} &= 0. \end{aligned} \tag{82.9a}$$

Resolviendo el sistema obtenido respecto a $\dot{M}_{mx}$, $\dot{M}_{my}$ y $\dot{M}_{mz}$, hallamos

$$\begin{aligned} \dot{M}_{mx} &= \frac{|\gamma| M_0}{\omega^2 - \Omega^2} \left(-\Omega \dot{H}_{mx} + i \frac{\gamma}{|\gamma|} \omega \dot{H}_{my} \right), \\ \dot{M}_{my} &= \frac{|\gamma| M_0}{\omega^2 - \Omega^2} \left(-i \frac{\gamma}{|\gamma|} \omega \dot{H}_{mx} - \Omega \dot{H}_{my} \right), \\ \dot{M}_{mz} &= 0, \end{aligned} \tag{82.10}$$

donde, en virtud de la (79.23) se ha designado: $\Omega = |\gamma| H_0$. Esto es ni más ni menos que la correlación $\boldsymbol{M}_m = \mu_0 \overleftrightarrow{\chi}^m \boldsymbol{H}_m$ (§ 5, puntos 2 y 4) escrita detalladamente y que certifica la anisotropía magné-

tica del medio. El tensor de la permeabilidad magnética $\overleftrightarrow{\mu} = \mu_0 (\overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\chi}^m)$, como se desprende de aquí, tiene la forma

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \dot{\mu} & -i\dot{\alpha} & 0 \\ i\dot{\alpha} & \dot{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mu}_z \end{pmatrix}, \tag{82.11}$$

siendo

$$\dot{\mu} = \mu_0 - \frac{\Omega |\gamma| M_0}{\omega^2 - \Omega^2},$$
$$\dot{\alpha} = -\frac{\omega \gamma M_0}{\omega^2 - \Omega^2} \tag{82.12}$$
$$\dot{\mu}_z = \mu_0, \quad \Omega = |\gamma| H_0.$$

El tensor $\overleftrightarrow{\mu}$ (82.11) tiene la misma estructura que el tensor $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ (82.6): el medio es girótropo. El origen de la girotropía se explica, porque el campo constante crea en el magnético (ferrita) una dirección destacada, alrededor de la cual se produce la precesión del vector $\boldsymbol{M}$. La frecuencia $\Omega = |\gamma| H_0$ es la *frecuencia de precesión propia*; puesto que el ferromagnetismo está condicionado por los momentos magnéticos de espín de los electrones, el valor de la *relación giromagnética* γ para las ferritas resulta ser próximo al valor $-2{,}21 \cdot 10^5$ $(\text{A/m})^{-1}\ \text{s}^{-1})$ [1] indicado en el § 79, punto 4. La aproximación de la frecuencia circular del proceso electromagnético ω a la Ω, engendra *la resonancia ferromagnética*; para $\omega \to \Omega$, los valores absolutos de las componentes del tensor $\overleftrightarrow{\mu}$, de acuerdo con las (82.12), crecen infinitamente en los dos primeros renglones: $|\dot{\mu}| \to \infty$ y $|\dot{\alpha}| \to \infty$. El tensor $\overleftrightarrow{\mu}$ es *hermitiano* (Suplemento 9). La componente μ_z no se diferencia de la constante magnética ("permeabilidad del vacío") μ_0. Junto con la variación del sentido de imanación constante (es decir, con el cambio de los signos de H_0 y M_0), cambia su signo $\dot{\alpha}$, mientras que $\dot{\mu}$ queda invariable.

Según una representación simplificada, el mecanismo de la resonancia ferromagnética consiste en que al coincidir ω y Ω, el movimiento de precesión del vector $\boldsymbol{M}$ efectúa un ciclo sincrónicamente con el "tambaleo" del vector resultante $\boldsymbol{H}$, desde la posición $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{H}_m$ hasta la posición $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_m$ (fig. 82.5). Ya que $\boldsymbol{H}$ determina el eje instantáneo de precesión su radio crece (con la aproximación obtenida infinitamente, lo que contradice a la (79.22)).

---

[1] En la práctica, en las fórmulas (82.12) las magnitudes ω y Ω se sustituyen por las frecuencias f y F que se miden en MHz. En virtud de esto, tenemos la correlación: $F = \gamma' H_0$, siendo $\gamma' = 0{,}035$ MHz $(\text{A/m})^{-1}$.

Las expresiones (82.12) están idealizadas, no sólo por emplear la linealización del problema (en caso contrario hubiera sido imposible caracterizar el medio por medio del tensor $\overleftrightarrow{\mu}$ en los límites del método de amplitudes complejas), sino que también, en particular, porque la ecuación de movimiento (79.24) no tiene en cuenta la absorción de energía. Podemos obtener las expresiones de las componentes del tensor de la permeabilidad magnética, tomando en cuenta las pérdidas de energía, partiendo, por ejemplo, de la ecuación de Landau—Lifshitz (79.25); las fórmulas correspondientes serán halladas por el lector en la literatura especial [E.5—7]. Las componentes del tensor $\overleftrightarrow{\mu}$ de un medio absorbente son magnitudes complejas: $\mu = \mu' - i\mu''$, $\alpha = \alpha' - i\alpha''$, $\mu_z = \mu_z' - i\mu_z''$. Ellas pueden ser determinadas por medio de mediciones especiales. En la fig. 82.6 se representan cualitativamente las relaciones entre estas magnitudes y H_0. El tensor $\overleftrightarrow{\mu}$ de un medio absorbente, no es hermitiano. Las curvas en la fig. 82.6 caracterizan una resonancia ferromagnética real.

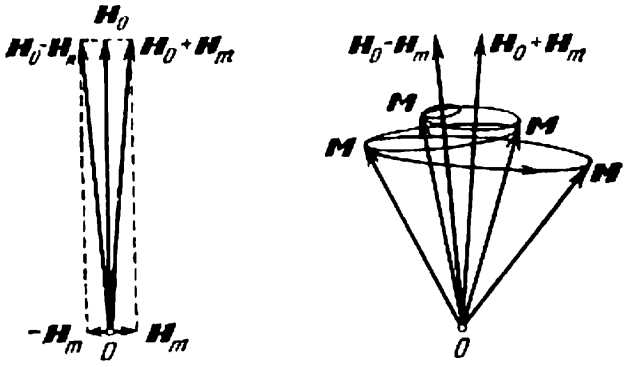


Fig. 82.5.

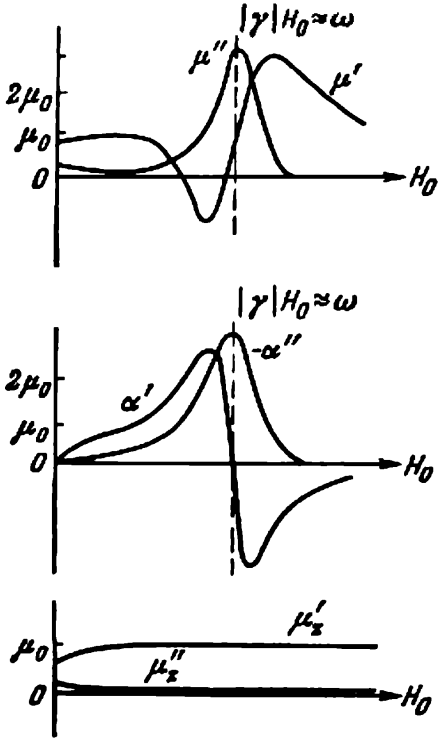


Fig. 82.6.

Notemos en conclusión que con objeto de tomar en consideración la absorción se puede introducir el concepto de *frecuencia propia compleja de precesión* $\dot{\Omega} = \Omega' + i\Omega''$ (compárese con el § 69, punto 3). En este

caso en las fórmulas (82.12) se efectúa la sustitución $\Omega \to \dot{\Omega}$. Si la curva de resonancia es suficientemente estrecha (la dependencia μ'' o α'' en la fig. 82.6), se supone que: $\Omega' = \Omega$ y $\Omega'' = \Delta\Omega_0 = \Delta H_0/|\gamma|$, donde ΔH_0 es la semianchura de la curva de resonancia del tipo mostrado en la fig. 82.6 y que se comprende de la misma manera que en el § 71, punto 5; la indicada aproximación corresponde a las fórmulas (71.15).

§ 83. Campos y ondas en medios girótropos

1. Campos libres en medios girótropos. Para comprender las singularidades electrodinámicas más importantes de los medios girótropos, es conveniente estudiar los tipos característicos de campos libres en dichos medios. Comencemos por escribir las ecuaciones principales de electrodinámica.

Tomemos, primeramente, un magnético homogéneo infinito que en un campo continuo de intensidad $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{z}_0 H_0$, adquiere para un campo alternativo propiedades girótropas y se caracteriza por el tensor de permeabilidad magnética $\overleftrightarrow{\mu}$ de la forma (82.11). Las ecuaciones homogéneas de Maxwell respecto a las amplitudes complejas (ecuaciones (29.11) para $\dot{j}_m^{ex} = 0$), toman la forma

$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_m = i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m, \quad \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{E}}_m = -i\omega\overleftrightarrow{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_m \tag{83.1}$$

o bien, en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial z} &= i\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{mx}, \\
\frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} &= i\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{my}, \\
\frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y} &= i\omega\dot{\varepsilon}\dot{E}_{mz}
\end{aligned} \tag{83.1a}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial z} &= -i\omega(\dot{\mu}\dot{H}_{mx} - i\dot{\alpha}\dot{H}_{my}), \\
\frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} &= -i\omega(i\dot{\alpha}\dot{H}_{mx} + \dot{\mu}\dot{H}_{my}), \\
\frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} &= -i\omega\dot{\mu}_z\dot{H}_{mz}.
\end{aligned} \tag{83.1b}$$

En el caso del plasma semejantemente magnetizado ($\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{z}_0 H_0$), en lugar de las (83.1), se tiene

$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_m = i\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{E}}_m, \quad \operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{E}}_m = -i\omega\dot{\mu}\dot{\boldsymbol{H}}_m, \tag{83.2}$$

siendo $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ el tensor de permitividad (82.6). En las coordenadas cartesianas las ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial z} &= i\omega (\dot{\varepsilon}\dot{E}_{mx} - i\dot{\beta}\dot{E}_{my}), \\
\frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} &= i\omega (i\dot{\beta}\dot{E}_{mx} + \dot{\varepsilon}\dot{E}_{my}), \\
\frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y} &= i\omega \dot{\varepsilon}_z \dot{E}_{mz}
\end{aligned} \tag{83.2a}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial z} &= -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{mx}, \\
\frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} &= -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{my}, \\
\frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} &= -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{mz}.
\end{aligned} \tag{83.2b}$$

Luego vamos a considerar ciertas soluciones de las ecuaciones escritas. Señalemos que las ecuaciones (83.1) se convierten en las (82.2) al sustituir $\dot{\varepsilon} \to -\dot{\mu}$ y $\overleftrightarrow{\mu} \to -\overleftrightarrow{\varepsilon}$, $\dot{\boldsymbol{E}}_m \rightleftarrows \dot{\boldsymbol{H}}_m$ (y respectivamente las (83.1a), (83.1b) en las (83.2a), (83.2b), mientras que las ecuaciones (83.2) en las (83.1) al realizar la sustitución inversa. En este hecho se manifiesta el *principio de dualidad* para los medios girótropos (compárese con el § 46, punto 3). Por consiguiente, si en un magnético girótropo se ha hallado cierto campo libre que se discribe por la solución $\dot{\boldsymbol{E}}_m^m$, $\dot{\boldsymbol{H}}_m^m$ de las ecuaciones (83.1), entonces existe un campo semejante en un dieléctrico girótropo y a este campo responde la solución $\dot{\boldsymbol{E}}_m^e$, $\dot{\boldsymbol{H}}_m^e$ de las ecuaciones (83.2), además, una solución pasa a la otra ($\dot{\boldsymbol{E}}_m^m \rightleftarrows \dot{\boldsymbol{H}}_m^e$, $\dot{\boldsymbol{H}}_m^m \rightleftarrows \dot{\boldsymbol{E}}_m^e$), al realizar la sustitución anteriormente indicada de la permitividad y la permeabilidad magnética ($\dot{\varepsilon} \rightleftarrows -\dot{\mu}$, $\overleftrightarrow{\mu} \rightleftarrows -\overleftrightarrow{\varepsilon}$).

2. Ondas longitudinales. Efecto Faraday (rotación de Faraday). Investiguemos ondas planas homogéneas en un medio girótropo homogéneo infinito que se propagan en la dirección de imanación constante z; las denominaremos brevemente *ondas longitudinales*. El proceso ondulatorio es unidimensional (compárese con el § 32): en el plano xOy no hay variaciones, y en las ecuaciones (83.1a), (83.1b) o bien (83.2a), (83.2b) debemos hacer nulas las derivadas por x e y. De los últimos renglones de los indicados sistemas de ecuaciones se desprende que el campo electromagnético no tiene componentes longitudinales ($\dot{E}_{mz} = 0$, $\dot{H}_{mz} = 0$), es decir, del mismo modo que en medio isótropo, la onda homogénea es de la clase *TEM*. Tomando la dependencia longitudinal de las amplitudes complejas

en forma de $e^{\mp i\dot{\Gamma}z}$, siendo $\dot{\Gamma}$, por el momento, la constante de propagación desconocida, tendremos

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= (x_0\dot{\mathscr{E}}_x + y_0\dot{\mathscr{E}}_y)\, e^{\mp i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_m &= (x_0\dot{\mathscr{H}}_x + y_0\dot{\mathscr{H}}_y) e^{\mp i\dot{\Gamma}z}. \end{aligned} \tag{83.3}$$

Tomemos el caso de un magnético girótropo. Introduciendo las representaciones (83.3) en las (83.1a, b), se obtiene

$$\begin{aligned} \pm \dot{\Gamma}\dot{\mathscr{H}}_y &= \omega\dot{\varepsilon}\dot{\mathscr{E}}_x, \quad \pm \dot{\Gamma}\dot{\mathscr{E}}_y = -\omega\,(\dot{\mu}\dot{\mathscr{H}}_x - i\dot{\alpha}\dot{\mathscr{H}}_y), \\ \pm \dot{\Gamma}\dot{\mathscr{H}}_x &= -\omega\dot{\varepsilon}\dot{\mathscr{E}}_y, \quad \pm \dot{\Gamma}\dot{\mathscr{E}}_x = \omega\,(i\dot{\alpha}\dot{\mathscr{H}}_x + \dot{\mu}\dot{\mathscr{H}}_y), \end{aligned} \tag{83.4}$$

de donde, después de eliminar $\dot{\mathscr{E}}_x$ y $\dot{\mathscr{E}}_y$, se desprende:

$$\begin{aligned} (\dot{\Gamma}^2 - \omega^2\dot{\varepsilon}\dot{\mu})\dot{\mathscr{H}}_y &= i\omega^2\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}\dot{\mathscr{H}}_x, \\ (\dot{\Gamma}^2 - \omega^2\dot{\varepsilon}\dot{\mu})\dot{\mathscr{H}}_x &= -i\omega^2\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}\dot{\mathscr{H}}_y. \end{aligned} \tag{83.5}$$

Multiplicando los primeros miembros y, correspondientemente, los segundos en ambos renglones, hallamos la siguiente ecuación respecto a $\dot{\Gamma}$:

$$(\dot{\Gamma}^2 - \omega^2\dot{\varepsilon}\dot{\mu})^2 = \omega^4\dot{\varepsilon}^2\dot{\alpha}^2. \tag{83.6}$$

De la (83.6) se desprende que

$$\dot{\Gamma}^2 = \omega^2\dot{\varepsilon}\,(\dot{\mu} \pm \dot{\alpha}), \tag{83.7}$$

y llegamos a la conclusión de que existen dos clases de ondas longitudinales con constantes de propagación que designaremos por

$$\dot{\Gamma}^+ = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}\,(\dot{\mu} + \dot{\alpha})} \quad \text{y} \quad \dot{\Gamma}^- = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}\,(\dot{\mu} - \dot{\alpha})}. \tag{83.8}$$

Comparando las (83.8) y (83.1), podemos decir que el medio girótropo para cada una de estas ondas se comporta como un medio isótropo con permeabilidad magnética equivalente $\dot{\mu}^+ = \dot{\mu} + \dot{\alpha}$ o bien $\dot{\mu}^- = \dot{\mu} - \dot{\alpha}$. Resta esclarecer la estructura del campo electromagnético en estos dos casos. Introduciendo la (83.7) en la (83.5), obtenemos la siguiente solución:

$$\dot{\mathscr{H}}_y = \pm i\dot{\mathscr{H}}_x, \tag{83.9}$$

que nos muestra que las componentes H_x y H_y del vector $\boldsymbol{H}$ tienen igual amplitud y están desfasadas en $\pm 90°$. Las ondas longitudinales con constante de propagación $\dot{\Gamma}^{\pm}$, resultan ser de *polarización circular* (§ 34, punto 3) en direcciones contrarias. A base de las (83.3), (83.9) y del primer renglón de las (83.4), hallamos las

expresiones de las amplitudes complejas de sus vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$:

$$\text{onda}\ \frac{\text{derecha}}{\text{izquierda}}\ \text{de polarización circular}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m^+ = \pm \dot{W}^+ \dot{A}\,(i\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0)\, e^{\mp i\dot{\Gamma}^+ z},\quad \dot{\boldsymbol{H}}_m^+ = \dot{A}\,(\boldsymbol{x}_0 + i\boldsymbol{y}_0)\, e^{\mp i\dot{\Gamma}^+ z}, \tag{83.10a}$$

$$\text{onda}\ \frac{\text{izquierda}}{\text{derecha}}\ \text{de polarización circular}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m^- = \pm \dot{W}^- \dot{A}\,(-i\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0)\, e^{\mp i\dot{\Gamma}^- z},$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m^- = \dot{A}\,(\boldsymbol{x}_0 - i\boldsymbol{y}_0)\, e^{\mp i\dot{\Gamma}^- z}. \tag{83.10b}$$

Aquí $\dot{A}$ es un coeficiente desconocido, mientras que $\dot{W}^\pm = \sqrt{\frac{\dot{\mu}^\pm}{\dot{\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{\dot{\mu} \pm \dot{\alpha}}{\dot{\varepsilon}}}$, es la impedancia de onda.

Señalemos que la dirección de rotación del campo de una onda de polarización izquierda coincide con la dirección del movimiento de precesión del vector $\boldsymbol{M}$ de un medio girótropo (§ 79, punto 4, § 82, punto 3) y siendo la resonancia ferromagnética coinciden también las frecuencias de rotación. A este fenómeno corresponde un aumento brusco de la magnitud $\mu'' - \alpha''$ (como vemos en la fig. 82.6, $\alpha'' < 0$). Por el contrario, la onda de polarización derecha se absorbe débilmente, ya que la magnitud $\mu'' + \alpha''$ es muy pequeña.

Pasemos a la consideración de una singularidad muy importe de los medios girótropos, gracias a la cual dichos medios han recibido tal denominación. Supongamos que en el medio existen simultáneamente ondas longitudinales de polarización dextrógira y levógira con amplitudes iguales, que se propagan a lo largo del eje z; la absorción puede ser despreciada. En cada punto del espacio, la polarización será lineal (§ 34, punto 3). Efectivamente, sumando los campos en el origen de coordenadas ($z = 0$), en virtud de las (83.10a), (83.10b), se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m(0) = \dot{\boldsymbol{H}}_m^+(0) + \dot{\boldsymbol{H}}_m^-(0) = \boldsymbol{x}_0 2\dot{A}, \tag{83.11}$$

lo que corresponde a una onda polarizada "verticalmente". Puesto que las ondas de polarización dextrógira y levógira se propagan con diferentes velocidades

$$v^+ = 1/\sqrt{\varepsilon(\mu + \alpha)} \quad \text{y} \quad v^- = 1/\sqrt{\varepsilon(\mu - \alpha)},$$

los vectores $\dot{\boldsymbol{H}}_m^+(l)$ y $\dot{\boldsymbol{H}}_m^-(l)$ (a una distancia del origen de coordenadas $z = l$, según el movimiento de la onda), resultan estar girados a diferentes ángulos (fig. 83.1,*a*) y, al sumarse, forman una onda de polarización lineal, cuyo plano también está girado respecto a su posición inicial.

Hallemos el *ángulo de giro* ϑ *del plano de polarización*. El vector $\boldsymbol{H}$, cuya amplitud compleja para $z = 0$ se expresa por la

fórmula (83.11), para $z = l$, tendrá una amplitud compleja

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m(l) = \dot{\boldsymbol{H}}_m^+(l) + \dot{\boldsymbol{H}}_m^-(l) = \dot{A}[\boldsymbol{x}_0(e^{-i\Gamma^+ l} + e^{-i\Gamma^- l}) + i\boldsymbol{y}_0(e^{-i\Gamma^+ l} - e^{-i\Gamma^- l})],$$

o bien, después de sencillas transformaciones,

$$\dot{\boldsymbol{H}}_m(l) = 2\dot{A}e^{-i\frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2}l}\left(\boldsymbol{x}_0 \cos\frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2}l + \boldsymbol{y}_0 \operatorname{sen}\frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2}l\right), \quad (83.12)$$

es decir (fig. 83.1,*b*), se ha producido el giro del vector $\boldsymbol{H}$ y, por consiguiente, del plano de polarización a un ángulo

$$\vartheta = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2}l \text{ [rad]}. \quad (83.13)$$

Vemos que en un magnético girótropo, a lo largo de la dirección de un campo magnético continuo puede propagarse, hablando

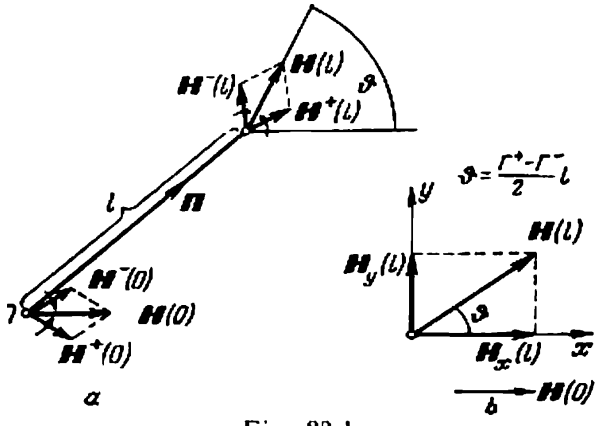


Fig. 83.1.

convencionalmente, una onda polarizada linealmente, cuyo plano de polarización, en este caso, gira. Este fenómeno se denomina *efecto Faraday*. El origen de la misma palabra "girotropía" está ligada a dicho efecto.

La magnitud

$$R = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{2}(\sqrt{\mu + \alpha} - \sqrt{\mu - \alpha}), \quad (83.14)$$

que expresa el ángulo de giro del plano de polarización por la unidad de longitud del camino, se denomina *número de Faraday* de un magnético girótropo. De la (83.12) se desprende que la constante de propagación de la onda para el efecto Faraday es

$$\Gamma_\Phi = \frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{2}(\sqrt{\mu + \alpha} + \sqrt{\mu - \alpha}). \quad (83.15)$$

El efecto Faraday es *irreversible*. Si se mira a lo largo de la dirección de propagación de la onda que coincide con el sentido

del campo continuo $\boldsymbol{H}_0$, entonces, siendo $\alpha < 0$, $\mu + \alpha > 0$ el plano de polarización girará en el sentido de las agujas de un reloj ($R < 0$); al desplazarse la onda en sentido *contrario* a $\boldsymbol{H}_0$, varia el signo de α y R; al observar la onda que se aleja, observamos la rotación de su plano de polarización que transcurre en sentido contrario a las agujas de un reloj (fig. 83.2,*a*, *b*). De este modo,

Fig. 83.2.

el carácter de la propagación de la onda depende de la dirección; el campo en un medio girótropo no se somete al principio de reciprocidad (§ 48), lo que se tratará especialmente en el punto 4. Señalemos que para un observador sin orientación, el plano de polarización en ambos casos gira hacia un mismo lado.

Es algo más complicado el efecto Faraday al haber absorción.

Sólo nos queda difundir las deducciones obtenidas a un dieléctrico girótropo (plasma magnetizado), cuando la constante dieléctrica es un tensor de la forma (82.6). Haciendo uso del principio de dualidad (punto 1), de inmediato escribimos los análogos de los resultados que se tienen [1].

En el medio pueden propagarse ondas longitudinales de polarización dextrógira y levógira. En tal caso (compárese con las (83.10a), (83.10b))

$$\dot{E}_m^{\pm} = \dot{A}\,(x_0 \pm i y_0)\, e^{\mp i \dot{\Gamma}^{\pm} z},$$
$$\dot{H}_m^{\pm} = \mp\,(\dot{W}^{\pm})^{-1}\,\dot{A}\,(\pm i x_0 - y_0)\, e^{\mp i \dot{\Gamma}^{\pm} z}, \qquad (83.16)$$

siendo $(\dot{W}^{\pm})^{-1} = \sqrt{\frac{\dot{\nu}^{\pm}}{\dot{\mu}}} = \sqrt{\frac{\dot{\varepsilon} \pm \dot{\beta}}{\dot{\mu}}}$ y $\dot{\Gamma}^{\pm} = \omega \sqrt{(\dot{\varepsilon} \pm \dot{\beta})\dot{\mu}}$ (83.17)

(compárese con las (83.8)).

Para el efecto Faraday (con absorción)

$$R = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} = \frac{\omega \sqrt{\mu}}{2} \left(\sqrt{\varepsilon + \beta} - \sqrt{\varepsilon - \beta}\right) \qquad (83.18)$$

y

$$\Gamma_\Phi = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} = \frac{\omega \sqrt{\mu}}{2} \left(\sqrt{\varepsilon + \beta} + \sqrt{\varepsilon - \beta}\right) \qquad (83.19)$$

(compárese con las (83.14) y (83.15)).

---

[1] Ya que $W = \omega\mu/\Gamma$, entonces sin variar en el proceso de aplicación del principio de dualidad el signo de Γ, debemos cambiar el signo de W.

3. Ondas transversales. Efecto de Cotton — Mouton. Consideremos ahora las ondas en un medio girótropo que se propagan por un plano perpendicular a la dirección de la imanación continua ($x0y$). En dicho plano, todas las direcciones son equitativas y, nosotros nos limitaremos a tratar el caso, cuando

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \dot{\mathcal{E}} e^{\mp i\dot{\Gamma}x}, \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m = \dot{\mathcal{H}} e^{\mp i\dot{\Gamma}x}, \tag{83.20}$$

es decir, elegimos el eje x; las ondas son homogéneas, de manera que por los ejes y e z las intensidades del campo no varían (en las (83.20) $\dot{\mathcal{E}} = \text{const}$, $\dot{\mathcal{H}} = \text{const}$). Las ecuaciones (83.1a), (83.1b) toman el siguiente aspecto:

$$0 = \dot{\mathcal{E}}_x, \quad \pm\dot{\Gamma}\dot{\mathcal{H}}_z = \omega\dot{\varepsilon}\dot{\mathcal{E}}_y, \quad \mp\dot{\Gamma}\dot{\mathcal{H}}_y = \omega\dot{\varepsilon}\dot{\mathcal{E}}_z \tag{83.21a}$$

y

$$0 = \dot{\mu}\dot{\mathcal{H}}_x - i\dot{\alpha}\dot{\mathcal{H}}_y, \quad \mp\dot{\Gamma}\dot{\mathcal{E}}_z = \omega(i\dot{\alpha}\dot{\mathcal{H}}_x + \dot{\mu}\dot{\mathcal{H}}_y),$$
$$\pm\dot{\Gamma}\dot{\mathcal{E}}_y = \omega\dot{\mu}_z\dot{\mathcal{H}}_z. \tag{83.21b}$$

Las ecuaciones escritas se descomponen en dos sistemas independientes, de uno de los cuales se forman las igualdades segunda y última de las (83.21a), (83.21b). Eliminando en ellas $\dot{\mathcal{H}}_z$ y $\dot{\mathcal{E}}_y$, se halla

$$\dot{\Gamma}^2 = \omega^2\dot{\varepsilon}\dot{\mu}_z. \tag{83.22}$$

Por lo visto, se trata de una onda que se caracteriza por las amplitudes complejas:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{y}_0\dot{A}e^{\mp i\dot{\Gamma}_\parallel x}, \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m = \pm\boldsymbol{z}_0\frac{\dot{A}}{\dot{W}_\parallel}e^{\mp i\dot{\Gamma}_\parallel x}, \tag{83.23}$$

siendo

$$\dot{\Gamma}_\parallel = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}_z} \quad \text{y} \quad \dot{W}_\parallel = \sqrt{\dot{\mu}_z/\dot{\varepsilon}}. \tag{83.24}$$

Esta onda, cuyo vector magnético es colineal a la intensidad del campo magnético continuo $\boldsymbol{H}_0$, tiene el mismo carácter que una onda corriente homogénea del tipo TEM en un medio isótropo (§§ 32, 33) y se denomina *ordinaria*.

Las igualdades tercera, cuarta y quinta de las (83.21a), (83.21b), forman un segundo sistema independiente de ecuaciones; de ellas hallamos que

$$\dot{\Gamma}^2 = \omega^2\dot{\varepsilon}\frac{\dot{\mu}^2 - \dot{\alpha}^2}{\dot{\mu}}. \tag{83.25}$$

Para la onda correspondiente

$$\dot{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{z}_0\dot{A}e^{\mp i\dot{\Gamma}_\perp x}, \quad \dot{\boldsymbol{H}}_m = \mp\frac{\dot{A}}{\dot{W}_\perp}\left(\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{x}_0\frac{i\dot{\alpha}}{\dot{\mu}}\right)e^{\mp i\dot{\Gamma}_\perp x}, \tag{83.26}$$

siendo

$$\dot{\Gamma}_{\perp} = \omega \sqrt{\varepsilon \frac{\dot{\mu}^2 - \dot{\alpha}^2}{\dot{\mu}}} \quad \text{y} \quad \dot{W}_{\perp} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}^2 - \dot{\alpha}^2}{\varepsilon \dot{\mu}}}. \qquad (83.27)$$

Como vemos, en el caso dado el vector eléctrico de la onda es paralelo a $\boldsymbol{H}_0$, mientras que el magnético tiene componentes tanto transversal (H_y), como longitudinal (H_x). Esta onda homogénea del tipo H se denomina *extraordinaria*; su número de onda $\dot{\Gamma}_{\perp}$ depende del cuadrado de la componente no diagonal del tensor de la permeabilidad magnética. En virtud de las (83.27), el papel de permeabilidad magnética equivalente juega, en este caso, la magnitud $\dot{\mu}_{\perp} = \frac{\dot{\mu}^2 - \dot{\alpha}^2}{\dot{\mu}}$.

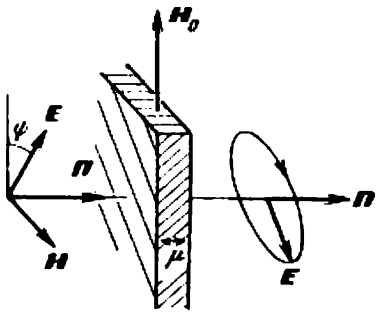


Fig. 83.3.

Sea que en un magnético girótropo (digamos en forma de una capa) entra una onda polarizada linealmente que se propaga perpendicularmente al vector $\boldsymbol{H}_0$, con el que el vector $\boldsymbol{E}$ forma cierto ángulo ψ (fig. 83.3). Sin prestar atención a la reflexión, señalemos que la componente $E\cos\psi$ paralela a $\boldsymbol{H}_0$, excitará en un medio girótropo una onda extraordinaria, mientras que la componente $E\sin\psi$, perpendicular a $\boldsymbol{H}_0$, una onda ordinaria. Propagándose con diferentes velocidades

$$v_{\perp} = 1 \Big/ \sqrt{\varepsilon \frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu}} \quad \text{y} \quad v_{\parallel} = 1/\sqrt{\varepsilon \mu_z}.$$

(aquí despreciamos la absorción), estas ondas, al salir del medio girótropo, resultarán dispuestas en diferentes fases, y en el medio isótropo crean una onda de polarización elíptica (en caso particular, circular cuando las amplitudes son iguales y el desfasaje en 90°). Este fenómeno se conoce como el *efecto de Cotton—Mouton*.

Pasemos al caso de un dieléctrico girótropo, o sea, del plasma magnetizado. Según el principio de dualidad, a las soluciones (83.23), (83,24) y (83.26), (83.27) corresponden las siguientes (véase la nota al pie de la pág. 592).

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m &= \mp \boldsymbol{z} \dot{A} \dot{W}_{\parallel} e^{\mp i \dot{\Gamma}_{\parallel} x}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m &= \boldsymbol{y}_0 \dot{A} e^{\mp i \dot{\Gamma}_{\parallel} x}, \end{aligned}\right\} \qquad (83.28)$$

siendo

$$\dot{\Gamma}_{\parallel} = \omega \sqrt{\varepsilon_z \dot{\mu}} \quad \text{y} \quad \dot{W}_{\parallel} = \sqrt{\dot{\mu}/\varepsilon_z}, \qquad (83.29)$$

es decir, una onda *ordinaria* y

$$\dot{E}_m = \pm A\dot{W}_\perp \left(y_0 + x_0 \frac{i\dot{\beta}}{\dot{\varepsilon}} \right) e^{\mp i\dot{\Gamma}_\perp z}, \quad \dot{H}_m = z_0 A e^{\mp i\dot{\Gamma}_\perp z}, \tag{83.30}$$

siendo

$$\dot{\Gamma}_\perp = \omega \sqrt{\frac{\dot{\varepsilon}^2 - \dot{\beta}^2}{\dot{\varepsilon}} \dot{\mu}} \quad \text{y} \quad \dot{W}_\perp = \sqrt{\frac{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}{\dot{\varepsilon}^2 - \dot{\beta}^2}}, \tag{83.31}$$

es decir, una onda *extraordinaria*, para la que $\dot{\varepsilon}_\perp = \frac{\dot{\varepsilon}^2 - \dot{\beta}^2}{\dot{\varepsilon}}$ juega el papel de la constante dieléctrica equivalente.

4. Ciertas propiedades generales de los campos. Conclusión. Tomemos un medio anisótropo arbitrario, cuyas propiedades en cierto sistema ortogonal de coordenadas q_1, q_2, q_3 se caracterizan por los tensores

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} & \dot{\varepsilon}_{12} & \dot{\varepsilon}_{13} \\ \dot{\varepsilon}_{21} & \dot{\varepsilon}_{22} & \dot{\varepsilon}_{23} \\ \dot{\varepsilon}_{31} & \dot{\varepsilon}_{32} & \dot{\varepsilon}_{33} \end{pmatrix} \text{ y } \overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \dot{\mu}_{11} & \dot{\mu}_{12} & \dot{\mu}_{13} \\ \dot{\mu}_{21} & \dot{\mu}_{22} & \dot{\mu}_{23} \\ \dot{\mu}_{31} & \dot{\mu}_{32} & \dot{\mu}_{33} \end{pmatrix}. \tag{83.32}$$

Introduciendo en la ecuación (30.9), $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ y $\overleftrightarrow{\mu}$ en lugar de $\dot{\varepsilon}$ y $\dot{\mu}$, llegaremos a la conclusión de que la potencia media de absorción en el medio se expresará en lugar de la (30.14) por la fórmula

$$\bar{P}_m = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \int_V (\overleftrightarrow{\varepsilon}^* \dot{E}_m^* \dot{E}_m - \overleftrightarrow{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_m^*)\, dv. \tag{83.33}$$

Podemos fácilmente convencernos de que esta magnitud es igual a cero, es decir, el medio no es absorbente si los tensores $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ y $\overleftrightarrow{\mu}$ son hermíticos (Suplemento 9). Efectivamente, en este caso, en particular

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_m^* = \dot{\mu}_{11} |\dot{H}_{m1}|^2 + \dot{\mu}_{22} |\dot{H}_{m2}|^2 + \dot{\mu}_{33} |\dot{H}_{m3}|^2 + \dot{\mu}_{12} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m2}^* + \\ + \dot{\mu}_{21} \dot{H}_{m2} \dot{H}_{m1}^* + \dot{\mu}_{23} \dot{H}_{m3} \dot{H}_{m3}^* + \dot{\mu}_{32} \dot{H}_{m3} \dot{H}_{m2}^* + \dot{\mu}_{31} \dot{H}_{m3} \dot{H}_{m1}^* + \\ + \dot{\mu}_{13} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m3}^* \end{aligned}$$

es una magnitud real, ya que debido a la correlación $\dot{\mu}_{kn} = \dot{\mu}_{nk}$, $\dot{\mu}_{11}$, $\dot{\mu}_{22}$ y $\dot{\mu}_{33}$ son reales, así como $\dot{\mu}_{12} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m2}^* + \dot{\mu}_{21} \dot{H}_{m2} \dot{H}_{m1}^* = 2 \operatorname{Re} (\dot{\mu}_{12} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m2}^*)$, etc.

Manifestaciones particulares de la señalada ley, fueron indicadas en el § 82, puntos 2, 3.

Seguidamente, retornemos al principio de reprocidad (§ 48). Si el medio es anisótropo, entonces en las (48.3), (48.4) en lugar

de ε y μ conviene introducir $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ y $\overleftrightarrow{\mu}$ (83.32). En tal caso, la igualdad (48.5) que expresa el principio de reprocidad será sólo obtenida, si

$$\overleftrightarrow{\mu}\dot{H}_{m2}\dot{H}_{m1} - \overleftrightarrow{\mu}\dot{H}_{m1}\dot{H}_{m2} = 0 \quad \text{y} \quad \overleftrightarrow{\varepsilon}\dot{E}_{m2}\dot{E}_{m1} - \overleftrightarrow{\varepsilon}\dot{E}_{m1}\dot{E}_{m2} = 0. \quad (83.34)$$

Las últimas igualdades se cumplen cuando $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ y $\overleftrightarrow{\mu}$ son *simétricas* (Suplemento 9), es decir, para $\varepsilon_{kn} = \varepsilon_{nk}$ y $\mu_{kn} = \mu_{nk}$.

Para un magnético girótropo ($\mu_{11} = \mu_{22} = \mu$, $\mu_{12} = -\mu_{11} = -i\alpha$, $\mu_{33} = \mu_z$, y las demás componentes son iguales a cero)

$$\overleftrightarrow{\mu}\dot{H}_{m2}\dot{H}_{m1} - \overleftrightarrow{\mu}\dot{H}_{m1}\dot{H}_{m2} = i2\alpha(\dot{H}_{m2x}\dot{H}_{m1y} - \dot{H}_{m2y}\dot{H}_{m1x}) = i2\alpha[\dot{H}_{m2}, \dot{H}_{m1}]_z. \quad (83.35)$$

El principio de reciprocidad se observará solamente para aquellos campos, cuyas componentes magnéticas en el plano $x0y$ (perpendicular a la dirección de la imanación continua) son paralelas.

Una conclusión análoga es justa para un dieléctrico girótropo.

Notemos, además, que en los medios anisótropos la dirección de la normal al frente de una onda plana, puede no coincidir con el vector medio de Poynting y, por esto los vectores de la velocidad de fase y de la velocidad del movimiento de la energía (35.13), también resultan ser no colineales.

Retornando al caso de ondas transversales en medios girótropos, señalemos el siguiente hecho. Al desaparecer la girotropía ($\alpha \to 0$ o bien $\beta \to 0$), las ondas ordinaria y extraordinaria quedan siendo no degeneradas ($\Gamma_\parallel \neq \Gamma_\perp$), si sólo $\mu \neq \mu_z$ o, respectivamente, $\varepsilon \neq \varepsilon_z$; en este caso, según el carácter del tensor $\overleftrightarrow{\mu}$ o bien $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, el medio es semejante a un cristal uniaxil (§ 82, punto 1). En general, respecto a las ondas transversales, el medio girótropo se comporta como un cristal uniaxil. Además del efecto de Cotton—Mouton, en uno y otro caso, cuando la frontera con un medio isótropo es plana, puede observarse *refracción doble*. En la fig. 83.4 está expuesta una frontera de tal tipo, siendo al mismo tiempo el eje z (para un medio girótropo la dirección de la imanación continua) la normal al dibujo. Si sobre la superficie de separación en un medio isótropo incide una onda con cualquier polarización (rayo *1*),

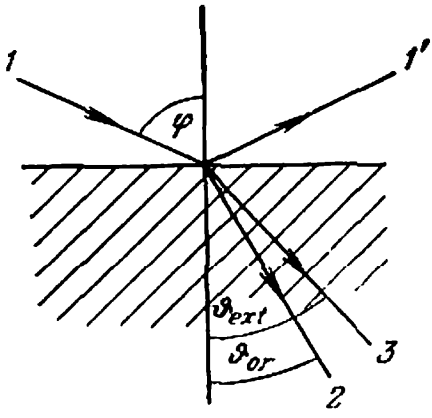


Fig. 83.4.

entonces es cómodo descomponerla en las ondas de polarización paralela y perpendicular (§ 38), con objeto de considerar la reflexión y refracción de cada una de ellas por separado. Pero ahora, una de las ondas refractadas resultará ser ordinaria, mientras que la otra, extraordinaria. Sus velocidades de fase en el segundo medio son diferentes y, por esta razón, los respectivos rayos refractados no coinciden; el número de estos rayos es dos (el rayo *2* y el rayo *3* en la fig. 83.4), además, en virtud de la (37.7a),

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta_{ord}}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{v_{\parallel}}{v_1}\quad\text{y}\quad\frac{\operatorname{sen}\vartheta_{ext}}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{v_{\perp}}{v_1}. \tag{83.36}$$

En conclusión, señalemos que para la incidencia normal de una onda polarizada linealmente sobre la frontera con un medio girótropo, magnetizado también en la dirección de la normal, la onda reflejada resultará estar polarizada en el plano girado. Este fenómeno se denomina *efecto de Kerr*.

§ 84. Girotropía en radiotecnia

1. Girotropía de la ionosfera. A causa de la influencia del campo magnético de la Tierra, el plasma de la ionosfera es un medio girótropo, cuya constante dieléctrica se define por el tensor $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ del aspecto (82.6)—(82.7). La magnitud H_0 tiene, por término medio, un valor alrededor de 40 A/m, así que la frecuencia $F=\Omega/2\pi=\mu_0\frac{|e|}{m}H_0/2\pi$, en el entorno de la cual transcurre la resonancia giromagnética de los electrones, resulta ser igual a cerca de 1,4 MHz. Señalemos que para los iones del oxígeno atómico $F'=\Omega'/2\pi\approx 54$ Hz.

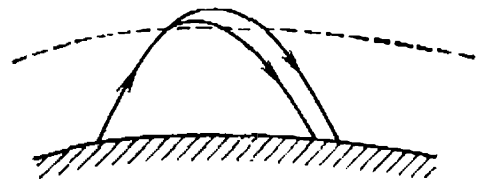


Fig. 84.1.

El hecho de tener en cuenta la girotropía conduce, en particular, a un cuadro más complicado de la refracción en la ionosfera, en comparación con la descrita en el § 41, punto 2 y en el § 81, punto 1. Suponiendo que con relación al campo magnético de la Tierra, la propagación de las ondas es transversal, debemos considerar las ondas ordinarias y extraordinarias que, teniendo diferentes velocidades de fase, refractan de modo diferente, a causa de lo cual, el rayo ionosférico se "descompone" (fig. 84.1). Este fenómeno es análogo a la refracción doble, sobre la que hemos hablado en el § 83, punto 4.

Es fácil cerciorarse de que las frecuencias críticas (límites) (§ 81, punto 1), de las ondas ordinaria y extraordinaria, son con-

siderablemente distintas. De acuerdo con la (41.11) y el § 83, punto 3

$$\operatorname{sen}\vartheta_{0\,\mathrm{ord}}=\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0}}\quad\text{y}\quad\operatorname{sen}\vartheta_{0\,\mathrm{ext}}=\sqrt{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{\varepsilon^2-\beta^2}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \tag{84.1}$$

Suponiendo que en las (82.7) $\nu=0$ e introduciendo las expresiones de las componentes del tensor $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ en las (84.1), vemos que la primera de las igualdades no se diferencia de la (81.1) y, por esto, $f_{\mathrm{crit.\,ord}}=f_{\mathrm{crit}}$ en la (81.2). En lo que se refiere a la onda extraordinaria, después de sencillas transformaciones, se halla

$$\operatorname{sen}\vartheta_{0\,\mathrm{ext}}=\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\,\frac{\omega^2-\omega_p^2}{\omega^2-\omega_p^2-\Omega^2}}, \tag{84.2}$$

pero como para $\omega=\omega_{\mathrm{crit.\,ext}}$ $(f=f_{\mathrm{crit.\,ext}})$ $\operatorname{sen}\vartheta_{0\,\mathrm{ext}}=0$, entonces igualando a cero la expresión subradical, se obtiene

$$\omega^2\mp\omega\Omega-\omega_p^2=0,\qquad\omega=\omega_{\mathrm{crit.\,ext.}} \tag{84.3}$$

Para una frecuencia ω fijada de la concentración electrónica menor, aquí es válido el signo negativo (véase la expresión ω_p^2 en la (80.15b)). Suponiendo que una onda que incide normalmente se refleja por completo sobre el correspondiente nivel, es decir, sobre el más bajo, se halla

$$\omega_{\mathrm{crit.\,ext}}=\frac{\Omega}{2}+\sqrt{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2+\omega_p^2}. \tag{84.4}$$

En la banda de ondas cortas $(\Omega/2)^2\ll\omega_p^2$ y, por esta razón

$$\omega_{\mathrm{crit.\,ext}}\approx\omega_p+\frac{\Omega}{2} \tag{84.4a}$$

o bien

$$f_{\mathrm{crit\ ext}}\approx f_p+0{,}7\,[\mathrm{MHz}] \tag{84.4b}$$

(con anterioridad señalamos que $F=\Omega/2\pi\approx 1{,}4$ MHz).

Para las ondas que se propagan en el plasma a lo largo de la dirección del campo magnético de la Tierra, en virtud del § 83, punto 2 y las (82.7), siendo $\nu=0$

$$\dot{\varepsilon}^{\pm}=\dot{\varepsilon}\pm\dot{\beta}=\varepsilon_0\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega\,(\omega\pm\Omega)}\right]. \tag{84.5}$$

Por esto, a frecuencias suficientemente bajas $(\omega<\Omega)$, la constante dieléctrica equivalente de una onda de polarización circular levógira $\dot{\varepsilon}^-$ sigue siendo positiva. De este modo, dicha onda longitudinal no sufre reflexión total para incidencia normal (o próxima a la normal) en la capa ionosférica. A causa de las indicadas circunstancias en la banda de ondas ultralargas es posible la propagación de la energía electromagnética a lo largo de las

líneas de fuerza del campo magnético de la Tierra (fig. 84.2) que, al parecer, guían el proceso ondulatorio. Ondas de tan baja frecuencia se crean por las descargas del relámpago; éstas recibieron el nombre de "atmosféricos (parásitos) silbantes", puesto que las señales correspondientes se escuchan en el receptor en forma de silbidos.

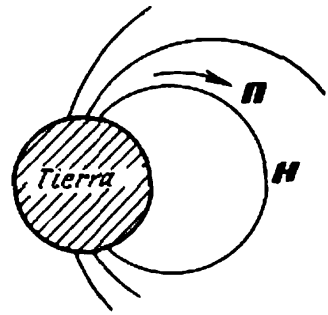


Fig. 84.2.

Señalemos que la expresión (84.5), como las fórmulas iniciales (82.7), son válidas hasta que $\omega \gg \Omega'$, siendo Ω' la frecuencia giroscópica de los iones.

2. Ferritas en la radiotecnia de frecuencias ultraelevadas. Las ferritas magnetizadas que son magnéticos girótropos, se emplean extensamente en las guías de ondas y otros dispositivos de la radiotecnia de las frecuencias ultraelevadas. Estudiemos el funcionamiento de algunos de dichos dispositivos.

Gran importancia tiene el *efecto de guía de ondas de Faraday*. Si en un medio girótropo este efecto consiste en la rotación del plano de polarización de la onda, en una guía de ondas se tratará del giro de toda la estructura del campo. Dado que tenemos una guía de onda circular, en cuyo interior hay un cilindro coaxial de ferrita magnetizada longitudinalmente; por lo general, para disminuir la reflexión, dicho cilindro tiene los extremos cónicos

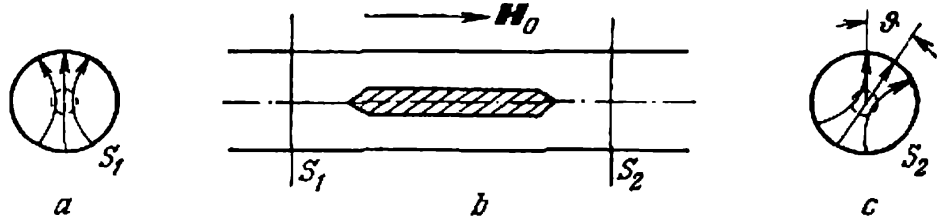


Fig. 84.3.

(fig. 84.3, *b*). Cuando sobre el elemento de ferrita incide por el lado izquierdo la onda fundamental no giratoria H_{11} de la guía de ondas "vacía" y cuya estructura en la sección transversal S_1 se muestra en la fig. 84.3, *a* a la derecha de la ferrita en la sección S_2, vamos a tener la onda fundamental que pasó por el cilindro, con la orientación azimutal variada (fig. 84.3, *c*). No es difícil comprender la esencia del fenómeno. Descompongamos la onda inicial H_{11} en dos ondas giratorias con las dependencias azimutales $e^{i\alpha}$ y $e^{-i\alpha}$ (§ 65, punto 1). En el eje de la guía de ondas, sus campos están polarizados por un círculo, en sentidos contrarios. Como es lógico, por la ferrita estas ondas pasan deformándose, pero la propiedad anteriormente indicada se conserva, además, podemos considerar que en el caso de un vástago de ferrita de poco

grosor, la polarización circular se produce por todas sus secciones transversales. Entonces, en virtud del § 83, punto 2, es fácil llegar a la conclusión de que la ferrita se comporta como un medio con permeabilidad magnética $\dot{\mu}^+ = \dot{\mu} + \alpha$ para una de las ondas (polarización dextrógira) y con permeabilidad magnética $\dot{\mu}^- = \dot{\mu} - \alpha$, para la otra (polarización levógira). Por lo tanto, en el sector de la guía de ondas, donde se encuentra la ferrita, las ondas indicadas

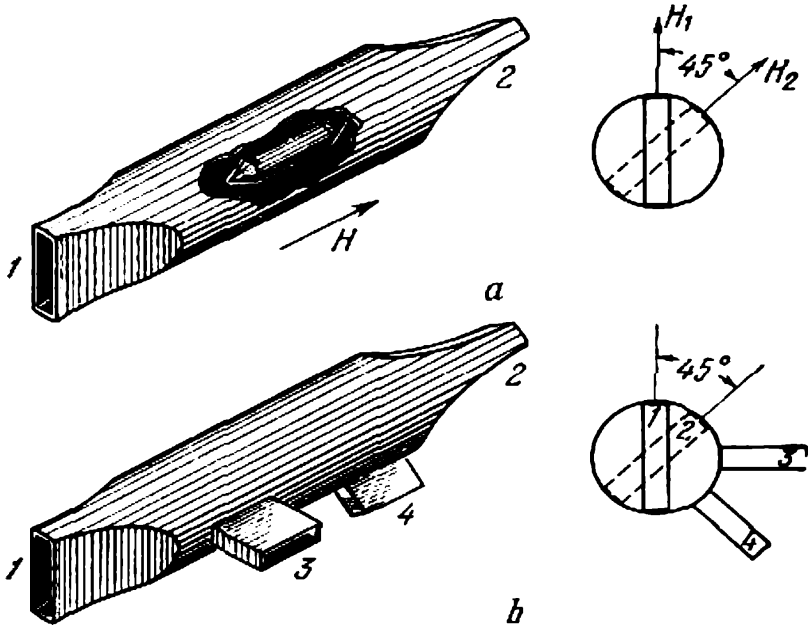


Fig. 84.4.

se propagan con diferentes velocidades, recibiendo en la salida diferentes desfasajes; su superposición proporciona la estructura girada, representada en la fig. 84.3, *c* (compárese con la fig. 83.1, *a*).

El efecto de guía de ondas de Faraday se utiliza en una serie de dispositivos, denominados "válvulas" ("aisladores") y "circuladores". El funcionamiento del primero se esclarece en la fig. 84.4, *a*. Un segmento de una guía de ondas circular, está unido con guías de ondas rectangulares inclinadas a 45° y contiene un vástago de ferrita magnetizado longitudinalmente que crea un giro de la estructura del campo también a 45°. Sea que durante el movimiento de la onda de *1* a *2*, la rotación de la estructura se produce en el sentido de las agujas de un reloj, entonces la onda que incide sobre la entrada *1* deberá pasar por la salida *2*. Pero en la dirección inversa (de *2* a *1*), la onda no pasará. Efectivamente, el efecto Faraday es irreversible (§ 83, punto 2) y, en este caso, la estructura girará en sentido inverso a las agujas de un reloj para un observador orientado idénticamente respecto al *mo-*

vimiento de la onda. En relación con la pared ancha de la guía de ondas *1*, el vector $\boldsymbol{E}$ de la onda que ha pasado por la ferrita *(desde 2) resulta ser paralelo, así que la onda fundamental* H_{10} no se excitará, sino que tendrá lugar la reflexión total. Señalemos que, por lo general, la onda reflejada se "amortigua" mediante un absorbedor polarizado que tiene la forma de una placa conductora de poco grosor, instalada en la guía de ondas circular cerca de la unión con la guía de ondas rectangular *1* y que es paralela a la pared ancha de esta última; dicha placa no influye casi absolutamente en la onda que sale de *1*.

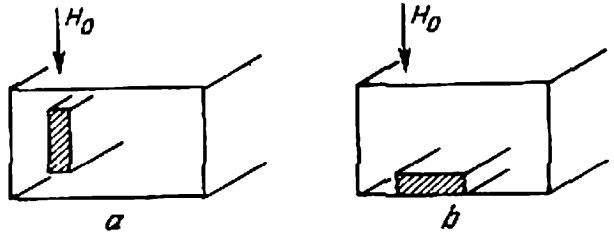


Fig. 84.5.

Un dispositivo análogo al que están unidos dos guías de ondas rectangulares complementarias (fig. 84.4, *b*), funciona como circulador. Esto significa que desde *1*, la onda llega a *2*, desde *2* a *3*, desde *3* a *4* y desde *4* a *1*. En principio, la explicación del funcionamiento no se diferencia de la anterior. Instalando en las guías de onda *3* y *4* absorbentes no reflectivos ("cargas adaptadas"), retornaremos del circulador a la válvula.

Con frecuencia, en la guía de ondas rectangular, se instala una *placa vertical de ferrita magnetizada transversalmente (fig. 84.5).* Recordemos (§ 64) que en virtud del desfasaje a 90° de las componentes longitudinal y transversal del vector $\boldsymbol{H}$ de la onda H_{10} de la guía de ondas hueca, el campo magnético gira en el plano de su pared ancha, además, a una distancia

$$x = \frac{a}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{2a}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

la polarización es circular, mientras que la dirección de rotación depende del sentido de propagación de la onda. En una placa de ferrita, situada no simétricamente, también predominará la polarización dextrógira o levógira del campo magnético, en dependencia del sentido del movimiento de la onda de la guía de ondas. Por esto podemos decir que la permeabilidad magnética equivalente de la placa tendrá diferentes valores para ondas que se propagan en direcciones contrarias. Por consiguiente, serán también diferentes las constantes de propagación (es decir, las velocidades de fase y el amortiguamiento) de dichas ondas. El sistema es irreversible y puede ser empleado como válvula y como circulador. Es análoga la acción de un vástago de ferrita transversalmente magne-

tizado, pero de otra forma, por ejemplo, de una placa horizontal (fig. 84.5, *b*).

Uno de los dispositivos basados en el sistema descrito es la llamada "válvula de resonancia". La ferrita se magnetiza hasta el estado de resonancia ferromagnética; en este caso, los parámetros μ'' y $-\alpha''$ ($-\operatorname{Im}\dot{\mu}$ y $\operatorname{Im}\dot{\alpha}$) son los máximos y aproximadamente iguales (fig. 84.6). Entonces $(\dot{\mu}^-)'' \approx 2\mu''$ y $(\dot{\mu}^+)'' \approx 0$, lo que significa que una de las ondas fundamentales que se propagan al encuentro de la guía de ondas rectangular con ferrita (con polarización levógira predominante), se absorberá elevadamente, mientras que la otra pasará casi sin amortiguamiento (§ 83, punto 2).

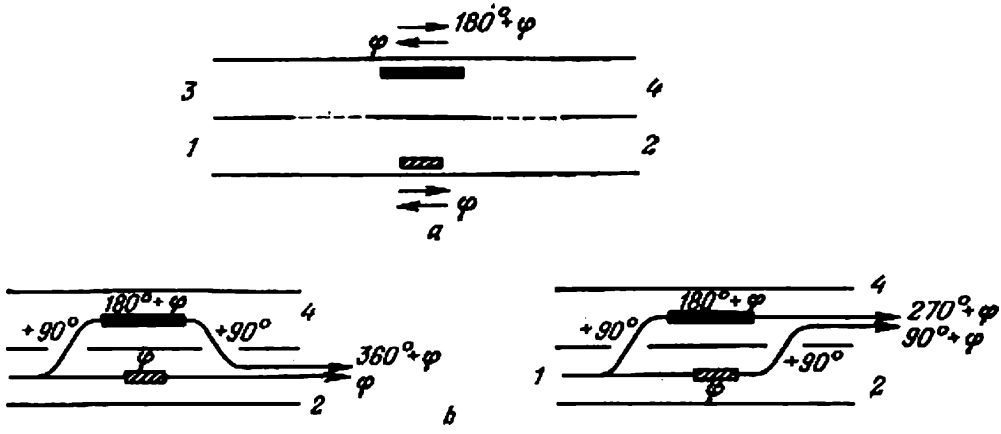


Fig. 84.6.

Como ejemplo de un circulador, compuesto sobre esta misma base, consideremos un sistema formado por dos acopladores direccionales (§ 74, punto 3) que dividen la energía a transmitir por la mitad ($a=b$ en la (74.21)); suelen llamarlos "puentes de ranura"; los elementos de ferrita se disponen en uno o en ambos canales, entre los acopladores. La representación esquemática del dispositivo en una de las variantes, se da en la fig. 84.6, *a*. Dado que el canal con ferrita para una de las direcciones, crea un desfasaje igual a $\varphi+180°$, y para la otra, igual a φ; el canal simétrico para ambas direcciones proporciona un desfasaje φ (en él se encuentra el elemento dieléctrico necesario para esto). También conviene tener en cuenta que al dividir el flujo de energía mediante un acoplador direccional, se produce un desfasaje de 90° (véase la (74.24, *a*)); en el caso dado, la fase varía en 90° "al pasar por la ranura". Si la onda llega a la entrada *1*, saldrá por *2* sin pasar por *4*. Electivamente, como vemos en la fig. 84.6, *b*, a *2* llegan dos flujos de onda con la mitad de la energía cada uno, uno de los cuales (directo) tiene desfasaje φ, y el segundo, $90°+(180°+\varphi)+90°$ (dos pasos por la ranura y la acción de la ferrita); ambos flujos interfieren por fase y se suman. Simultá-

neamente, a *4* llegan flujos con desfasajes $\varphi + 90°$ y $90° + (180° + \varphi)$, es decir, antifásicos que a la interferencia se eliminan. De este mismo modo, es fácil comprender como pasará la onda desde *2* hacia *3*, desde *3* hacia *4* y desde *4* hacia *1*.

Indiquemos que la matriz de dispersión (§ 74, puntos 2, 3) de un circulador ideal con una cantidad P de canales, debe tener el aspecto

$$R = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0\,1\,0 & 0 \\ 0 & \dots & 0\,1 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (84.6)$$

Las secciones de entrada se suponen situadas en la zona lejana y elegidas de tal manera que se compensen los desfasajes (compárese el paso de la (74.18) a la (74.18a).

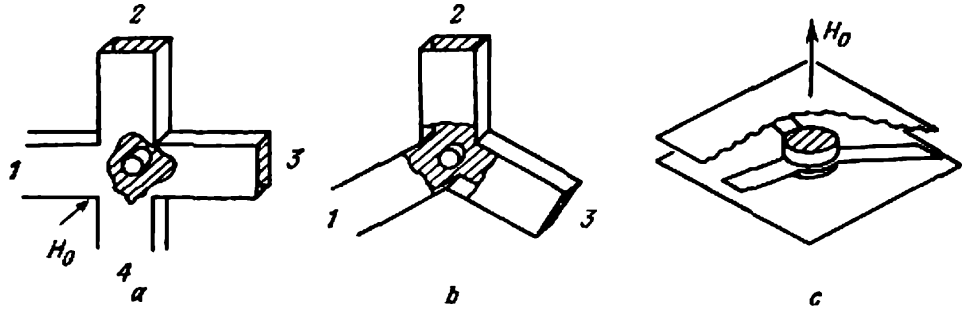


Fig. 84.7.

Los circuladores de cuatro y, con mayor frecuencia, de tres canales, también se realizan en forma de una ramificación de una guia de ondas rectangular en el plano H (o en forma de una ramificación análoga de una linea a bandas paralelas), en la que se dispone simétricamente un elemento de ferrita, magnetizado perpendicularmente a dicho plano (fig. 84.7, *a*, *b*, *c*). La onda que incide sobre la ferrita difracta asimétricamente; con la elección requerida de los parámetros, el flujo de energia se dirige desde *1* hacia *2*, desde *2* hacia *3*, etc. Los dispositivos de este tipo se denominan, respectivamente, "circuladores tipo X" y "circuladores tipo Y".

Los sistemas de guias de ondas con ferritas magnetizadas son *muy variados y en el presente libro no hay lugar para su descripción* suficientemente completa[1]. Diversas válvulas y circuladores (algunos de los cuales se consideraron anteriormente), son los más

[1] Los lectores a quienes interese este problema, pueden hacer uso de la monografía [E.5—7.]

importantes dispositivos de tal tipo, pero ellos no agotan toda la variedad de las funciones que pueden realizarse por medio de ferritas. Es suficiente el enorme significado técnico que tiene la propia posibilidad de controlar la amplitud y la fase del proceso ondulatorio por "método eléctrico", es decir, variando la corriente en el electroimán que magnetiza el elemento de ferrita, en lugar de la introducción mecánica de cierto cuerpo en la guía de ondas para provocar la absorción, reflexión o el desfasaje.

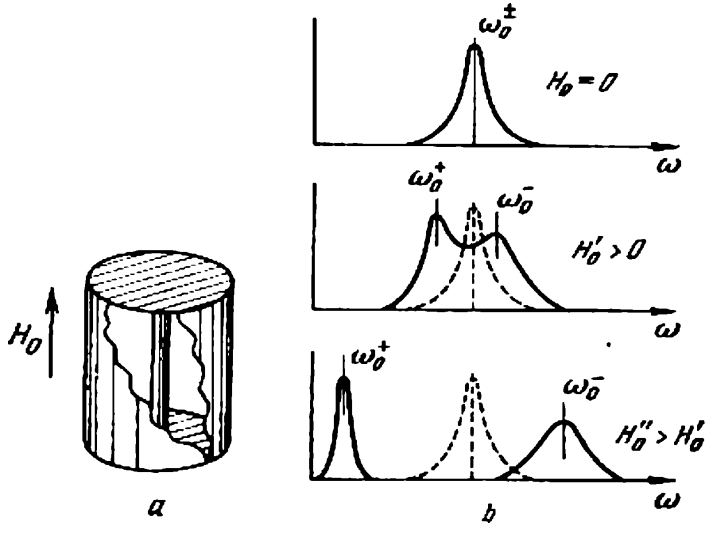


Fig. 84.8.

En conclusión, examinemos un resonador hueco con ferrita magnetizada; en este caso, es particularmente interesante la manifestación del efecto Faraday. Dado, para mayor determinación, que el resonador está formado por un segmento "en cortocircuito" de una guía de ondas circular con un cilindro coaxial de ferrita longitudinalmente magnetizado (fig. 84.8, *a*). Cuando en el interior de la ferrita no hay campo magnético continuo ($H_0 = 0$), este sólo deforma ligeramente el campo no giratorio de las oscilaciones del tipo fundamental, influyendo de igual forma en ambas componentes giratorias que tienen dependencias azimutales $e^{i\alpha}$ y $e^{-i\alpha}$ y que quedan degeneradas; las respectivas curvas de resonancia son idénticas e "indivisibles". Al aplicar un campo continuo ($H_0 \neq 0$) la ferrita perturba de forma diferente los tipos giratorios de oscilaciones (si el vástago es de poco grosor, podemos decir que en uno de los casos su permeabilidad magnética equivalente será $\dot{\mu}^+ = \dot{\mu} + \dot{\alpha}$ y en el otro, $\dot{\mu}^- = \dot{\mu} - \dot{\alpha}$). La frecuencia propia de una de ellas, aumenta, mientras que la de la otra, disminuye.

La curva de resonancia a observar, primeramente, será de dos máximos, y a continuación, a medida que H_0 aumenta, las frecuencias propias se dispersan considerablemente (fig. 84.8, *b*). Al

mismo tiempo, la curva que corresponde al tipo de oscilaciones con polarización dextrógira por el eje, no sólo se desplaza hacia las bajas frecuencias, sino que además se estrecha debido al aumento del factor de calidad: $(\mu^+)'' < \mu''$. La otra curva (polarización levógira) se desplaza hacia las frecuencias altas y se ensancha $(\mu^-)'' > \mu''$.

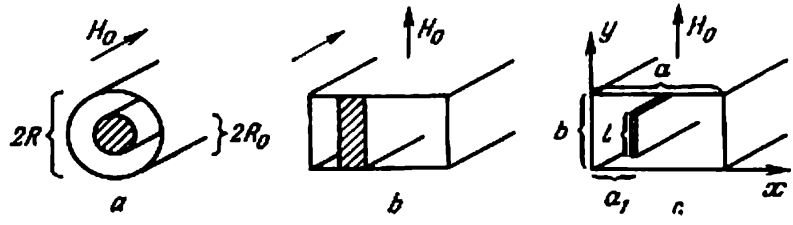


Fig. 84.9.

3. Teoría de los sistemas de guías de ondas con elementos girótropos. Conclusión. Los sistemas reales de guías de ondas que contienen ferritas son irregulares y a ellos deben aplicarse los métodos sobre los que se habló brevemente en el § 76; estas cuestiones se exponen detalladamente en [1.3]. Sin embargo, ya tiene gran interés práctico la investigación de los sistemas idealizados, por ejemplo, una guía de ondas regular circular con vástago de ferrita longitudinalmente magnetizado, en forma de un cilindro coaxial (fig. 84.9, *a*), una guía de ondas rectangular regular con una capa de altura total transversalmente magnetizada (fig. 84.9, *b*), etc. Estos problemas son relativamente sencillos; fueron resueltos hace tiempo según los métodos utilizados en el § 67 (véase [E.5—7]). Si el modelo de ferrita es pequeño, aunque no sea más que por una de sus dimensiones (esfera o cilindro de poco radio, placa de poco grosor, etc), se emplea exitosamente la teoría de perturbaciones (§ 75).

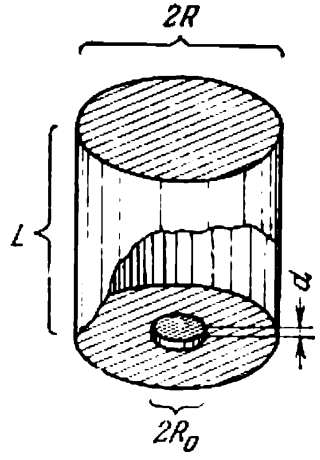


Fig. 84.10.

Como ejemplo, consideremos una perturbación del tipo de las oscilaciones H_{11p} de un resonador circular cilíndrico, provocada por un disco pequeño coaxial de ferrita, magnetizado por el eje y situado en una de las bases, fig. 84.10. Esto quiere decir, que el disco está dispuesto en el vientre del campo magnético que es tangencial a su superficie; el campo magnético perturbado en el interior del disco ($\boldsymbol{H}$) puede ser identificado con el campo inicial en esta región, despreciando la componente longitudinal del vector magnético y el campo eléctrico (que es transversal).

Sea que el campo inicial es giratorio (con dependencia azimutal $e^{i\alpha}$ o bien $e^{-i\alpha}$). En la región del disco, siendo $R_0 \ll R$, es

admisible considerar que el campo es homogéneo, y la polarización, circular, así que en dependencia del signo en $e^{\pm i\alpha}$, la permeabilidad magnética equivalente de la ferrita, es $\dot{\mu}^{\pm}=\dot{\mu}\pm\dot{\alpha}$ y la fórmula (75.5) ó (75.10), proporciona

$$\frac{\Delta\dot{\omega}^{\pm}}{\omega_0}\approx-(\dot{\mu}\pm\dot{\alpha}-\mu_0)\frac{\int\limits_{\Delta V}|\dot{H}_{m0}|^2\,dv}{2\mu_0\int\limits_{V_0}|\dot{H}_{m0}|^2\,dv} \tag{84.7}$$

(las energías medias eléctrica y magnética de las oscilaciones iniciales coinciden). El índice $\pm$ en $\Delta\dot{\omega}$ corresponde a dos diferentes direcciones de la polarización circular. Introduciendo en la (84.7) las componentes del vector $\dot{H}_m=\dot{H}_{m0}$ del campo del tipo H_{11p} de la fórmula (70.11) (en el numerador para $z=0$), después de integrar, se obtiene

$$\frac{\Delta\dot{\omega}^{\pm}}{\omega_0}\approx-\frac{1}{2}\left(\frac{\chi_z}{k_0}\right)^2\frac{d}{L}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\frac{A_{11}^2}{(A_{11}^2-1)J_1^2(A_{11})}\left(\frac{\dot{\mu}\pm\dot{\alpha}}{\mu_0}-1\right). \tag{84.8}$$

El sentido de este ejemplo es el mismo que en el caso que consideramos al final del punto 2. La girotropía elimina la degeneración de los campos giratorios. Una ilustración (cualitativa) del resultado (84.8), puede ser la fig. 84.8, *b*.

En el caso de una guía de ondas circular con un cilindro coaxial longitudinalmente magnetizado y, cuando dicho cilindro es de pequeño grosor, se puede hacer uso de este mismo procedimiento teniendo, no obstante, en cuenta la diferencia entre los campos inicial y perturbado en el interior del vástago. Con una aproximación cuasiestática (compárense el § 50 punto 4 y las fórmulas (51.29), (51.31)

$$\dot{E}_m=\frac{2\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}+\varepsilon_0}\dot{E}_{m0},\qquad \dot{H}_m=\frac{2\mu_0\dot{H}_{m0}}{\dot{\mu}^{\pm}+\mu_0}=\frac{2\mu_0}{\dot{\mu}\pm\dot{\alpha}+\mu_0}\dot{H}_{m0},$$

y la aplicación de la fórmula (75.8), nos da

$$\frac{\Delta\dot{\Gamma}^{\pm}}{\Gamma_0}=\frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\frac{A_{11}^2}{(A_{11}^2-1)J_1^2(A_{11})}\left[\frac{\dot{\mu}\pm\alpha-\mu_0}{\dot{\mu}\pm\dot{\alpha}+\mu_0}+\left(\frac{k}{\Gamma_0}\right)^2\frac{\dot{\varepsilon}-\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon}+\varepsilon_0}\right] \tag{84.9}$$
$$(R_0\ll R)$$

(fig. 84.9, *a*) para las ondas de dos rotaciones contrarias. De aquí se deduce que el número de Faraday (compárese con el § 83, punto 2), es igual a

$$R=\frac{\Gamma^+-\Gamma^-}{2}=\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\frac{A_{11}^2\Gamma_0}{(A_{11}^2-1)J_1^2(A_{11})}\frac{\mu_0\alpha}{(\mu+\mu_0)^2-\alpha^2}. \tag{84.10}$$

También citemos sin deducirla la fórmula que se obtiene según el método de las perturbaciones, del incremento de la constante

de propagación de la onda H_{10} de una guía de ondas rectangular, al ubicar en ella una lámina de ferrita vertical transversalmente magnetizada (fig. 84.9, *c*);

$$\frac{\Delta\dot{\Gamma}^{\pm}}{\Gamma_0} = \frac{id}{ab}\left\{\left[1 - \frac{\mu_0}{\dot{\mu}} + \left(\frac{k}{\Gamma_0}\right)^2\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0} - 1\right)\right]\operatorname{sen}^2\frac{\pi a_1}{a} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\chi}{\Gamma_0}\right)^2\left(\frac{\dot{\mu}^2 - \dot{\alpha}^2}{\dot{\mu}\mu_0} - 1\right)\cos^2\frac{\pi a_1}{a} \pm \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\mu}}\frac{\chi}{\Gamma_0}\operatorname{sen}\frac{2\pi a_1}{a}\right\} \quad (d \ll a). \quad (84.11)$$

El signo doble corresponde a las dos direcciones de propagación de la onda (irreversibilidad).

La aplicación consecutiva de la teoría de perturbaciones y los resultados que se obtienen, pueden ser estudiados por el lector en [I.3].

En conclusión señalemos que después de analizar los casos más típicos de girotropía en radiotecnia, aún, en muy alto grado, no hemos agotado este tema. Una de las limitaciones impuestas de antemano, fue la exigencia de la *linealidad* del medio. No obstante, los medios girótropos pueden notablemente ser no lineales, lo que en muchos casos es importante. Los medios no lineales se tratarán independientemente en los §§ 86, 87.

III. Medios activos

Vamos a llamar *activo* o *regenerativo* a un medio que en contrariedad con el medio absorbente, transmite energía al campo electromagnético. Claro está que dicho fenómeno está acondicionado por la acción de unos u otros factores físicos que respecto al campo a examinar son exteriores o ajenos. Sin embargo, aquí no se trata de las fuerzas exteriores preestablecidas (en forma de las funciones $\boldsymbol{E}^{ex}$ o bien, $\boldsymbol{j}^{ex}$, etc); en tal caso cierta región llena de un medio activo, sería simplemente la región del manantial (§ 43, punto 1), es decir, no habría la necesidad de salir de los límites del planteamiento ordinario del problema sobre la radiación (sobre la excitación del campo por manantiales fijados). El rasgo del medio activo es su "respuesta" al campo electromagnético: los procesos ajenos transcurren bajo la acción de este último y a él le transmite la energía. Como se indicó en el § 30, punto 2, a las oscilaciones armónicas (o bien para las componentes armónicas a una dependencia del tiempo arbitraria) los medios activos se describen introduciendo la permitividad y la permeabilidad magnética complejas $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon''$ y $\dot{\mu} = \mu' - i\mu''$ para $\varepsilon'' < 0$ y (o bien) $\mu'' < 0$. Idéntico papel puede jugar la conductividad negativa $\sigma < 0$ (§ 9, punto 2).

La representación sobre los medios activos es cómoda puesto que proporciona un procedimiento único para describir diversos factores regenerativos al plantear problemas de electrodinámica. En la radiotecnia contemporánea su variedad es bastante grande. En los amplificadores y generadores se emplean los movimientos macroscópicos de las partículas en los campos (electrónica) y los

efectos microscópicos (radiotecnia cuántica); ha adquirido gran importancia la amplificación y excitación paramétricas. Claro está que el estudio detallado de estas cuestiones sale, en alto grado, de los límites del presente curso. Nosotros vamos a limitarnos a tratar el aspecto electrodinámico que será útil a nuestros lectores como introducción a las respectivas asignaturas especiales.

§ 85. Campos y ondas en los medios activos

1. Naturaleza y manifestaciones de la regeneración. Retornemos a los resultados del análisis de la interacción del haz electrónico y la onda progresiva electromagnética, obtenidos en el § 80, punto 1. La región del haz (en la que los electrones transmiten su energía al campo) puede ser considerada como un medio activo. El proceso regenerativo es puramente eléctrico: la interacción con el campo eléctrico de una onda, como se deduce de la (80.9). Puesto que en virtud de la (30.16) Re $\dot{p} = \omega\varepsilon'' E_m^2/2$, entonces, de acuerdo con la (80.9a), podemos obtener de inmediato la expresión de la parte imaginaria de la constante dieléctrica compleja del medio activo dado. Siendo $|\Gamma''|^2 \ll |k_q - \Gamma'|^2$, se halla

$$\varepsilon'' \approx -2\frac{P_0}{v_0^2}\frac{q}{m}\frac{\Gamma''}{(k_q-\Gamma')^3}. \qquad (85.1)$$

La regeneración transcurre al satisfacerse la condición (80.10).

A continuación, vamos a considerar en forma simplificada el principio de la *resonancia paramétrica* [1]), en el caso de que la regeneración de las oscilaciones se provoca por la variación periódica de uno u otro parámetro del sistema oscilante. Como ejemplo idealizado, tomemos el caso de la variación instantánea de la capacidad de un circuito oscilante que se realiza, digamos, desplazando las placas del condensador, o bien, introduciendo y sacando un dieléctrico sólido (fig. 85.1*a*). Dado que para el valor máximo de la capacidad C se producen oscilaciones armónicas con una frecuencia propia del circuito $\omega = 1/\sqrt{\mathscr{L}C}$. Si en el momento de aplicar al condensador la tensión máxima ($u = u_m$) y cuando también es máxima la carga ($q = q_m$), y no hay corriente, disminuir instantáneamente la capacidad de condensador en una magnitud ΔC (por ejemplo, separando las placas), tendrá lugar un salto de la tensión hasta la magnitud $u'_m = q_m(C-\Delta C)$, y luego para esta amplitud se producirán oscilaciones armónicas con una frecuencia $\omega' = 1/\sqrt{\mathscr{L}(C-\Delta C)}$ (fig. 85.1, *b*). La energía del circuito aumentó porque al separar las placas se efectuó un trabajo dirigido contra

[1]) Con relación a la importancia que ha adquirido en la actualidad la resonancia paramétrica, será interesante al lector estudiar la lección de L. J. Mandelshtam ([D.1], pág. 189), pronunciada el año 1931.

la fuerza del campo, fuerza que condiciona su atracción mutua (señalemos que la potencia $P(t)$ es, al mismo tiempo, una δ-función).

Sin embargo, en el momento cuando en el condensador no hay tensión ($u=0$), podemos retornar a la capacidad su anterior valor (acercando las placas), sin causar influencia energética alguna, pero variando la frecuencia propia de ω' a ω y en el momento de

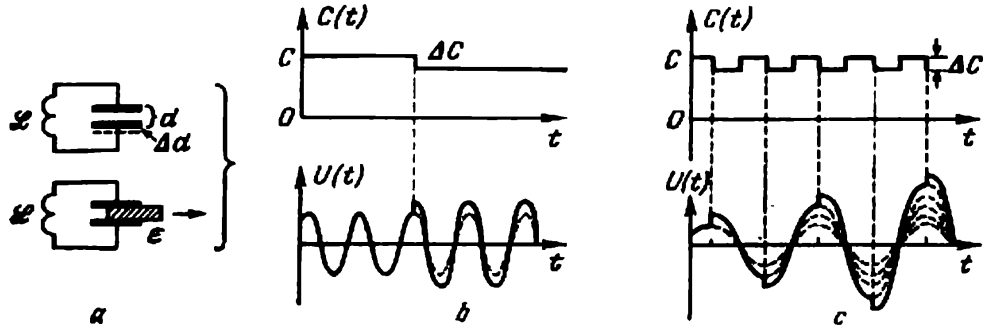


Fig. 85.1.

la tensión máxima, de nuevo disminuir la capacidad en ΔC. Si este proceso se repite periódicamente, entonces la tensión crecerá a saltos como muestra la fig. 85.1, *c*; se considera que $\Delta C \ll C$ y $\omega' \approx \omega$.

Vamos a considerar que la curva en la fig. 85.1, *c* es próxima a una sinusoide durante el transcurso de cada "período" y calculemos la potencia media transmitida a las oscilaciones electromagnéticas:

$$\overline{P} = -\frac{2}{T}\left[\frac{q_m^2}{2(C-\Delta C)} - \frac{q_m^2}{2C}\right] \approx -\frac{P_m^2}{TC^2}\Delta C = -\frac{\omega q_m^2}{2\pi C^2}\Delta C$$

($T = 2\pi/\omega$). Atribuyendo la acción energética a la actividad del medio en el interior del condensador, según la (30.16), se obtiene que

$$-\frac{\omega q_m^2}{2\pi C^2}\Delta C \approx \frac{\omega \varepsilon''}{2} E_m^2 V,$$

y como $q_m = \varepsilon E_m S$, $C = \varepsilon S/d$ y $V = Sd$, de aquí se desprende que

$$\varepsilon'' = -\varepsilon \frac{1}{\pi}\frac{\Delta C}{C}, \qquad (85.2)$$

y, en particular, cuando en el interior del condensador se introduce un dieléctrico con permitividad ε,

$$\varepsilon'' = -\frac{1}{\pi}(\varepsilon - \varepsilon_0). \qquad (85.2a)$$

En radiotecnia se emplean los llamados *amplificadores paramétricos* y dispositivos análogos en los que el papel de capacidad modulada lo juega una capa que se forma en la unión $p-n$ de un diodo semiconductor. Por ejemplo, el diodo puede ser ubicado en

un resonador hueco y actuar como una región con medio activo para oscilaciones propias de una frecuencia ω; en este caso la modulación de la capacidad se produce por el campo con una frecuencia 2ω (compárese con la fig. 85.1, *c*). Suelen decirse que éste es el campo de "bombeo" y sirve de manantial de energía para el campo a amplificar.

Se puede modular el parámetro del sistema oscilatorio no ligado con la energía eléctrica, sino con la magnética, es decir, en el caso más sencillo, la inductancia del circuito. Los amplificadores paramétricos también se construían a base de los elementos de ferrita con inversión del magnetismo periódico en resonadores huecos. Sin embargo, éstos no se han desarrollado más allá de modelos experimentales.

Son conocidos extensamente los *amplificadores y generadores cuánticos* de frecuencias ultraaltas (máseres) y los *amplificadores y generadores ópticos* (láseres). Nosotros no podemos exponer los principios de su funcionamiento, ya que el material anterior del presente libro es absolutamente insuficiente; esto es el objeto de estudio de la *radiotecnia cuántica* (véase, por ejemplo, [E.8]). No obstante, subrayamos que ellos se describen como sistemas electrodinámicos, resonadores y guías de ondas huecos y abiertos, con medios activos. Por ejemplo, las substancias paramagnéticas que se emplean en los máseres se comportan como magnéticos regenerativos ($\mu'' < 0$).

2. Propiedades de los campos electromagnéticos. Pongamos en claro las leyes propias de los campos electromagnéticos en medios activos.

Para un proceso unidimensional, el campo se describe mediante la solución (32.2) de la ecuación (32.1). El número de onda complejo $\dot{k} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}}$ (33.1) lo vamos a representar como anteriormente: $\dot{k} = k' - ik''$ (33.2). Dado $\varepsilon' > 0$ y $\mu' > 0$, pero ya que el medio es activo, en diferencia del caso considerado antes (§ 33), $\varepsilon'' \leqslant 0$ o bien $\mu'' \leqslant 0$. De acuerdo con esto, en lugar de las (33.3) examinemos las desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} k' > 0,\ k'' < 0 \\ k' < 0,\ k'' > 0 \end{array}\right\} \quad \text{(85.3)}$$

o bien

y como el carácter de la solución (33.4) no varía en dependencia del renglón de las (85.3) que se utiliza (los términos sólo cambian de lugar), entonces para la certidumbre, nos detendremos en las desigualdades del primer renglón: $k' > 0$, $k'' < 0$.

A las expresiones de los vectores del campo de una onda plana homogénea (33.13) les daremos, a base de esto, la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 A e^{|k''|z} \cos(\omega t - k'z + \varphi), \\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{y}_0 \dfrac{A}{|\dot{W}|} e^{|k''|z} \cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_W). \end{array}\right\} \quad \text{(85.4)}$$

Al propagarse la onda, las amplitudes de las intensidades E y H *crecen* de modo exponencial; la "imagen instantánea" de la distribución de $E(z)$ y $H(z)$ se muestra en la fig. 85.2 (compárese con la fig. 33.1). La magnitud $|k''|$ se denomina naturalmente *factor (coeficiente) de amplificación* de onda. La razón

$$\frac{E_m(z+l)}{E_m(z)} = e^{|k''|l} \qquad (85.5)$$

nos muestra cuántas veces ha aumentado la amplitud de la onda a una distancia l (compárese con la (33.8)). Se puede hablar de una *amplificación* de la onda $G = |k''|l$, medida en néperes o, después de multiplicar por 20 lg e, en decibelios (compárese con la (33.9)).

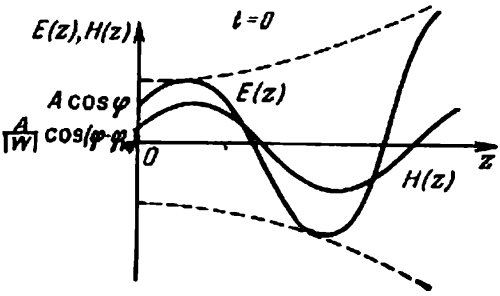


Fig. 85.2.

Claro está que el caso de un medio activo infinito no es real (como también de cualquir medio infinito con ε y μ constantes), pero hay procesos que en los medios activos pueden ser cercanos a los unidimensionales.

En la radiotecnia de las frecuencias ultraaltas se emplean *amplificadores de onda progresiva* en forma de un segmento de uno u otro sistema de guiado que contiene un medio activo. Como se desprende de la (63.15), para ε'' y μ'' negativos, la magnitud Γ'' en las (61.2) también es negativa. En las expresiones (61.1) que definen la onda guiada será $e^{-i\Gamma z} = e^{-i\Gamma' z} e^{|\Gamma''|z}$. Aquí $|\Gamma''|$ es el factor de amplificación que puede ser introducido en la (85.5) en lugar de $|k''|$.

En realidad hay que tener en cuenta que el segmento del sistema de guiado que se utiliza en el amplificador, también contiene un medio absorbente (por ejemplo, absorben las cubiertas metálicas de las guías de ondas) así que en virtud de la (63.13)

$$\frac{E_m(z+l)}{E_m(z)} = e^{(-\Gamma_1'' + |\Gamma_2''|)l}, \qquad (85.6)$$

siendo $\Gamma_1'' > 0$ el coeficiente de amortiguamiento que caracteriza la absorción y $|\Gamma_2''|$ el factor de amplificación en el medio activo. La magnitud $|\Gamma_2''| = |\Gamma_2''(P_b)|$ es una función que crece monótonamente desde cero de la potencia P_b del generador de "bombeo" que condiciona la acción del medio activo. Estando el bombeo desconectado ($P_b = 0$), la relación (85.6) es igual a $e^{-\Gamma_1'' l} < 1$, y para cierto valor $P_b = P_b^*$ la absorción estará compensada ($-\Gamma_1'' + |\Gamma_2''| = 0$) y la onda pasará sin amortiguamiento. La amplificación se observa siendo $P_b > P_b^*$, cuando la razón (85.6) es mayor que la unidad.

Por último, consideremos un resonador hueco con medio activo unido con dos guías de ondas "de modo pasante" (fig. 85.3, *a*) o bien, mediante un orificio y un circulador (§ 84, punto 2) que

separa las ondas de dos direcciones (en el cuarto canal del circulador se encuentra un absorbente que no refleja), fig. 85.3, *b*.

Introduzcamos en nuestra consideración los valores absolutos de las amplitudes del vector E de la señal que llega a la entrada *1* (E_1), del campo en el resonador (E) y de la señal de salida (E_2); esta última va al canal *2* (fig. 85.3, *a*) o al *3* (fig. 85.3, *b*). Al haber resonancia, en virtud del § 71, punto 5, $E = k_1 Q E_1$, siendo k_1 cierto factor de proporcionalidad. Introduciendo otro factor de proporcionalidad k_2, escribimos: $E_2 = k_2 E$, es decir, $E_2 = k_1 k_2 Q E_1$. Sea que la igualdad escrita se refiere al caso cuando no hay bombeo ($P_B = 0$), mientras que al conectarlo el factor de calidad y la señal de salida varían: $\tilde{E}_2 = k_1 k_2 \tilde{Q} E_1$. Llamemos a la fracción $\tilde{E}_2/E_2$ factor de amplificación relativo. Es evidente que

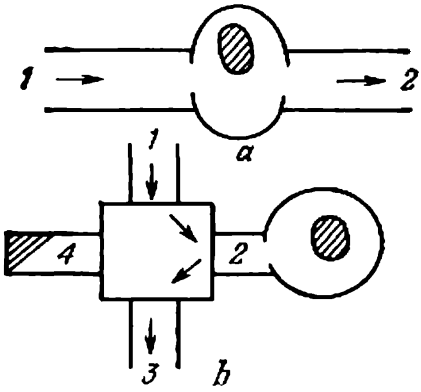


Fig. 85.3.

$$\frac{\tilde{E}_2}{E_2} = \frac{\tilde{Q}}{Q} \qquad (85.7)$$

(los factores k_1 y k_2 pueden considerarse invariables), siendo, además, los factores de calidad iguales a

$$Q = \frac{\omega W}{P_0 + P_\Sigma} \text{ y } \tilde{Q} = \frac{\omega W}{P_0 + P_\Sigma + P^{ex}} = \frac{\omega W}{P_0 + P_\Sigma - |P^{ex}|} \qquad (85.8)$$

(§ 69, punto 3), donde P_0 es la potencia de absorción en el interior del resonador, P_Σ, la potencia de radiación como resultado del

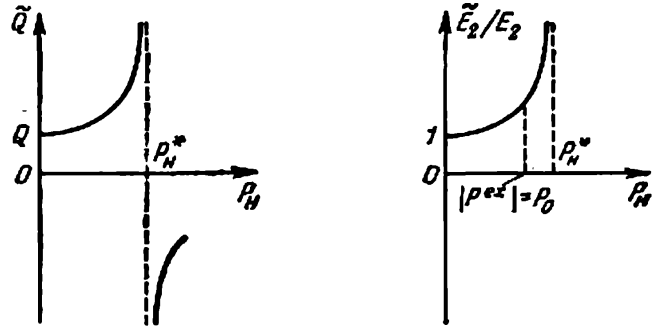


Fig. 85.4.

enlace con las guías de ondas y $P^{ex} < 0$, la potencia que se cede al campo del resonador por el medio activo. Está claro que esta potencia se puede expresar por medio de la potencia y el rendimiento de bombeo: $|P^{ex}| = \eta(P_B) P_B$. Así,

$$\frac{\tilde{E}_2}{E_2} = \frac{1}{1 - |P^{ex}|/(P_0 + P_\Sigma)}. \qquad (85.9)$$

Al crecer P_s, el factor de calidad $\tilde{Q}$ (85.8) aumenta infinitamente *mientras* $|P^{ex}|$ *se aproxima a la magnitud* $P_0 + P_\Sigma$ *(fig. 85.4, a).* En este caso el coeficiente de amplificación será infinito, es decir, *que la señal de salida existe con una señal de entrada infinitamente* pequeña. Este es el llamado "umbral de excitación" del *sistema* que empieza a trabajar como generador. En la fig. 85.4, *b* se muestra la gráfica $\hat{E}_s/E_t$. En calidad de amplificador el resonador *funciona a partir del momento de la compensación de las pérdidas* interiores: $|P^{ex}| = P_0$.

IV. Medios no lineales

Como se marcó en el § 5, punto 3 y más adelante, medios "rigurosamente lineales" no existen, aunque indiscutiblemente, predominan situaciones cuando los medios son "prácticamente lineales" y son aplicables las correlaciones linealizadas (5.6), (5.7) y (6.6) o bien, para la anisotropía, (5.13), (5.14) y (6.7).

La no linealidad de la mayoría de los medios más divulgados sólo se manifiesta en campos relativamente potentes, los que aún se encuentran raramente en la técnica. No obstante, ya hace tiempo que son conocidos fenómenos no lineales que se observan a los valores de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ *para la práctica. En primer lugar notemos los* fenómenos de *ferromagnetismo*; la no linealidad de los ferromagnéticos *ya se tenía en cuenta en el siglo XIX al proyectar máquinas* eléctricas. A los materiales ferromagnéticos son análogos los materiales *ferroeléctricos: se trata de la semejanza de las dependencias* $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ en el primer caso y $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E})$, en el segundo (desde un punto *de vista de fenomenología). Es sustancialmente no lineal la dependencia* $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{E})$ para las partículas en el vacío, por ejemplo, para los haces de electrones y para el plasma. La no linealidad del plasma de ionosfera resulta ser en una serie de casos muy notable para la propagación de las ondas de radio. En el § 80, punto 1 ya se marcó la no linealidad de los problemas de la electrónica de frecuencias ultraaltas.

No tratando de dar una relación completa de medios sustancialmente no lineales, sólo señalaremos que durante los últimos años debido a la aparición de potentes láseres han resultado ser posibles potentísimos campos electromagnéticos y se ha ampliado considerablemente el círculo de los fenómenos no lineales observados que tienen carácter ondulatorio. Se ha creado la *óptica no lineal*, dominio científico que ya ha adquirido gran propagación.

A continuación, van a ser examinadas ciertas manifestaciones de la no linealidad y las cuestiones de la electrodinámica de medios no lineales.

§ 86. Naturaleza y manifestaciones de no linealidad

1. No linealidad de la conductancia (electroconductibilidad). Consideremos en rasgos generales el paso de la corriente continua por un gas. Este último, como resultado de la acción de diferentes factores exteriores (véase, por ejemplo, el § 81, punto 1), está siempre ionizado en cierto grado y, podemos suponer, de modo equilibrado: las cantidades de los electrones e iones que se crean y que las recombinan son iguales así que las densidades medias de las cargas positiva y negativa ρ^+ y $\rho^- = -\rho^+$ quedan constantes. La aplicación de un campo eléctrico provocará la aparición de corriente. Ahora, las partículas cargadas no sólo irán a cubrir las pérdidas para la recombinación sino que también saldrán al circuito exterior de corriente continua [1], pero siendo campos pequeños esta fuga de partículas es despreciablemente pequeña y la densidad de corriente puede determinarse como $\boldsymbol{j} = \rho^+ \boldsymbol{v}^+ + \rho^- \boldsymbol{v}^-$, siendo $\boldsymbol{v}^+$ y $\boldsymbol{v}^-$ las velocidades de las partículas, pero la densidad no depende de E. A un número suficientemente grande de colisiones con moléculas neutrales, a las que se cede la energía, v^+ y v^- son proporcionales a E. De esta manera se obtiene la correlación lineal $\boldsymbol{j} = \rho^+ (k^+ + k^-) \boldsymbol{E}$; k^+ y k^- son los factores de proporcionalidad que se denominan "movilidades" de partículas.

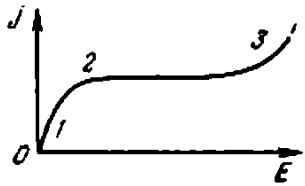


Fig. 86.1.

Esto es la ordinaria ley de Ohm que se ilustra por el sector *1* de la curva en la fig. 86.1. Al aumentar E la densidad de corriente crece y un número mayor de partículas cargadas sale sin recombinar, hasta que por fin la corriente no abarca *todas* las partículas formadas de nuevo: se produce la saturación (fig. 86.1, sector *2*). Durante cierto tiempo el aumento posterior de E no proporciona el crecimiento de la corriente. Pero, luego, la energía de las partículas crece hasta tal grado con el que comienza la ionización por colisión o choque. Esto es un proceso de avalancha y, por esta razón, dejan de ser necesarios los factores ionizantes exteriores para mantener la corriente; comienza la llamada "descarga autónoma" (fig. 86.1, sector *3*). La dependencia $j(E)$ es no lineal.

Indiquemos una no linealidad de un tipo absolutamente diferente que puede ser llamada indirecta. La conductibilidad específica (conductividad) de los metales σ en condiciones fijadas, es posible decir, no depende en absoluto de la intensidad del campo eléctrico (o de la densidad de corriente). Sin embargo, el metal se comporta como un medio notablemente no lineal, incluso para los campos y corrientes débiles, si al aumentar $\boldsymbol{E}$ se produce un

[1] Nos podemos imaginar que la corriente pasa por electrodos paraletos en forma de láminas. Para mantener la corriente continua es, como sabemos, necesario un circuito donde haya un generador (§ 26, punto 4).

calentamiento considerable a causa de lo que varía σ; por ejemplo, por esto, es no lineal la resistencia de una lámpara de incandescencia.

2. **Ferromagnetismo y ferroelectricidad.** Los materiales ferromagnéticos se caracterizan, ante todo, por la magnetización (imantación) espontánea (§ 21, punto 4). Al hablar del modelo de un medio en forma del conjunto de dipolos magnéticos, es preciso, en tal caso, introducir en la consideración factores interiores de orientación muy fuertes, cuya esencia puede ser sólo explicada desde el punto de vista de la física cuántica. Bajo la influencia de estos factores los dipolos deben orientarse paralelamente lo que en realidad ocurre en el interior de regiones muy pequeñas, pero macroscópicas, llamadas *dominios*; no obstante, estos últimos forman (para mayor certidumbre vamos a hablar de sustancia policristalina) una estructura caótica (fig. 86.2). Con todo, está o no magnetizada en término medio la sustancia, depende de su "prehistoria"

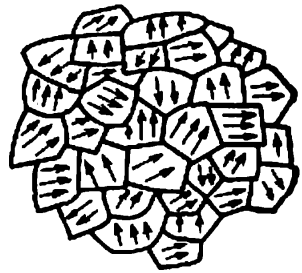


Fig. 86.2.

Si en su estado inicial el material ferromagnético está desmagnetizado (es igual a cero la magnetización espontánea media $\boldsymbol{M}^0$), entonces al aplicar un campo magnético la inductividad media $\boldsymbol{B}$ variará en dependencia de $\boldsymbol{H}$ como se muestra en la fig. 86.3, *a*. Los dominios se deforman con tendencia a convertirse en un solo

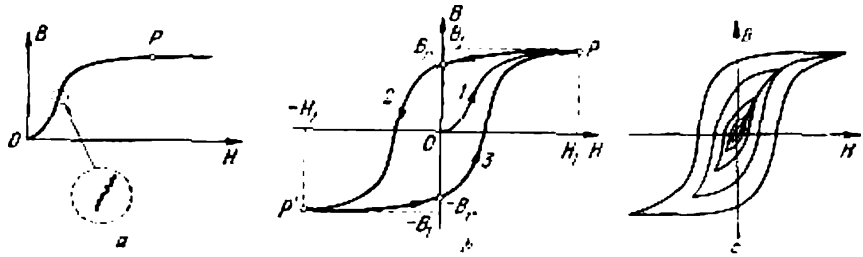


Fig. 86.3.

dominio, en el que el vector de magnetización es paralelo a $\boldsymbol{H}$, es decir, hay "saturación". Es interesante que el carácter de saltos de este proceso puede ser observado experimentalmente ("saltos de Barkhausen"); en la fig. 86.3, *a* está esquemáticamente representado un sector de la parte media de la curva $B(H)$ a escala amplificada. Esta *curva de magnetización demuestra la no linealidad considerable* de dicha dependencia.

Dado que al magnetizar un ferromagnético aumentamos la intensidad del campo magnético H desde su valor nulo hasta cierta magnitud H_1, lo que se describe por el movimiento del punto representativo por la curva de magnetización desde el origen de coordenadas hasta la posición $\boldsymbol{P}(H_1, B_1)$ (fig. 86.3, *a*, *b*). Si ahora se disminuye H, esto, de ninguna manera, significará que volveremos

al estado anterior. La marcha de la variación de B corresponderá al movimiento por la curva *2* (fig. 86.3, *b*), así que para $H = 0$ tendremos $B = B_r$, es decir, "inducción remanente". El movimiento posterior por la curva *2* responde a la variación del signo (dirección) de la intensidad del campo magnético al pasar por el punto nulo. Si $H = -H_1$ llegaremos al punto $P'(-H_1, -B_1)$ que es simétrico a $P(H_1, B_1)$ respecto al origen de coordenadas. Y al cambiar aquí la dirección del campo magnetizante, el movimiento transcurrirá por la curva *3* y, pasando de nuevo por el punto nulo, retornaremos a $P(H_1, B_1)$. Resulta que hemos pasado una curva cerrada que se denomina *bucle (ciclo) de histéresis*.

Si, al aplicar el campo a un ferromagnético desmagnetizado, nos paramos no en el punto $P(H_1, B_1)$ sino "antes", siendo un valor menor de H, se puede pasar otro ciclo de histéresis que se encontrará en el interior del primero. Una serie de tales curvas está expuesta en la fig. 86.3, *c*. Para los campos muy pequeños los ciclos de histéresis degeneran en segmentos de la recta del sector inicial en la curva de magnetización; en esta región el proceso es *reversible*. A continuación la *irreversibilidad* de magnetización está condicionada por pérdidas de energía al deformarse la estructura del dominio de la sustancia.

En virtud de la (10.8) y el § 11, punto 1, un incremento infinitamente pequeño de la energía magnética en el volumen V se puede expresar de la siguiente forma:

$$dW^{m} = \int_{V} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{B}\, dv, \tag{86.1}$$

y su variación al pasar del estado $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{B}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{B}_2$ es

$$W_2^{m} - W_1^{m} = \int_{V} \int_{\boldsymbol{B}_1}^{\boldsymbol{B}_2} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{B}\, dv. \tag{86.2}$$

Al efectuar una inversión cíclica del magnetismo del ferromagnético, después de circular una vez por el bucle de histéresis, se obtiene

$$\Delta W^{m} = \int_{V} \oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{B}\, dv, \tag{86.3}$$

siendo la integral de contorno ni más ni menos que el área de dicho bucle en la gráfica de la dependencia $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$. De esa manera, el retorno al estado inicial se consigue a cuenta de una pérdida de energía ΔW^{m}.

Si el campo magnético oscila armónicamente, el punto representativo pasa por el bucle de histéresis por cada período de oscilación. Las pérdidas resultan ser proporcionales al área del ciclo y a la frecuencia. Conviene señalar que el propio carácter del ciclo de histéresis depende de la velocidad de la inversión del magnetismo, o sea, de la frecuencia de oscilaciones.

Subrayemos que aunque el proceso de magnetización del ferromagnético considerado tiene un carácter no lineal muy fuerte, la histéresis es un fenómeno que sólo consiste en el retardo del proceso lineal. Si en los límites del método de amplitudes complejas se tiene una dependencia lineal $\dot{B}_m = \mu \dot{H}_m$ (§ 29, punto 2) esto significa que para $H = H_m \cos \omega t$, $B = \mu H_m \cos(\omega t - \beta)$. La gráfica $B(H)$ certifica la histéresis: es cíclica o, con mayor exactitud, la curva es una *elipse*. Al calcular la integral (86.3), tomaremos en consideración que $dB = -\mu\omega H_m \operatorname{sen}(\omega t - \beta)\, dt$. Por lo tanto,

$$\overline{P}_p^m = \frac{\Delta W_T^m}{T} = -\frac{\omega\mu}{T} \int_V H_m^2 \int_0^T \cos \omega t \operatorname{sen}(\omega t - \beta)\, dt\, dv =$$

$$= \frac{\omega\mu \operatorname{sen} \beta}{2} \int_V H_m^2\, dv = \frac{\omega\mu''}{2} \int_V H_m^2\, dv.$$

Este resultado coincide con el obtenido en el § 30, punto 2 (compárese con las (30.14) y (29.10)). Claro está que para la constante dieléctrica compleja se puede hablar de la histérisis eléctrica si $\alpha \neq 0$.

Retornemos al caso de un campo magnético continuo ubicado en un ferromagnético. Sea que se requiere calcular un toroide con holgura que se toma como circuito magnético (§ 24, punto 2, fig. 24.3, a). Según el § 24, punto 2 (véase la deducción de la fórmula (24.8))

$$nI = H(L - d) + H_{hol} d,$$

pero como el vector B, siendo normal a la superficie de separación de los medios, tiene un mismo valor en el material ferromagnético y en la holgura aérea, de aquí

$$nI = H(L - d) + \frac{B}{\mu_0} d, \qquad (86.4)$$

donde se supone que B y H se encuentran en el ferromagnético. Al mismo tiempo, B y H están ligadas por la dependencia no lineal del tipo mostrado en la fig. 86.3 *b*. La solución exigida del problema se halla gráficamente: en la gráfica de la histéresis se traza la *recta* $B(H)$ descrita por la ecuación (86.4), como se representa en la fig. 86.4. Ahora es necesario sólo tomar los valores de B y H que corresponden al punto de intersección de ambas líneas. Estos son tres puntos y quedó anteriormente claro, cuál de ellos hay que elegir; si, por ejemplo, el toroide fue primeramente desmagnetizado, éste será el punto Q.

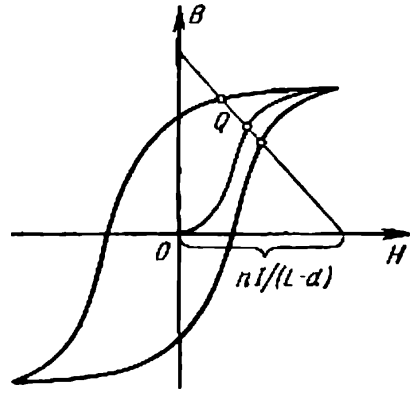


Fig. 86.4.

Acerca de los materiales ferroeléctricos sólo diremos que la dependencia $D(E)$ tiene aquí, en rasgos generales, el mismo carácter

que dicha dependencia $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ para los ferromagnéticos, aunque los procesos internos son absolutamente diferentes.

3. **No linealidad en electrodinámica.** En el § 80, punto 1 consideramos posible *linealizar* el problema no lineal de electrodinámica en las condiciones cuando la componente continua del campo *ha sido considerablemente mayor que la variable. Tales condiciones* son bastante típicas. Dado que, por ejemplo, tenemos una dependencia no lineal $j(E)$ (fig. 86.5), además, $E = E_0 + E(t)$; $E_0 = \text{const}$, $|E(t)| \ll E_0$ (por ejemplo, $E(t) = E_m \cos \omega t$ y $E_m \ll E_0$). Es evidente que $\Delta j \approx \frac{\partial j}{\partial E} \Delta E = \frac{\partial j}{\partial E} E(t)$, es decir, cuanto menor sea la componente variable (el incremento) de la intensidad del campo, con tanto mayor razón podemos considerar lineal la dependencia entre Δj y ΔE ($j(t)$ y $E(t)$); en ciertas ocasiones, denominan el coeficiente $\partial j/\partial E$ "conductibilidad específica diferencial" y lo designan por σ_d. Dicho coeficiente es función de la componente continua: $\sigma_d = \sigma_d(E_0)$ (fig. 86.5). De modo análogo, al estudiar las dependencias $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E})$ y $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$, se introducen los conceptos de permeabilidades adicionales $\varepsilon_d = \varepsilon_d(E_0)$ y $\mu_d = \mu_d(H_0)$.

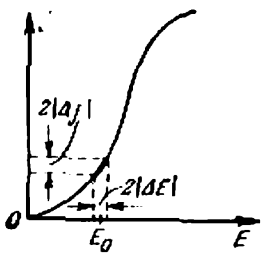


Fig. 86.5.

La dependencia se hace sustancialmente no lineal incluso para pequeñas amplitudes de los vectores del campo, si en las series de Taylor *para las dependencias* $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$, etc., (compárese con la (5.10)) las derivadas de segundo y mayores órdenes no pueden ser despreciadas. Para la certidumbre tomemos la dependencia $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$ (5.3) que representaremos de modo semejante a la (5.11), pero que escribiremos de forma diferente:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{L}} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}, \\ &\boldsymbol{P}^{\mathrm{L}} = \varepsilon_0 \chi_L^e \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}} = \varepsilon_0 (\chi_1^e \boldsymbol{E} + \chi_2^e \boldsymbol{E}^2 + \ldots + \chi_i^e \boldsymbol{E}^i + \ldots)\, \boldsymbol{E}. \end{aligned}\right\} \quad (86.5)$$

Aquí la polarizabilidad $\boldsymbol{P}$ está dividida respectivamente en sus partes $\boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}$ y $\boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}$.

En el caso más sencillo el vector $\boldsymbol{E}$ efectúa oscilaciones armónicas con una frecuencia ω: $E = E_m \cos(\omega t + \varphi)$. Y aunque aquí el método de amplitudes complejas (Suplemento 3) no puede ser aplicado directamente, podemos hacer uso de la representación (S3.5) en virtud de la cual $E = \frac{1}{2}(\dot{E}_m e^{i\omega t} + \dot{E}_m^* e^{-i\omega t})$. Poniendo esta expresión en la (86.5) se puede fácilmente cerciorarse de que P^{NL} se presenta como una serie que consta de los términos $\dot{P}_m^{\mathrm{NL}}(\pm n\omega)$ que *varían según la ley de* $e^{\pm i n\omega t}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), *siendo*

$$\dot{P}_m^{\mathrm{NL}}(\omega) = \varepsilon_0 [\dot{\chi}^e(\omega + \omega - \omega) \dot{E}_m^2 E_m^* + \\ + \dot{\chi}^e(\omega + \omega + \omega - \omega - \omega) \dot{E}_m^3 \dot{E}_m^{*2} + \ldots],$$

$$\dot{P}_m^{\mathrm{NL}}(2\omega) = \varepsilon_0 [\dot{\chi}^e(\omega + \omega) \dot{E}_m^2 + \dot{\chi}^e(\omega + \omega + \omega - \omega) \dot{E}_m^3 \dot{E}_m^* + \ldots],$$

etc., donde diversos $\dot{\chi}^e(\ldots)$ son coeficientes compuestos por χ_i^e de la (86.5). A causa de la no linealidad de la función $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$, las oscilaciones armónicas de $\boldsymbol{E}$ con una frecuencia ω crean también oscilaciones con frecuencias dobles, triples, etc., del vector de polarizabilidad. Por ejemplo, para hallar la componente de la frecuencia doble conviene sumar $\dot{P}_m^{NL}(2\omega)$ y $\dot{P}_m^{NL}(-2\omega)$ o bien tomar la parte real de una de estas magnitudes, por ejemplo, $\dot{P}_m^{NL}(2\omega)$.

Si el vector $\boldsymbol{E}$ tiene dos componentes frecuenciales, o sea, $E = E_{mp}\cos(\omega_p t + \varphi_p) + E_{mq}\cos(\omega_q t + \varphi_q)$ entonces es fácil desarrollar del mismo modo $\dot{P}^{NL}$ en una serie según las componentes frecuenciales $\dot{P}_m^{NL}(\pm k\omega_p \pm n\omega_q)$ que varian como $e^{i(\pm k\omega_p \pm n\omega_q)t}$, además,

$$\dot{P}_m^{NL}(\omega_p \pm \omega_q) = \varepsilon_0 \left[\dot{\chi}^e(\omega_p \pm \omega_q)\, \dot{E}_{mp} \frac{\dot{E}_{mq}}{\dot{E}_{mq}^*} + \right.$$

$$\left. + \dot{\chi}^e(\omega_p + \omega_p - \omega_p \pm \omega_q)\, \dot{E}_{mp}^2 \dot{E}_{mp}^* \frac{\dot{E}_{mq}}{\dot{E}_{mq}^*} + \ldots \right],$$

$$\dot{P}_m^{NL}(2\omega_p \pm \omega_q) = \varepsilon_0 \left[\dot{\chi}^e(\omega_p + \omega_p \pm \omega_q)\, \dot{E}_{mp}^2 \frac{\dot{E}_{mq}}{\dot{E}_{mq}^*} + \right.$$

$$\left. + \dot{\chi}^e(\omega_p + \omega_p + \omega_p - \omega_p \pm \omega_q)\, \dot{E}_{mp}^3 \dot{E}_{mp}^* \frac{\dot{E}_{mq}}{\dot{E}_{mq}^*} + \ldots \right],$$

etc., donde diversos $\dot{\chi}^e(\ldots)$ están compuestos de χ_i^e de la (86.5). La componente de una u otra *frecuencia de combinación* $\pm k\omega_p \pm n\omega_q$ se halla del modo expuesto.

Todos los razonamientos pueden generalizarse para todas dependencias del tiempo del campo, empleando el desarrollo en la serie o la integral de Fourier (Suplemento 8). Claro está que en lugar de $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$ también se puede hablar de la dependencia $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{E})$, etc.

4. Continuación de la exposición. Consideremos un ejemplo que servirá de ilustración para la representación (86.5) y, simultáneamente, nos mostrará su limitación. Sea que en el plasma se ha dado el campo electromagnético en forma de una onda plana homogénea como la que existiría en el vacío (en el plasma enrarecido el campo puede ser muy parecido), a saber (§ 32, punto 3)

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 A\cos(\omega t - k_0 z), \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{y}_0 \frac{A}{W_0}\cos(\omega t - k_0 z), \qquad (86.6)$$

$\left(k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0},\ W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right)$. Además, vamos a tener en cuenta la fuerza de Lorentz acondicionada por un campo magnético alter-

nativo; con todo, la ecuación de movimiento se diferencia de la (82.3) sólo por la presencia de $\boldsymbol{H}$ en lugar de $\boldsymbol{H}_0$. Haciendo en virtud de la (86.6), $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}_0 E$ y $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{y}_0 E/W_0$, se escribe:

$$\frac{q}{m}\left\{\boldsymbol{x}_0 E+\frac{1}{v_0}\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ \boldsymbol{y}_0 E\right]\right\}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+\nu\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\quad\left(v_0=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right). \tag{86.7}$$

Para simplificar, vamos a despreciar las colisiones ($\nu=0$) y reducimos la fórmula a la forma de coordenadas:

$$\frac{q}{m}E-\frac{q}{m}\frac{1}{v_0}\frac{dz}{dt}E=\frac{d^2x}{dt^2},\quad 0=\frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{q}{m}\frac{1}{v_0}\frac{dx}{dt}E=\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{86.7a}$$

La no linealidad se encuentra en los productos de las velocidades por la intensidad del campo (las igualdades primera y tercera); ya que $v_{x,z}\ll v_0$ [1], los términos respectivos son muy pequeños y con *la primera aproximación lineal, pueden ser omitidos*. Entonces las (86.7a) son la forma particular de la ecuación (80.11) y para hallar $\boldsymbol{P}$ puede hacerse uso de la fórmula (80.14). Por lo demás, en este caso la primera igualdad (86.7a), en virtud de la (86.6), nos da

$$\frac{q}{m}A\cos(\omega t-kz)=\frac{d^2x}{dt^2},$$

de donde

$$x=-\frac{q}{m\omega^2}A\cos(\omega t-kz) \tag{86.8}$$

y, por consiguiente, sumando los momentos eléctricos de las partículas qx en la unidad de volumen, se halla

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}=-\boldsymbol{x}_0\frac{e^2N'}{m\omega^2}A\cos(\omega t-kz)=-\frac{e^2N'}{m\omega^2}\boldsymbol{E} \tag{86.9}$$

(N' es el número de electrones, $q=e$); lo mismo se desprende la (80.14).

Para hallar la corrección no lineal introducimos la (86.8) en la tercera igualdad de las (86.7a). Tomando *también en consideración* la (86.6), después de simples transformaciones, obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right)^2\frac{A^2}{\omega v_0}\operatorname{sen}(2\omega t-2kz)=\frac{d^2z}{dt^2}.$$

De aquí

$$z=-\frac{A^2}{8\omega^3 v_0}\left(\frac{q}{m}\right)^2\operatorname{sen}(2\omega t-2kz). \tag{86.10}$$

De este modo, debido a la no linealidad del plasma acondicionada por la fuerza de Lorentz, se crea un movimiento oscilante *longitudinal* de las partículas con frecuencia *doble*. La componente respec-

[1] Puesto que se utilizan las leyes de la mecánica clásica, las velocidades deben ser suficientemente pequeñas.

tiva del vector de polarizabilidad se halla multiplicando por $z_0 qN'$

$$P^{NL} = -z_0 \frac{e^3 N'}{8\omega^2 v_0 m^2} A^2 \operatorname{sen}(2\omega t - 2kz) \quad (q = e). \qquad (86.11)$$

Es evidente que

$$\dot{P}_m^{NL}(2\omega) = z_0 \frac{ie^3 N'}{8\omega^2 v_0 m^2} \dot{E}_m^2. \qquad (86.11a)$$

Es interesante que la componente hallada de la polarizabilidad no lineal no es paralela sino ortogonal a la intensidad del campo eléctrico. El desarrollo escalar (86.5) no prevé tal posibilidad. Es más general la anotación *vectorial* del tipo (86.5) en la que las susceptibilidades parciales tienen carácter de *tensor*.

La no linealidad del tipo considerado no absorbe la energía de la onda a propagar y la radiación con una frecuencia 2ω está ausente. Efectivamente, la integral

$$(dW^e)^{NL} = \int_V E dD^{NL} dv = \int_V E dP^{NL} dv \qquad (86.12)$$

(compárese con la (86.1)) en virtud de la ortogonalidad de E y P^{NL} es igual a cero.

No obstante, existe otra serie de factores que condicionan la no linealidad del plasma. La frecuencia de colisiones ν (§ 80, punto 3) a la longitud dada de la carrera libre depende de la velocidad de movimiento de los electrones. Sobre el movimiento térmico se superpone el movimiento bajo la acción del campo, de modo que en la (80.16) $\nu = \nu(dr/dt)$. A su vez, la velocidad $v = dr/dt$ depende del campo; despreciando la absorción, según la (80.12a), $v_m = -iq\dot{E}_m/m\omega$. De este modo, con cierta aproximación es justo que mediante ν, la constante dieléctrica del plasma complejo es función del campo (80.19).

Durante la propagación de las ondas de radio en la ionosfera, la no linealidad indicada del plasma se manifiesta en las ondas medias: para una potencia dada de la onda, v_m aumenta al disminuir ω, sin embargo, en ondas largas el campo sólo insignificantemente penetra en la ionosfera. En particular, si una potente onda porta una señal modulada, resulta estar también modulada la magnitud ν y, junto con ella, la absorción. Al existir otra onda, relativamente débil, esto varía las condiciones de su propagación; sobre la segunda señal se sobrepone la primera (a causa de la variación de la amplitud de la onda con ν). Este efecto de *modulación cruzada* también se denomina efecto de "Luxembourgo" (interacción de ondas radioeléctricas).

Al propagarse una onda creada por un potente láser por un líquido o gas, se toma en cuenta la no linealidad de polarización que resulta ser proporcionada por la acción de múltiples factores. Además de la conducta de los electrones "ópticos" en un campo luminoso fuerte, es sustancial la acción mecánica del campo en la

materia; se crea una presión proporcional a la potencia media de la onda que condensa el medio y aumenta su constante dieléctrica. Con frecuencia se supone aproximadamente que teniendo en cuenta todos los factores

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \alpha \overline{E^2}), \qquad (86.13)$$

siendo $\alpha > 0$ y $\overline{E^2}$ el valor medio del cuadrado de la intensidad del campo eléctrico (compárese con la (5.11)); por lo general, se trata de las oscilaciones con una amplitud que varía lentamente y la mediación se efectúa por el cuasiperíodo (para oscilaciones armónicas $\overline{E^2} = E_m^2/2$).

§ 87. Procesos ondulatorios en medios no lineales

1. Representación de las ecuaciones de Maxwell. Continuemos la consideración de medios con dependencia no lineal $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$, es decir, de dieléctricos no lineales; el paso al caso de magnéticos no lineales es fácil: es sólo suficiente aplicar a los resultados definitivos el principio de dualidad (§ 46, punto 3).

Según las (5.1) y (86.5)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{L}} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}} = \varepsilon_1 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}},$$

siendo $\varepsilon^{\mathrm{L}} = \varepsilon_0 (1 + \chi_{\mathrm{L}}^{\varepsilon})$ (compárese con la (5.8)); sea también que $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$. Las ecuaciones de Maxwell (2.1), (2.2) toman la forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \varepsilon_1 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}}{\partial t} + \boldsymbol{j}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad (87.1)$$

donde $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}^{\mathrm{ex}}$.

Dado que el manantial efectúa oscilaciones armónicas con una frecuencia ω: $\boldsymbol{j}^{\mathrm{ex}} = \boldsymbol{j}_m^{\mathrm{ex}} \cos(\omega t + \varphi)$. Desarrollemos las funciones $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(t)$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(t)$ y $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(t)$ en las series de Fourier (S8.1):

$$\boldsymbol{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\boldsymbol{E}}_m (n\omega)\, e^{in\omega t}, \text{ etc.} \qquad (87.2)$$

mientras que la densidad de corriente exterior vamos a representarla en la forma: $\boldsymbol{j}^{\mathrm{ex}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{j}_m^{\mathrm{ex}} e^{i\omega t} + \boldsymbol{j}^{\mathrm{ex}*} e^{-i\omega t})$. Introduciendo esta expresión en las ecuaciones (87.1), obtenemos el siguiente sistema infinito de ecuaciones:

$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}}_m (n\omega) = in\omega [\dot{\varepsilon}_{\mathrm{L}} (n\omega)\, \dot{\boldsymbol{E}}_m (n\omega + \dot{\boldsymbol{P}}_m (n\omega)] + \boldsymbol{j}_m^{\mathrm{ex}} (n\omega),$$
$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{E}}_m (n\omega) = -in\omega\mu_0 \dot{\boldsymbol{H}}_m (n\omega), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (87.3)$$

Aquí $\dot{\varepsilon}_{\mathrm{L}} (n\omega) = \varepsilon_{\mathrm{L}} - i \frac{\sigma}{\omega}$ y todas las $\boldsymbol{j}_m^{\mathrm{ex}} (n\omega)$ son iguales a cero salvo $\boldsymbol{j}_m^{\mathrm{ex}} (\pm \omega)$ ($\boldsymbol{j}_m^{\mathrm{ex}} (\omega) = \boldsymbol{j}_m^{\mathrm{ex}}/2$ y $\boldsymbol{j}_m^{\mathrm{ex}} (-\omega) = \boldsymbol{j}_m^{\mathrm{ex}}/2$).

La presencia de $\dot{P}_m^{\text{no}\,1}(n\omega)$ hace que todos los pares de las ecuaciones parciales de Maxwell respecto a los coeficientes de Fourier (87.2), sean *asociados*. Efectivamente, de modo semejante al § 86, punto 3,

$$\dot{P}_m^{\text{no}\,1}(\omega) = \varepsilon_0 [\dot{\chi}^e(2\omega - \omega)\dot{E}_m(2\omega)\dot{E}_m^*(\omega) + \\ + \dot{\chi}^e(3\omega - 2\omega)\dot{E}_m(3\omega)\dot{E}_m^*(2\omega) + \ldots + \dot{\chi}^e(\omega + \omega - \omega \times \\ \times \dot{E}_m^2(\omega)\dot{E}_m^*(\omega) + \ldots], \quad (87.4)$$

$$\dot{P}_m^{\text{no}\,1}(2\omega) = \varepsilon_0 [\dot{\chi}^e(\omega + \omega)\dot{E}_m^2(\omega) + \dot{\chi}^e(3\omega - \omega) \times \\ \times \dot{E}_m(3\omega)\dot{E}_m^*(\omega) + \ldots + \dot{\chi}^e(\omega + \omega + \omega - \omega)\dot{E}_m^3(\omega)\dot{E}_m^*(\omega) + \ldots],$$

etc.

Comúnmente, al analizar un efecto no lineal determinado, en las (87.3) *sólo se dejan las relaciones más substanciales, eliminando* los términos pequeños en las representaciones (87.4). Es relativamente pequeña toda la componente frecuencial $\dot{P}_m^{\text{no}\,1}(\omega)$ de polarizabilidad no lineal. Despreciándola, tendremos las ecuaciones lineales ordinarias de Maxwell respecto al armónico fundamental del campo

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m(\omega) = i\omega\dot{\varepsilon}_1(\omega)\dot{E}_m(\omega) + \dot{J}_m^{\text{ex}}(\omega), \\ \operatorname{rot} \dot{E}_m(\omega) = -i\omega\mu_0\dot{H}_m(\omega). \quad (87.5)$$

En la segunda igualdad de las (87.4), dejemos solamente el primer término y, entonces, para el segundo armónico obtenemos

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m(2\omega) = i2\omega\dot{\varepsilon}_1(2\omega)\dot{E}_m(2\omega) + i2\omega\varepsilon_0\dot{\chi}^e(\omega + \omega)\dot{E}_m(\omega)\dot{E}_m(\omega), \\ \operatorname{rot} \dot{E}_m(2\omega) = -i2\omega\mu_0\dot{H}_m(2\omega). \quad (87.6)$$

Está claro que el conjunto de las ecuaciones (87.5), (87.6) describe la generación del segundo armónico del campo por un medio no lineal. Las ecuaciones (87.5) formulan el problema lineal de electrodinámica de la excitación de un campo que oscila armónicamente con una frecuencia ω, por un manantial prefijado (función $\dot{J}_m^{\text{ex}}(\omega)$). Al determinar $\dot{E}_m(\omega)$ adquirimos información sobre el "manantial no lineal" que figura en las ecuaciones (87.6) en forma de las funciones $i2\omega\dot{P}_m^{\text{no}\,1}(2\omega) = i2\omega\varepsilon_0\dot{\chi}^e(\omega + \omega)\dot{E}_m(\omega)$; $\dot{E}_m(\omega)$ ya que ahora dicha función ha sido prefijada, obtenemos la enunciación del problema lineal de electrodinámica sobre la excitación del campo que oscila con doble frecuencia.

De modo absolutamente análogo se resuelve el problema de la generación de campos para las frecuencias de combinación. En este caso, la corriente exterior se da como la superposición de varias componentes frecuenciales, por ejemplo, $J^{\text{ex}} = J_{mp}^{\text{ex}}\cos(\omega_p t + \varphi_p) + \\ + J_{mq}^{\text{ex}}\cos(\omega_q t + \varphi_q)$. Con la primera aproximación, para cada una de estas componentes se enuncia el problema lineal del tipo (87.5) y el problema con manantial no lineal del tipo (87.6). Esto también se *denomina* "aproximación del campo prefijado", ya que no se

tiene en cuenta la reacción del medio no lineal respecto a las componentes frecuenciales de manantial inicial.

2. Incidencia de una onda en la frontera de separación con un medio no lineal. En calidad de ejemplo investiguemos la incidencia de una onda plana homogénea de polarización perpendicular del medio lineal *1* a la frontera plana ($z=0$) con un medio no lineal *2*, exponiéndola mediante las expresiones de amplitudes complejas (38.1)

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}_m^0(\omega) &= \boldsymbol{x}_0 \dot{A} e^{-i\dot{k}_{1(\omega)}(y\sin\varphi + z\cos\varphi)}, \\ \dot{\boldsymbol{H}}_m^0(\omega) &= \frac{\dot{A}}{\dot{W}_{1(\omega)}}(\boldsymbol{y}_0\cos\varphi - \boldsymbol{z}_0\sin\varphi)\, e^{-i\dot{k}_{1(\omega)}(y\sin\varphi + z\cos\varphi)}, \end{aligned}\right\} z<0 \tag{87.7}$$

(fig. 38.1, *a*), donde $\dot{k}_{1(\omega)} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}_1(\omega)\mu_0}$ y $\dot{W}_{1(\omega)} = \sqrt{\mu_0/\dot{\varepsilon}_1(\omega)}$ corresponden a las características prefijadas del medio *1*.

Considerando el armónico fundamental tenemos las ecuaciones de Maxwell (29.11), donde $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1(\omega)$ y $\dot{\mu} = \mu_0$, así como $\dot{j}_m^{ex} = 0$ para el primer medio y las ecuaciones (87.5) de la misma forma para el segundo medio no lineal ($\dot{j}_m^{ex}(\omega) = 0$); no hay manantiales (se puede considerar que la onda incidente se excita por un manantial que se encuentra en la infinidad). En esencia, se plantea precisamente aquel problema que fue estudiado en el § 38, punto 1, y su solución fue obtenida en forma de las fórmulas (38.10a), (38.10b), en las que, además los prefijados $\dot{k}_{1(\omega)}$ y $\dot{W}_{1(\omega)}$, y en virtud de las (87.5), hay que hacer

$$\dot{k}_{2(\omega)} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}_L(\omega)\mu_0} \text{ y } \dot{W}_{2(\omega)} \quad \sqrt{\mu_0/\dot{\varepsilon}_L(\omega)}.$$

Fijemos nuestra atención en el segundo armónico. Eliminando de las (87.6) $\dot{\boldsymbol{H}}_m(2\omega)$, hallamos la ecuación

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{E}}_m(2\omega) - \dot{k}^2_{2(2\omega)}\dot{\boldsymbol{E}}_m(2\omega) = \Delta\dot{k}^2_{2(2\omega)}\dot{\chi}_m(\omega)\dot{\boldsymbol{E}}_m(\omega), \qquad z>0, \tag{87.8}$$

siendo $\dot{k}^2_{2(2\omega)} = 4\omega^2\dot{\varepsilon}_L(2\omega)\mu_0$ y $\Delta\dot{k}^2_{2(2\omega)} = 4\omega^2\varepsilon_0\dot{\chi}^e(\omega+\omega)\mu_0$. En el primer medio la amplitud compleja $\dot{\boldsymbol{E}}_m(2\omega)$ está subordinada a la ecuación que se desprende de las (29.11)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{E}}_m(2\omega) - \dot{k}^2_{1(2\omega)}\dot{\boldsymbol{E}}_m(2\omega) = 0, \tag{87.9}$$

siendo $\dot{k}_{1(2\omega)} = 4\omega^2\dot{\varepsilon}_1(2\omega)\mu_0$.

Es evidente que en las (87.8) $\dot{\boldsymbol{E}}_m(\omega)$ es ni más ni menos que la amplitud compleja de la onda transmitida del armónico fundamental y, precisamente, en virtud de (38.10a), $\dot{\boldsymbol{E}}_m(\omega) = \boldsymbol{x}_0\dot{A}\dot{\tau}_\perp e^{-i\dot{k}_{2(\omega)}(y\sin\vartheta + z\cos\vartheta)}$ y, por esta razón, las ecuaciones

(87.8) y (87.9) toman el aspecto

$$\frac{d^2\dot{E}_m(2\omega)}{dy^2}+\frac{d^2\dot{E}_m(2\omega)}{dz^2}+\dot{k}^2_{1\,(2\omega)}\dot{E}_m(2\omega)=$$

$$\begin{cases} -\Delta\dot{k}^2_{2\,(2\omega)}\dot{A}^2\dot{\tau}^2_{\perp}e^{-i2\dot{k}_{2\,(\omega)}(y\,\mathrm{sen}\,\theta+z\cos\theta)}, & z>0; \\ 0, & z<0. \end{cases} \qquad (87.10)$$

La solución de la ecuación (87.10) para el medio no lineal ($z>0$), cuando es heterogénea, debe, naturalmente, buscarse en la forma

$$\dot{E}_m(2\omega)=\dot{T}e^{-i\dot{k}_{2\,(2\omega)}(y\,\mathrm{sen}\,\theta+z\cos\theta)}+\dot{S}e^{-i2\dot{k}_{2\,(\omega)}(y\,\mathrm{sen}\,\theta+z\cos\theta)},$$

donde el primer término es la solución de la correspondiente ecuación homogénea (con el segundo miembro igual a cero) que expresa la onda transmitida, cuya amplitud y ángulo de orientación θ (compárese con las (38.2)), son hasta el momento desconocidos. El segundo término es una solución particular de una ecuación no homogénea, también del tipo de onda plana; el ángulo θ es el mismo que en la expresión de la onda transmitida del armónico fundamental, mientras que la amplitud compleja $\dot{S}$ se halla fácilmente al ponerla en la (87.10). Como resultado, obtenemos

$$\dot{E}_m(2\omega)=\boldsymbol{x}_0\left[\dot{T}e^{-i\dot{k}_{2\,(2\omega)}(y\,\mathrm{sen}\,\theta+z\cos\theta)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta\dot{k}^2_{2\,(2\omega)}\dot{A}^2\dot{\tau}^2_{\perp}}{4\dot{k}^2_{2\,(2\omega)}-\dot{k}^2_{2\,(2\omega)}}e^{-i2\dot{k}_{2\,(\omega)}(y\,\mathrm{sen}\,\theta+z\cos\theta)}\right], \quad z>0. \qquad (87.11)$$

La solución de la ecuación (87.10) para un medio lineal ($z<0$) la tomaremos en forma de una onda plana que se define de modo semejante a la onda reflejada del armónico fundamental (38.3), así que

$$\dot{E}_m(2\omega)=\boldsymbol{x}_0\dot{R}e^{-i\dot{k}_{1\,(2\omega)}(y\,\mathrm{sen}\,\Phi+z\cos\Phi)}, \quad z<0, \qquad (87.12)$$

siendo $\dot{R}$ y Φ magnitudes desconocidas.

El sentido de los resultados obtenidos consiste en que al incidir una onda armónica sobre la frontera de un medio no lineal, además de las ondas reflejada y refractada de la misma frecuencia, en el segundo medio aparece un campo de ondas de frecuencia doble en forma de dos ondas "refractadas" (87.11), mientras que en el primer medio, una onda "reflejada" de frecuencia doble (87.12).

Para cerciorarse de que esta deducción es justa, sólo hay que comprobar que al elegir convenientemente las constantes en las (87.11), (87.12) las condiciones límites se satisfarán; al mismo tiempo, como es natural, obtendremos nueva información sobre el campo de frecuencia doble.

Comencemos por deducir correlaciones del tipo de las leyes de Snell, exigiendo (compárese con el § 37, punto 1) que las expresiones (87.11) y (87.12) sean iguales funciones de la coordenada y;

a fuerza de esta condición necesaria

$$\dot{k}_{2\,(2\omega)} \operatorname{sen} \theta = 2\dot{k}_{2\,(\omega)} \operatorname{sen} \vartheta = \dot{k}_{1\,(2\omega)} \operatorname{sen} \Phi, \tag{87.13}$$

o bien,

$$\frac{\operatorname{sen} \Theta}{\operatorname{sen} \vartheta} = \frac{2\dot{k}_{2\,(\omega)}}{\dot{k}_{2\,(2\omega)}}; \quad \frac{\operatorname{sen} \Phi}{\operatorname{sen} \Theta} = \frac{\dot{k}_{2\,(2\omega)}}{\dot{k}_{1\,(2\omega)}}. \tag{87.13a}$$

Dado que es admisible despreciar la absorción en ambos medios ($\varepsilon_1 = \varepsilon$ y $\dot{\varepsilon}_L = \varepsilon_L$ a cuenta de $\sigma_2 = \sigma = 0$), no obstante, vamos a considerar que en general $\varepsilon_{1,1}(\omega) \neq \varepsilon_{1,1}(2\omega)$. Entonces, de las (87.13a), hallamos que

$$\frac{\operatorname{sen} \Theta}{\operatorname{sen} \vartheta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_L(\omega)}{\varepsilon_L(2\omega)}}, \quad \frac{\operatorname{sen} \Phi}{\operatorname{sen} \Theta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_L(2\omega)}{\varepsilon_1(2\omega)}}. \tag{87.14}$$

La fig. 87.1 nos muestra el esquema de los rayos. Por los símbolos (0), (+) y (−), como en los §§ 37 y 38, se designan los rayos que corresponden a las ondas incidente, refractada y reflejada de la frecuencia fundamental. Los rayos (T), (S) y (R) corresponden a las ondas de frecuencia doble con factores de cresta $\dot{T}$, $\dot{S}$ y $\dot{R}$ en las (87.11), (87.12) y la expresión precedente.

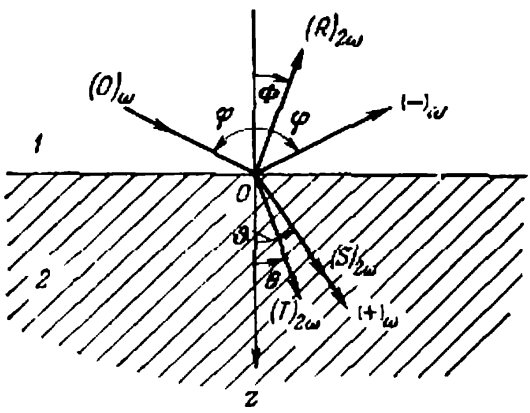


Fig. 87.1.

Mostremos cómo se determinan los factores $\dot{T}$ y $\dot{R}$. Debido a la continuidad de $\dot{E}_{mx} = \dot{E}_m$ cuando $z = 0$, de las (87.11) y (87.12) obtenemos

$$\dot{T} - \dot{R} = -\frac{\Delta \dot{k}^2_{2\,(2\omega)} \dot{A}^2 \dot{\tau}^2_\perp}{4\dot{k}^2_{2\,(\omega)} - \dot{k}^2_{2\,(2\omega)}}. \tag{87.15}$$

También son continuas las componentes magnéticas $\dot{H}_{my} = \frac{i}{2\omega\mu_0} \partial \dot{E}_m / \partial z$. Por esto

$$\dot{k}_{2\,(2\omega)} \dot{T} \cos \Theta - \dot{k}_{1\,(2\omega)} \dot{R} \cos \Phi =$$

$$= -2 \frac{\Delta \dot{k}^2_{2\,(2\omega)} \dot{A}^2 \dot{\tau}^2_\perp}{4\dot{k}^2_{2\,(2\omega)} - \dot{k}^2_{2\,(2\omega)}} \dot{k}_{(2\omega)} \cos \vartheta. \tag{87.16}$$

Para obtener $\dot{T}$ y $\dot{R}$ es necesario sólo escribir la solución de este sistema de dos ecuaciones, lo que se lo dejamos al lector. El re-

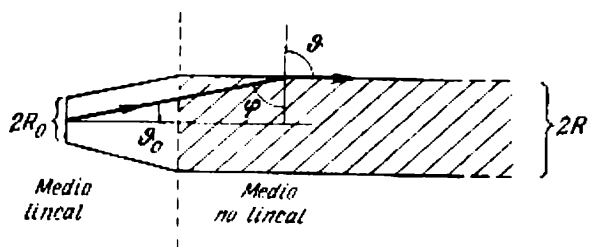
sultado será de cierto modo la generalización de las fórmulas de Fresnel para medios no lineales [1]).

3. Sobre la autoacción de los procesos ondulatorios. Conclusión. La radiación de un láser es una onda estrictamente heterogénea, cuya amplitud decrece rapidísimamente al alejarse del eje. Al propagarse por un medio con una constante dieléctrica del tipo (86.13), podemos decir que tal proceso ondulatorio aumenta la densidad óptica en la región del rayo, creando una heterogeneidad de simetría axial, lo que a su vez actúa en el campo electromagnético; se crea la *autoacción* del proceso ondulatorio. Naturalmente que tal descripción simplifica, en cierto grado, el proceso considerándolo como un todo único. Pero en todo caso será justo, que al pasar un rayo por un medio débilmente no lineal, su campo se deforma cada vez más. Podemos esperar que a condiciones determinadas, al proceso ondulatorio acompaña la creación de un canal que dirige su energía, algo parecido a una guía de ondas dieléctrica. Examinemos los razonamientos elementales que explican la posibilidad de tal *autocanalización*, que fueron expresados por R. Chiao, E. Garmire y C. Townes [2]).

Dado que por medio de una abertura circular de radio R, con una distribución uniforme del campo, se crea un "rayo"; de acuerdo con la (53.13), su divergencia se caracteriza por el ángulo

$$\vartheta_0 = 1{,}22\lambda/2R_0. \qquad (87.17)$$

Desde el punto de vista de la geometría óptica es natural atribuir a este rayo que diverge débilmente una frontera nítida: la inten-



sidad varía a saltos desde cero fuera del rayo, hasta cierta constante en su sección. Supongamos que el rayo va desde el semiespacio izquierdo (fig. 87.2), donde el medio es lineal e incide sobre la frontera con el medio no lineal (en la fig. la línea de trazos). A continuación, en la región del rayo, rayada en la figura, el medio tendrá una permitividad constante $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \alpha\bar{E}^2)$ (86.13); fuera del rayo, en todo lugar, la permitividad será ε_0.

---

[1]) Por primera vez la reflexión por un medio no lineal fue, por lo visto, estudiada por *N.* Bloembergen y P. S. Pershan (N. Bloembergen, P. S Pershan, Phys. Rev. 128, 606 (1962).

[2]) R. Chiao, E. Garmire, C. Townes, Phys. Rev. Lett. 13, 479 (1964).

Es posible que en un medio no lineal el rayo resulte ser no divergente. Efectivamente (fig. 87.2), en virtud de la segunda ley de *Snell*

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=\sqrt{1+\alpha\bar{E}^2}. \qquad (87.18)$$

Haciendo aquí $\vartheta=90^\circ$, satisfacemos la condición de la reflexión crítica total (comienzo de la reflección total), para la que el rayo se dirige a lo largo de la superficie de separación de los medios (§ 37, punto 2), es decir, en el caso dado el sistema de rayos se convierte en paralelo, se forma un canal de ondas no divergente.

Así, la condición de autocanalización tiene la forma

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}=\sqrt{1+\alpha\bar{E}^2}=1+\frac{1}{2}\alpha\bar{E}^2+\ldots, \qquad (87.19)$$

y puesto que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{1}{\cos\vartheta_0}\approx\frac{1}{\sqrt{1-\vartheta_0^2}}=1+\frac{1}{2}\vartheta_0^2+\ldots,$$

entonces, introduciendo en la (87.19) la expresión para ϑ_0 de la (87.17), se obtiene que

$$(1{,}22\lambda/2R)^2=\alpha\bar{E}^2, \qquad (87.20)$$

donde R_0 también ha sido sustituida por R (fig. 87.2) en virtud de la suposición de la homogeneidad del campo en la sección transversal del canal.

Al calcular la potencia $\bar{P}_0=\pi R^2\bar{E}^2/W_0$ que se transmite durante la autocanalización, a base de la (87.20), obtenemos que

$$\bar{P}_0=1{,}22^2\lambda^2\frac{\pi}{4W_0\alpha}=0{,}0031\frac{\lambda^2}{\alpha}\quad(W_0=120\pi). \qquad (87.21)$$

Esta es la "potencia límite de autocanalización". Siendo $\bar{P}<\bar{P}_0$ el haz de rayos todavía divergerá, mientras que cuando $\bar{P}>\bar{P}_0$ debe resultar ser *convergente* y enfocarse en cierto punto, es decir, se produce el *autoenfoque*.

Es lógico que debido a las simplificaciones de los razonamientos el resultado obtenido no puede ser una descripción cuantitativa exacta del proceso.

Acabando de esta forma la consideración de los procesos ondulatorios en medios no lineales, subrayamos que este tema es muy amplio y, por necesidad, muchas importantes cuestiones han quedado fuera de nuestro campo de vista. A ellas se refieren los problemas de la interacción de los campos, formación de ondas de choque y otras. Por fin, al realizar un estudio más detallado se podían haber aclarado los rasgos de la comunidad entre las concepciones de actividad (§ 84) y no linealidad. Al lector que desee aumentar sus representaciones sobre la electrodinámica de los medios no lineales, le recomendamos las monografías [E.10,11].

V. Líneas de radiocomunicación

En conclusión retornamos a la investigación de líneas de radiocomunicación, sobre las cuales se dió información inicial en los §§ 41 y 42. Más adelante se examinaron diferentes tipos de procesos ondulatorios en condiciones naturales: ondas de radio terrestres y troposféricas (§§ 58 y 59), ondas de radio en la ionosfera (§§ 81 y 84, punto 1). A su vez dicho material fue preparado por el precedente contenido del libro, lo que al mismo tiempo se reflejó en las respectivas citas. De este modo, los datos sobre la propagación de las ondas de radio en condiciones naturales, fueron gradualmente profundizadas y ampliadas. Sobre esta base, es conveniente dirigirse de nuevo al material expuesto en el § 42, punto 3.

El resumen que proponemos, contiene una serie de datos complementarios sobre las líneas de radiocomunicación de diferentes bandas (con más detalle, véase [F. I—5]).

§ 88. Líneas de radiocomunicación de diferentes bandas

1. Ondas ultralargas, largas y medias. Ya se indicó en el § 42, punto 3 que en la banda de ondas largas (lo que con mayor justeza se refiere a las ultralargas), el terreno se comporta generalmente como un conductor; conviene añadir que la superficie terrestre resulta ser aquí relativamente más llana (§ 58, punto 1): la mayoría de los elementos que la forman son pequeños en comparación *con la longitud de onda. Pero al mismo tiempo, a causa* de la rapidez relativa de variación de las propiedades del medio (otra vez en la escala de la longitud de onda), la frontera con la ionosfera se manifiesta como la más brusca. En su total, la *región del espacio en que se propagan las ondas largas y ultra*largas, es una capa esférica limitada por dos superficies que reflejan bien: la superficie de la Tierra y la frontera inferior de la ionosfera. Como modelo de esta región podemos tomar una *guía de ondas esférica* (§ 42, punto 3).

La afirmación de que las ondas largas (y ultralargas) no penetran profundamente en la ionosfera (§ 42, punto 3), se puede fácilmente comprender partiendo de lo expuesto en el § 81, punto 1: en virtud de la (81.1) para ϑ_0 prefijado la concentración N' de electrones en la altura de giro del rayo es tanto menor, cuanto menor sea la frecuencia f, es decir, junto con f dicha altura disminuye, aproximándose al borde inferior de la ionosfera. No obstante, hay que tener en cuenta que a condición de empleo de la óptica geométrica en el caso dado se viola considerablemente de forma que la fórmula (81.1) es sólo capaz de proporcionar una representación cualitativa.

La onda terrestre se toma hasta una distancia de cerca de 3000 km (§ 42, punto 3), pero considerablemente más cerca predomina la onda ionosférica. En la práctica del cálculo de las líneas de radiocomunicación de ondas largas y ultralargas, se aplica la llamada *fórmula de Austin* (de procedencia empírica); a continuación se da en la forma que se utiliza en la práctica de ingeniería:

$$E_m = \frac{300\sqrt{2P_A D_A}}{r}\sqrt{\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}}\, e^{-\frac{0{,}0014}{\lambda^{0{,}6}}r}. \qquad (88.1)$$

Aquí D_A es el coeficiente de acción dirigida de la antena transmisora (§ 41, punto 1). El sentido del ángulo θ queda claro en la fig. 88.1; r y λ están expresadas en km, P_A, en kW, y la amplitud de la intensidad del campo en el lugar de recepción E_m, en mV/m. En [*F*. 1] se considera que la fórmula de Austin se puede aplicar hasta distancias de 16 000÷18 000 km, al examinar líneas de radiocomunicación que funcionan durante el día y que pasan sobre el mar o la tierra, comenzado en este último caso desde distancias de 2000÷3000 km.

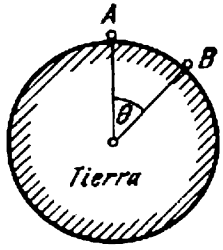


Fig. 88.1.

Al calcular la intensidad del campo de una onda terrestre hasta distancias cerca de 500 km, se emplea la fórmula de Shuleikin—Van der Pol (§ 59, punto 2), y luego se toma en cuenta la esfericidad de la Tierra; el factor de debilitamiento en la (59.14) se halla, por ejemplo, según la fórmula (59.18). Por lo demás, a partir de distancias mayores de 500 km, la onda terrestre es considerablemente más débil que la ionosférica. La troposfera prácticamente no influye en la propagación de las ondas ultralargas, largas y medias.

Recordemos que a la banda de las ondas más largas, se refieren los efectos de propagación longitudinal (respecto al campo magnético de la tierra) estudiados en el § 84 (punto 1, al final).

Desde un punto de vista histórico, las ondas ultralargas y largas fueron primeramente utilizadas para la radiocomunicación transatlántica (frecuencias 15÷20 kHz). Generalmente, las líneas de radiocomunicación que funcionan en tales ondas se caracterizan por un alto nivel de interferencias atmosféricas; las instalaciones de antenas tienen enormes dimensiones y son muy caras; la directividad de radiación es pequeña (las antenas según sus dimensiones relativas son próximas a los radiadores elementales, §§ 44 y 45); la banda de frecuencias es estrecha. Al mismo tiempo, la comunicación es estable respecto a las perturbaciones ionosféricas; la zona de acción del emisor, suavemente, sin variación de la intensidad de radiación, abarca enormes espacios; una ventaja más consiste en la profunda penetración del campo en las capas de agua (comunicación con los submarinos, etc.). Por medio de acuerdos internacionales, está previsto el empleo de las ondas ultralargas y largas principalmente para la radionavegación y radiodifusión.

Pasemos al examen de las particularidades de las líneas de ondas medias. Como se señaló en el § 42, punto 3, en diferencia de las ondas largas (y ultralargas) que se reflejan del borde inferior de la ionosfera, es decir, de la capa E por la noche y D durante el día, las ondas medias no sufren el giro hacia la Tierra a las concentraciones de electrones propias de la capa D; al pasar por ella las ondas medias se absorben considerablemente; su giro se produce en la capa E. Debido a esto, durante el dia la comunicación se efectúa por medio de la onda terrestre; a su vez, ésta también sufre una absorción más elevada que en las bandas examinadas anteriormente a causa del aumento de la penetración en el terreno; la comunicación resulta ser posible a una distancia de no más de unos 1000 km. Por la noche, al desaparecer la capa D, las ondas ionosféricas (que penetran a una profundidad pequeña en la capa E), se absorben débilmente y la distancia de comunicación aumenta bruscamente. Pero en este caso, hay que hacer caso de la existencia de una amplia zona a la que llegan las ondas terrestre e ionosférica con intensidades comparables. Su interferencia, a causa de una serie de factores casuales, condiciona el "desvanecimiento" que se consideraba en el § 42, punto 3. Vamos a dar la fórmula empírica [F.1] de la intensidad del campo de las líneas de radiocomunicación de ondas medias, obtenida como resultado de prolongadas observaciones en las condiciones de la radiodifusión europea:

$$E_m = (10233/\sqrt{r})\sqrt{2P_A D_A}\, e^{-8{,}94\cdot 10^{-4}\lambda - 6{,}44r} \qquad (88.2)$$

(las designaciones y las unidades son las mismas que en la fórmula de Austin (88.1)).

Las ondas medias se utilizan extensamente en la radiodifusión; también hay sistema de radionavegación de ondas medias. El alcance típico de las líneas de radiocomunicación corresponde al empleo de la onda terrestre; la aparición por la noche de la onda ionosférica que provoca la distorsión de la transmisión a causa del desvanecimiento, exige tomar contramedidas (medios contra el desvanecimiento): entre ellos podemos indicar la construcción de antenas que dirigen la radiación principalmente bajo pequeños ángulos al horizonte.

Una de las particularidades de ondas medias es la existencia del efecto de modulación cruzada (véase el § 86, punto 4, al final).

2. **Ondas cortas.** Las ondas cortas se caracterizan por una penetración más profunda del campo tanto en el terreno (dieléctrico imperfecto), como en la ionosfera; el primer hecho conduce a una considerable absorción de la onda terrestre. En relación con este fenómeno, recordemos el efecto de la "zona de silencio" (§ 24, punto 3) en la que *ya* no se recibe la onda terrestre y *todavía* no puede ser recibida la onda ionosférica.

En la banda de ondas cortas fueron por primera vez realizadas en la práctica las antenas de haz filiforme que permiten con-

sumir económicamente la energía del transmisor para el enlace bilateral; la existencia de tales antenas y la relativa pequeñez de la absorción para la refracción de la ionosfera y la reflexión en la Tierra (a condiciones típicas), hacen de las ondas cortas las muy adecuadas para la radiocomunicación lejana. Es curioso que históricamente, la importancia de las ondas cortas fue primeramente apreciada por los radioaficionados.

La banda de las ondas cortas es la región de aplicación de las fórmulas de la óptica geométrica, así como las sencillas consideraciones expuestas en el § 81. Ellas forman la base de la comprensión de las regularidades del funcionamiento de las líneas de radiocomunicación de ondas cortas que ya fueron investigadas en el § 42, *punto 3*. Por el lado de las altas frecuencias, la limitación de esta banda corresponde aproximadamente a la desaparición del giro de la onda ionosférica hacia la Tierra durante el día. La onda más corta para la que aún tiene lugar dicho giro, se determina por medio de la fórmula (81.3); en la práctica de radiocomunicación la frecuencia correspondiente recibe el nombre de *frecuencia máxima de uso*, FAMa. Si la frecuencia de explotación se elige más baja de la FAMa, no se debe olvidar que, en virtud de la (81.9), el amortiguamiento de ondas crece aproximadamente de modo inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia. Existe la *frecuencia mínima de uso*, FAMi, tal, cuando para la potencia predeterminada del transmisor, la intensidad del campo en el lugar de recepción se encuentra en el límite de la satisfacción de la norma exigida. Durante el cálculo de las líneas de ondas cortas de comunicación, se emplean las gráficas de la variación diaria de FAMa y FAMi, que se confeccionan mediante diversas reglas semiempíricas, a base de los datos de mediciones que realizan las llamadas estaciones ionosféricas; un ejemplo de la gráfica de tal tipo se muestra en la fig. 88.2 [F.2]. En lo que se refiere a las estaciones ionosféricas, éstas realizan principalmente el "sondeo vertical" de la ionosfera, es decir, enviando una onda de una u otra frecuencia al cenit, establecen a qué altura se produce la reflexión. Recordemos (§ 42, punto 3) que la refracción de las ondas cortas se produce en la capa ionosférica F, cuya concentración electrónica varía considerablemente del día a la noche y en dependencia del tiempo del año, esto sin indicar diferentes tipos de perturbaciones no sistemáticas. Durante el día, para una mayor magnitud N', FAMa se eleva, por la noche, disminuye; en relación con esto se hablaba de las "ondas diurnas" (10—25 m) y "ondas nocturnas" (35—100 m).

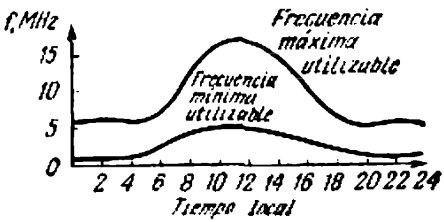


Fig. 88.2.

En las ondas cortas también tienen lugar desvanecimientos (fading) por interferencia, engendrados por la superposición de varias ondas, portadoras de la señal a recibir, que se propagan de modo relativamente independiente. Una de las causas (como en las ondas medias, § 42, punto 3), es la llegada al punto de recepción de ondas que han sufrido un número diferente de "reflexiones" en la ionosfera (digamos, una, dos). También pueden interferir las ondas ordinaria y extraordinaria (§ 84, punto 1). Se pueden producir desvanecimientos por polarización. Se trata de que a consecuencia de la girotropía de la ionosfera en el campo magnético de la Tierra, varía la polarización de la onda que se transmite; el carácter casual de los movimientos macroscópicos en la ionosfera tiene como resultado las oscilaciones no sistemáticas de la polarización y, por consiguiente, de la señal que se recibe, si la antena receptora reacciona sólo a determinada polarización (por ejemplo, vertical). Recordemos también tan importante efecto de la banda de ondas cortas, como el *eco de radio* (§ 42, punto 3).

El régimen relativamente estable de la ionosfera se perturba de vez en cuando bajo la influencia de los procesos que transcurren en el Sol. La acción de los flujos corpusculares intensos que llegan del Sol, produce una variación considerable de la estructura y decrecimiento de la concentración electrónica de la capa F, su "destrucción", a causa de lo cual la refracción de las ondas cortas en la superficie terrestre resulta ser imposible; el funcionamiento de la línea de radiocomunicación cesa. Toda perturbación de la ionosfera alcanza la mayor intensidad en las regiones polares a donde predominantemente llegan los flujos corpusculares dirigidos por el campo magnético de la Tierra. Otra importante perturbación de la comunicación por ondas cortas, es la absorción inesperada al crearse una elevada ionización de la capa D, bajo la influencia de las ráfagas cromosféricas en el Sol, acompañadas del crecimiento de las radiaciones ultravioleta y roentgen.

3. Ondas ultracortas. En los años de la mayor actividad solar, la refracción en la ionosfera conduce a la "reflexión" de ondas que formalmente salen de los límites de la banda ultracorta (por ejemplo, cerca de 6 m). Salvo la indicada exclusión, todas las ondas ultracortas están unidas precisamente por su cualidad de que la refracción no las hace retornar a la Tierra.

A causa de lo dicho, las líneas de radiocomunicación corrientes de esta banda funcionan en los límites la visibilidad geométrica; para aumentar el alcance de la radiocomunicación, las antenas se elevan sobre la superficie terrestre. Si esta última es suficientemente llana, entonces la línea de radiocomunicación pertenece con frecuencia a la clase considerada en el § 59, punto 1, y al calcular la intensidad del campo en el lugar de recepción puede hacerse uso de las fórmulas de interferencia obtenidas allí. Es particularmente aplicable la fórmula de Vvedenski (59.8). Es preciso recordar que al deducir las fórmulas (59.6)—(59.8) se consideraba que

las antenas tenían débil directividad ($D(\vartheta_1, \alpha) \approx D(\vartheta_2, \alpha)$); tales pueden ser los dipolos lineales (§ 44, punto 5) que con frecuencia se emplean en las subbandas de ondas métricas y decimétricas. Cuando se utilizan antenas de haz filiforme, se ha de partir de las correlaciones más generales (59.2)—(59.4). A pesar de todo, en tal caso las reflexiones sobre la superficie terrestre pueden ser despreciablemente pequeñas y entonces la línea de radiocomunicación se calcula como si fuera ideal (§ 41, punto 1). Al aumentar la distancia de comunicación hay que tomar en consideración la esfericidad de la Tierra (§ 59, punto 3) y la refracción atmosférica (§ 60, *punto 1*), *empleando, en virtud de la (60.3)*, $\tilde{R}_0$ en lugar de R_0.

Cuanto más corta sea la onda, tanto relativamente menos llana resulta ser la superficie terrestre. Frecuentemente, incluso en aquellos casos cuando el criterio de planicidad (58.2) no se cumple, se emplea la *noción del factor de reflexión efectivo. No obstante, son* típicos aquellos casos, cuando esto se hace imposible; por ejemplo, al propagarse ondas ultracortas en los límites de una ciudad. Precisamente en esta banda hay situaciones para las que la región dominante abarca parcialmente formaciones aisladas en la superficie terrestre (§ 58, punto 3); es posible la "amplificación por obstáculos", etc.

Tienen elevado interés diferentes casos de propagación lejana de las ondas ultracortas. En esta banda se realizan las posibilidades de una influencia sustancial de los fenómenos troposféricos examinados en el § 60. Una considerable superación de la distancia de la visibilidad geométrica es posible debido a la *superrefracción* al crearse *guías de ondas troposféricas* (§ 60, punto 1), así como a causa de los procesos de *difusión en la troposfera* (§ 60, punto 2). En este caso, el alcance de las líneas de comunicación puede llegar a un orden de 1000 km.

La propagación lejana de las ondas ultracortas y, particularmente, de las métricas puede estar condicionada por la difusión en las heterogeneidades de la ionosfera, así como en las regiones ionizadas que se forman al penetrar en la atmósfera meteoritos ("trazas" meteóricas) y durante las auroras boreales. Existen líneas de comunicación muy largas (*más de 1000 km*) que utilizan estos fenómenos.

Las ondas decimétricas casi no se dispersan en la ionosfera; en ellas tampoco casi influyen las precipitaciones atmosféricas. Las ondas centimétricas más cortas que de 5 cm, ya sufren una acción notable de dichas precipitaciones y, a continuación, se percibe la absorción molecular (§ 60, punto 2). Esta es por resonancia (selectiva), de manera que también en las ondas milimétricas hay las llamadas "ventanas" de absorción relativamente débil. Las ondas submilimétricas (inframilimétricas) y ópticas sufren una fuerte influencia de las precipitaciones y la niebla. Las ondas de

la banda ultracorta y en particular las decimétricas, centimétricas y milimétricas se utilizan en la radiolocalización. En dicha banda también se encuentra la radiación intensamente investigada de los cuerpos astronómicos. Para la comunicación, las ondas centimétricas hallan utilización en las líneas de radiorrelés (hertzianas). Se estudia la oportunidad del empleo práctico de líneas de lentes y especulares apantalladas (§ 78) para la comunicación por ondas ópticas.

4. Sobre la radiocomunicación cósmica. En vista de la transferencia de la ionosfera para las ondas ultracortas, esta banda se utiliza en los sistemas de comunicación cósmica. Conviene diferenciar la comunicación con objetos cósmicos, o sea, distintos satélites de la Tierra y la Luna, así como las naves espaciales que se dirigen a los planetas del Sistema solar y el empleo de los objetos cósmicos para la comunicación en la misma Tierra. Por último, al dominar la Luna y los planetas se crea la necesidad de la comunicación local; en este último caso el empleo de las ondas ultracortas puede no proporcionar notables ventajas.

Las líneas de comunicación cósmica pueden ser extremadamente largas, alcanzando muchos millones de kilómetros, como por ejemplo, para la comunicación con las estaciones cósmicas soviéticas que se dirigen a Venus. Un sistema de satélites artificiales con repetidores activos o pasivos (en este último caso se emplea la reflexión de las ondas radioeléctricas sobre la superficie del "spútnik") es capaz de asegurar una radiocomunicación global en toda la Tierra.

Las líneas de radiocomunicación cósmicas son próximas a las ideales (§ 41, punto 1) y como base de su cálculo se utiliza la fórmula (41.8). Introduciendo en ella las características del receptor, incluyendo la característica general de ruidos, es fácil observar la influencia de diferentes factores en el alcance de la radiocomunicación cósmica. Durante el funcionamiento de la línea de radiocomunicación debemos tener $\overline{P}_B \geqslant kT\Delta FNP_s/P_r$, siendo $k = 1{,}38 \times \times 10^{-23} J \cdot \text{grad}^{-1}$ la constante de Boltzmann, T la temperatura absoluta ($T \approx 300°$ K), N el coeficiente de ruido del receptor, P_s/P_r la relación señal/ruido que se exige para el funcionamiento normal del receptor, ΔF su banda de frecuencias. De este modo, de acuerdo con la (41.8),

$$r \leqslant \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{D_A D_B \overline{P}_A / kT\Delta FN \frac{P_s}{P_r}}. \qquad (88.3)$$

La comunicación en las condiciones de fuera de la Tierra pueden tener diferentes particularidades. Por ejemplo, la falta de ionosfera en la Luna dificulta extremadamente el problema de la comunicación lejana. Resulta que para la comunicación entre objetos en la Luna, dispuestos fuera de los límites del horizonte visible, posiblemente, la más ventajosa sería la aplicación de las líneas de radiocomunicación de ondas centimétricas, mediante su retransmisión a través de la Tierra.

Suplementos

Suplemento 1

VECTORES

1. Ciertas fórmulas de álgebra vectorial

Más adelante se tienen en cuenta los vectores $\boldsymbol{A}=x_0A_x+y_0A_y+z_0A_z$, $\boldsymbol{B}=x_0B_x+y_0B_y+z_0B_z$ y $\boldsymbol{C}=x_0C_x+y_0C_y+z_0C_z$ (A_x, A_y, ... son las componentes cartesianas, x_0, y_0, ..., los correspondientes versores).

El producto escalar de los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \equiv \boldsymbol{AB} = AB\cos\alpha = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{S1.1}$$

(el signo $\equiv$ indica el paso a otra designación; α es el ángulo entre las direcciones de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$).

El producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$

$$[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}] \equiv \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \nu_0\, AB\,\mathrm{sen}\,\alpha = x_0\,(A_yB_z - A_zB_y) + y_0\,(A_zB_x - A_xB_z) + z_0\,(A_xB_y - A_yB_x) \tag{S1.2}$$

(ν_0 es un vector unitario de la normal al plano de los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, formando $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y ν_0 un "triplete dextrógiro" de vectores). Escribiendo brevemente

$$[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}] = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{S1.2a}$$

El producto vectorial no es *conmutativo:*

$$[\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A}] = -[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}]. \tag{S1.3}$$

Producto vectorial-escalar (mixto) de los vectores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}] = [\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}]\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{A}]\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{S1.4}$$

Producto doble vectorial de los vectores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$:

$$[\boldsymbol{A},\ [\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}]] = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}), \tag{S1.5}$$

2. Operaciones del análisis vectorial

En la consideración se han incluido las funciones escalares ψ y las vectoriales $\boldsymbol{F}$ *de coordenadas cartesianas y también de coordenadas curvilíneas ortogonales* q_1, q_2, q_3 (versores e_1, e_2, e_3; coeficientes métricos h_1, h_2, h_3) en particular, de coordenadas cilíndricas ($q_1 = r$, $q_2 = \alpha$, $q_3 = z$; $e_1 = r_0$, $e_2 = \alpha_0$,

[1] Los datos que aquí se dan en forma breve, están expuestos detalladamente en [J.5].

$e_3 = z_0$; $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$) y de las esféricas ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \alpha$; $e_1 = r_0$, $e_2 = \theta_0$, $e_3 = \alpha_0$; $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r \operatorname{sen} \theta$).

Gradiente.

a) En coordenadas cartesianas.

$$\operatorname{grad} \psi = \nabla \psi = x_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{S1.6}$$

b) En coordenadas curvilíneas ortogonales arbitrarias:

$$\operatorname{grad} \psi = \nabla \psi = e_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + e_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + e_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3}. \tag{S1.7}$$

c) En coordenadas cilíndricas:

$$\operatorname{grad} \psi = r_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \alpha_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + z_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{S1.8}$$

d) En coordenadas esféricas:

$$\operatorname{grad} \psi = r_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \theta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \alpha_0 \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}. \tag{S1.9}$$

Sean r y r' los radios vectores de los puntos $M(r)$ y $P(r')$ respectivamente. El segmento dirigido $\overrightarrow{PM} = r - r'$ tiene una longitud $|r - r'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$. Si $|r - r'|$ se considera como una función de las coordenadas del punto M (el punto P está fijado), entonces

$$\operatorname{grad} |r - r'| = \frac{r - r'}{|r - r'|}. \tag{S1.10}$$

Si por el contrario $|r - r'|$ se considera como una función de las coordenadas del punto P (está fijado el punto M), entonces utilizando la designación grad' se tiene

$$\operatorname{grad}' |r - r'| = -\frac{r - r'}{|r - r'|}. \tag{S1.11}$$

Divergencia

a) En coordinadas cartesianas:

$$\operatorname{div} F = \nabla F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{S1.12}$$

b) En coordenadas curvilíneas ortogonales arbitrarias:

$$\operatorname{div} F = \nabla F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 F_3) \right]. \tag{S1.13}$$

c) En coordenadas cilíndricas:

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{S1.14}$$

d) En coordenadas esféricas:

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r^2} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta F_\nu) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha}. \tag{S1.15}$$

Operador escalar de Laplace $\nabla^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad}$.

a) En coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \tag{S1.16}$$

b) En coordenadas curvilíneas ortogonales arbitrarias:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{h_3 h_1}{h^2}\frac{\partial\psi}{\partial q^2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{q_3}\right)\right]. \quad \text{(S1.17)}$$

c) En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \quad \text{(S1.18)}$$

d) En coordenadas esféricas:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}. \quad \text{(S1.19)}$$

Rotación.

a) En coordenadas cartesianas:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad \text{(S1.20)}$$

b) En coordenadas curvilíneas ortogonales arbitrarias:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3} & \dfrac{\boldsymbol{e}_2}{h_3 h_1} & \dfrac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2} \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}. \quad \text{(S1.21)}$$

c) En coordenadas cilíndricas:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{r}_0}{r} & \boldsymbol{\alpha}_0 & \dfrac{\boldsymbol{z}_0}{r} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\alpha & \partial/\partial z \\ F_r & rF_\alpha & F_z \end{vmatrix}. \quad \text{(S1.22)}$$

d) En coordenadas esféricas:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{r}_0}{r^2\operatorname{sen}\vartheta} & \dfrac{\boldsymbol{\vartheta}_0}{r\operatorname{sen}\vartheta} & \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_0}{r} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\vartheta & \partial/\partial\alpha \\ F_r & rF_\vartheta & r\operatorname{sen}\vartheta F_\alpha \end{vmatrix}. \quad \text{(S1.23)}$$

3. Fórmulas integrales del análisis vectorial

Teorema de Ostrogradski — Gauss.

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dv = \oint_S \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{s}. \quad \text{(S1.24)}$$

Teorema de Stokes.

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{s} = \oint_L \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{l}. \quad \text{(S1.25)}$$

Teorema de Green.

$$\int_V (\nabla\psi\,\nabla\varphi+\psi\nabla^2\varphi)\, dv = \oint_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, ds \quad \text{(S1.26)}$$

(primera fórmula de Green)

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\, dv = \oint_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right) ds \quad \text{(S1.27)}$$

(segunda fórmula de Green).

Fórmula con la integral de volumen de rot F.

$$\int_V \operatorname{rot} F\, dv = \oint_S [ds,\ F]. \tag{S1.28}$$

En las fórmulas escritas $ds = \nu_0\, ds$ (ν_0 *es el vector unitario de la normal exterior* ν); $dl = \tau_0\, dl$ (τ_0 es el vector unitario de la tangente).

4. Fórmulas diferenciales del análisis vectorial

$$\operatorname{grad} \varphi\psi = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi, \tag{S1.29}$$
$$\operatorname{div} \psi F = F \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{div} F, \tag{S1.30}$$
$$\operatorname{div} [F,\ G] = G \operatorname{rot} F - F \operatorname{rot} G, \tag{S1.31}$$
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0, \tag{S1.32}$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0, \tag{S1.33}$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \nabla^2 F, \tag{S1.34}$$
$$\operatorname{rot} \psi F = [\nabla\psi,\ F] + \psi \operatorname{rot} F, \tag{S1.35}$$
$$\operatorname{grad} f(\xi) = f'(\xi) \operatorname{grad} \xi, \tag{S1.36}$$

5. *Ecuación de las líneas de fuerza*

$$\frac{h_1\, dq_1}{F_1} = \frac{h_2\, dq_2}{F_2} = \frac{h_3\, dq_3}{F_3}, \tag{S1.37}$$

en particular en coordenadas cartesianas

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}.$$

Suplemento 2

FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

La función delta de Dirac $\delta(x-x')$ recibe el nombre de objeto matemático especial que se incluye en la siguiente correlación:

$$\int_L f(x)\, \delta(x-x')\, dx = \begin{cases} 0 & \text{para } x' \text{ fuera de } L, \\ f(x') & \text{para } x' \text{ dentro de } L, \end{cases} \tag{S2.1}$$

siendo $f(x)$ cierta función que se considera en el análisis matemático corriente. La correlación (S2.1) se toma como definición de la función delta.

Si la integración en la (S2.1) se extiende a un intervalo infinito $(-\infty, \infty)$, entonces el resultado será $f(x')$.

En particular, de la (S2.1) se desprende que, siendo $f(x) = 1$:

$$\int_L \delta(x-x')\, dx = \begin{cases} 0 \text{ para } x' \text{ fuera de } L, \\ 1 \text{ para } x' \text{ dentro de } L. \end{cases} \tag{S2.2}$$

En realidad, la correlación (S2.1) reglamenta la aplicación de la función delta.

Aunque $\delta(x-x')$ no es una función en corriente sentido, se puede llegar intuitivamente a la concepción de la función delta al tratar de hallar el límite de la función "impulsiva" (fig. S2.1, *a*, *b*): $\delta(\xi) = \lim_{\Delta\xi \to 0} F(\xi)$ con todo $F(\xi) - 0$ cuando $\xi < -\Delta\xi$ y $\xi > \Delta\xi$, así como se cumple la correlación integral

$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\, d\xi = 1$). En particular, en el caso de un impulso rectangular (fig. S2.1, *b*), se tiene

$$\delta(\xi) = \lim_{\Delta\xi \to 0} \begin{cases} 0 & \text{para } \xi < -\Delta\xi \quad y \quad \xi > \Delta\xi, \\ \dfrac{1}{2\Delta\xi} & \text{para } -\Delta\xi \leqslant \xi \leqslant \Delta\xi \end{cases}$$

(la función es igual a cero en todo lugar, salvo en un entorno infinitamente pequeño del origen de coordenadas donde ella es infinita). Desde el punto de

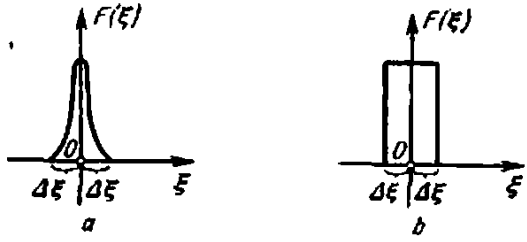


Fig. S2.1.

vista del análisis corriente no existe el límite. Generalización para las regiones tridimensionales:

$$\int_L f(r)\, \delta(r - r')\, dv = \begin{cases} 0 & \text{para } M(r') \text{ fuera de } V, \\ f(r') & \text{para } M(r') \text{ dentro de } V \end{cases} \tag{S2.3}$$

y en particular, siendo $f(r) = 1$

$$\int_L \delta(r - r')\, dv = \begin{cases} 0 \text{ para } M(r') \text{ fuera de V}, \\ 1 \text{ para } M(r') \text{ dentro de } V. \end{cases} \tag{S2.4}$$

Representación de la función delta $\delta(r - r')$:

$$\delta(r - r') = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|r - r'|}. \tag{S2.5}$$

Ejemplos de aplicación de la función delta.

a) Representación de la densidad de la carga $\rho(r)$ en el caso de una carga puntual q situada en el punto $P(r')$:

$$\rho(r) = q\delta(r - r'). \tag{S2.6}$$

b) Representación de la densidad cúbica de la carga $\rho(r)$ en el caso de una superficie S cargada con una densidad $\xi(q_1, q_2)$:

$$\rho(r) = \xi(q_1, q_2)\, \delta(\nu - \nu') \tag{S2.7}$$

(q_1, q_2 son las coordenadas en S; ν es la coordenada ortogonal a S que toma el valor ν' en S, fig. S2.2 *a*).

c) Representación de la densidad de la corriente $j(r)$ en el caso de una corriente superficial distribuida por S con una densidad $\eta(q_1, q_2)$:

$$j(r) = \eta(q_1, q_2)\, \delta(\nu - \nu') \tag{S2.8}$$

(fig. S2.2, *b*).

d) Representación de la densidad de la corriente $j(r)$ en el caso de la corriente I que pasa por la línea L (fig. S2.2, *c*):

$$j(r) = \tau_0 I \delta(r - r'), \tag{S2.9}$$

siendo la función delta bidimensional; en correspondencia con esto los puntos $M(r)$ y $P(r')$ (el último se encuentra en la línea L) al integrar se quedan en cualquier superficie cruzada por la corriente; el versor τ_0 muestra la dirección de la corriente.

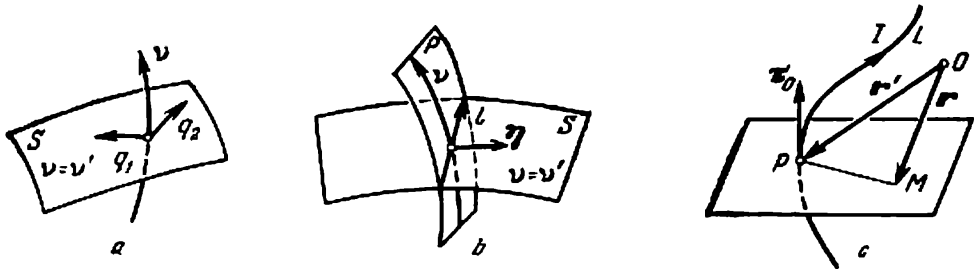


Fig. S2.2.

Suplemento 3

MÉTODO DE LAS AMPLITUDES COMPLEJAS

1. Representación de las oscilaciones armónicas. En el caso de oscilaciones armónicas las funciones vectoriales $F(r, t)$ tienen en forma general el aspecto $F(r, t) = x_0 F_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) + y_0 F_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) + z_0 F_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z)$, (S3.1) siendo $F_{mx} = F_{mx}(r)$, $F_{my} = F_{my}(r)$, $F_{mz} = F_{mz}(r)$ *las amplitudes* de las componentes del vector $F(r, t)$ y $\varphi_x = \varphi_x(r)$, $\varphi_y = \varphi_y(r)$, $\varphi_z = \varphi_z(r)$ sus *fases* (en particular $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = \varphi$; entonces, $F_m = x_0 F_{mx} + y_0 F_{my} + z_0 F_{mz}$ es la amplitud del vector $F(r, t)$.

En virtud de la fórmula de Euler

$$F(r, t) = \mathrm{Re}\, \dot{F}(r, t), \tag{S3.2}$$

donde la representación compleja $\dot{F}$ se obtiene de la (S3.1) sustituyendo los cosenos mediante funciones exponenciales según el esquema: $\cos\alpha \to e^{i\alpha}$. Se desprende la *amplitud compleja*

$$\dot{F}_m(r) = x_0 F_{mx} e^{i\varphi_x} + y_0 F_{my} e^{i\varphi_y} + z_0 F_{mz} e^{i\varphi_z}. \tag{S3.3}$$

Además la representación compleja $\dot{F}$ se expresa como el producto de la función de las coordenadas $\dot{F}_m(r)$ y la función del tiempo $e^{i\omega t}$

$$\dot{F}(r, t) = \dot{F}_m(r) e^{i\omega t}. \tag{S3.4}$$

Indiquemos también que la función $F(r, t)$ (S3.1) es igual a

$$F = \frac{1}{2}(\dot{F} + \dot{F}^*), \tag{S3.5}$$

siendo $\dot{F}^*$ una magnitud conjugada compleja.

Las funciones escalares pueden considerarse como un caso particular de las vectoriales.

2. Su aplicación a las ecuaciones lineales. Supongamos que la función u del tipo (S3.1) está sometida a la ecuación

$$\mathscr{L}u = f, \tag{S3.6}$$

siendo f una función conocida del mismo tipo (oscilaciones armónicas) y $\mathscr{L}$ cierto operador *lineal* (diferencial o integral); si u_1, u_2 son ciertas funciones admisibles, mientras que c_1, c_2 son constantes, entonces $\mathscr{L}(c_1 u_1 + c_2 u_2) =$

$= c_1 \mathscr{L} u_1 + c_2 u_2$. En virtud de la (S3.2) escribamos la ecuación respecto a $\dot{u} = \dot{u}_m e^{i\omega t}$ (S3.4)

$$\mathscr{L} \dot{u} = \dot{f}, \tag{S3.7}$$

que al separar la parte real nos da la (S3.6). Después de realizar las operaciones por t y las eliminaciones del factor $e^{i\omega t}$, obtenemos la ecuación respecto a la amplitud compleja $\dot{u}_m$:

$$\mathscr{L}_\omega \dot{u}_m = \dot{f}_m, \tag{S3.8}$$

donde la dependencia del tiempo no existe. Si su solución $\dot{u}_m$ ha sido hallada, entonces para obtener la solución u de la ecuación (S3.6) sólo es necesario realizar la operación: $u = \operatorname{Re} \dot{u}_m e^{i\omega t}$.

Por ejemplo, en el caso de la ecuación (S3.6) de la forma

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{S3.9}$$

$\left(f = 0, \quad \mathscr{L} = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$ tenemos una ecuación respecto a la amplitud compleja $\dot{u}_m$ (S3.8)

$$\nabla^2 \dot{u}_m + k^2 \dot{u}_m = 0, \quad k = \omega / v \tag{S3.10}$$

($\mathscr{L}_\omega = \nabla^2 + k^2$).

3. Magnitudes medias. El valor medio de la función $\Phi(u_1, u_2)$, donde $u_{1,2}$ tienen la forma (S3.1), llamaremos a la magnitud (que en general es función de las coordenadas)

$$\overline{\Phi(u_1, u_2)} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(u_1, u_2)\, dt, \quad (\omega T = 2\pi). \tag{S3.11}$$

En particular,

$$\bar{u} = 0, \tag{S3.12}$$

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{2} \dot{u}_m \dot{u}_m^* = \frac{1}{2} (u_{mx}^2 + u_{my}^2 + u_{mz}^2), \tag{S3.13}$$

$$\overline{u_1 u_2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{u}_{1m} \dot{u}_{2m}^* = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{u}_{1m}^* u_{2m}, \tag{S3.14}$$

$$\overline{[u_1 u_2]} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{u}_1, \dot{u}_2^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{u}_1^*, \dot{u}_2]. \tag{S3.15}$$

Suplemento 4

ROTACIÓN DEL SISTEMA CARTESIANO DE COORDENADAS

Dado que tenemos dos sistemas de coordenadas (x, y, z) y (ξ, η, ζ) con origen común O (fig. S4.1, *a*). La dirección de cada uno de los ejes del segundo sistema de coordenadas se puede caracterizar mediante tres ángulos entre este eje (por ejemplo ξ) y los tres ejes del primer sistema (es decir, x, y, z), como se muestra en la fig. S4.1, *b*. De esta forma, tenemos nueve ángulos

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix}$$

(por ejemplo, β_1 es el ángulo entre los ejes η y x, γ_3, el ángulo entre los ejes ζ e y, etc.). Evidentemente,

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= x_0\cos\alpha_1 + y_0\cos\alpha_2 + z_0\cos\alpha_3,\\ \eta_0 &= x_0\cos\beta_1 + y_0\cos\beta_2 + z_0\cos\beta_3,\\ \zeta_0 &= x_0\cos\gamma_1 + y_0\cos\gamma_2 + z_0\cos\gamma_3.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(S4.1a)}$$

y

$$\left.\begin{aligned}x_0 &= \xi_0\cos\alpha_1 + \eta_0\cos\beta_1 + \zeta_0\cos\gamma_1,\\ y_0 &= \xi_0\cos\alpha_2 + \eta_0\cos\beta_2 + \zeta_0\cos\gamma_2,\\ z_0 &= \xi_0\cos\alpha_3 + \eta_0\cos\beta_2 + \zeta_0\cos\gamma_3.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(S4.1b)}$$

De modo análogo se transforman las componentes de cierto vector $\boldsymbol{F} = x_0 F_x + y_0 F_y + z_0 F_z = \xi_0 F_\xi + \eta_0 F_\eta + \xi_0 F_\xi$, en particular, el radio vector $r = x_0 x + y_0 y + z_0 z = \xi_0\xi + \eta_0\eta + \zeta_0\zeta$. Las fórmulas que se dan a continuación para la

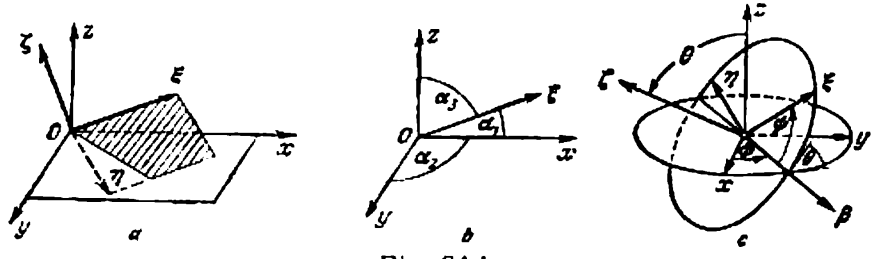


Fig. S4.1.

transformación de las coordenadas de $\boldsymbol{F}$ son, de este modo, también las fórmulas de transformación de las coordenadas $(x, y, z) \rightleftarrows (\xi, \eta, \zeta)$

$$\left.\begin{aligned}F_\xi &= F_x\cos\alpha_1 + F_y\cos\alpha_2 + F_z\cos\alpha_3,\\ F_\eta &= F_x\cos\beta_1 + F_y\cos\beta_2 + F_z\cos\beta_3,\\ F_\zeta &= F_x\cos\gamma_1 + F_y\cos\gamma_2 + F_z\cos\gamma_3\end{aligned}\right\} \qquad \text{(S4.2a)}$$

y

$$\left.\begin{aligned}F_x &= F_\xi\cos\alpha_1 + F_\eta\cos\beta_1 + F_\zeta\cos\gamma_1,\\ F_y &= F_\xi\cos\alpha_2 + F_\eta\cos\beta_2 + F_\zeta\cos\gamma_2,\\ F_z &= F_\xi\cos\alpha_3 + F_\eta\cos\beta_3 + F_\xi\cos\gamma_3.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(S4.2b)}$$

Son justas las correlaciones

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 &= 1,\\ \cos\varphi_1\cos\psi_1 + \cos\varphi_2\cos\psi_2 + \cos\varphi_3\cos\psi_3 &= 0\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\varphi = \alpha,\ \beta,\ \gamma\\ \psi = \alpha,\ \beta,\ \gamma\\ \varphi \neq \psi\end{array} \qquad \text{(S4.3)}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i &= 1,\\ \cos\alpha_i\cos\alpha_k + \cos\beta_i\cos\beta_k + \cos\gamma_i\cos\gamma_k &= 0,\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}i = 1,\ 2,\ 3;\\ k = 1,\ 2,\ 3;\\ i \neq k.\end{array} \qquad \text{(S4.3)}$$

Angulos de Euler. La orientación de un sistema de coordenadas respecto a otro se determina completamente mediante los tres *ángulos de Euler* Θ, Φ y ψ que se eligen como se muestra en la fig. S4.1, *c*. En este caso, los cosenos directivos (de dirección) que figuran en las (S4.1)—(S4.3) se expresan de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned}&\cos\alpha_1 = \cos\Phi\cos\Psi - \cos\Theta\,\mathrm{sen}\,\Phi\,\mathrm{sen}\,\Psi,\\ &\cos\alpha_2 = \mathrm{sen}\,\Phi\cos\Psi + \cos\Theta\cos\Phi\,\mathrm{sen}\,\Psi,\ \cos\alpha_3 = \mathrm{sen}\,\Theta\,\mathrm{sen}\,\Psi,\\ &\cos\beta_1 = -\cos\Phi\,\mathrm{sen}\,\Psi - \cos\Theta\,\mathrm{sen}\,\Phi\cos\Psi,\\ &\cos\beta_2 = -\mathrm{sen}\,\Phi\,\mathrm{sen}\,\Psi + \cos\Theta\cos\Phi\cos\Psi,\ \cos\beta_3 = \mathrm{sen}\,\Theta\cos\Psi,\\ &\cos\gamma_1 = \mathrm{sen}\,\Theta\,\mathrm{sen}\,\Phi,\\ &\cos\gamma_2 = -\mathrm{sen}\,\Theta\cos\Phi,\ \cos\gamma_3 = \cos\Theta.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(S4.4)}$$

SOBRE LAS ECUACIONES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

1. Ecuación de Poisson. Al integrar la ecuación *escalar de Poisson*

$$\nabla^2 u(r) = f(r) \tag{S5.1}$$

se introduce la *función de Green* $G(r, r')$ sometida a la ecuación de Poisson de la siguiente forma:

$$\nabla^2 G(r, r') = \delta(r - r'). \tag{S5.2}$$

Se tiene (compárese con la (S2.5) una función de Green

$$G(r, r') = -\frac{1}{4\pi(r - r')}. \tag{S5.3}$$

Haciendo uso de la segunda fórmula de Green (S1.27) y la fórmula (S2.4), así como teniendo en cuenta la simetría de la función de Green respecto a los argumentos r y r', es fácil obtener la correlación

$$u(r) = \int_V G(r, r') f(r')\, dv' + \oint_S \left[u(r') \frac{\partial G(r, r')}{\partial \nu'} - G(r, r') \frac{\partial u(r')}{\partial \nu'} \right] ds' \tag{S5.4}$$

(las variables son las coordenadas con rayas).

Al examinar las ecuaciones de Poisson en una región infinita es importante la clase de problemas en los que para $r \to \infty$ la solución $u(r)$ decrece *no más* lentamente que $1/r$ ($u(r) = O(1/r)$: "uniformemente en el infinito". En este caso

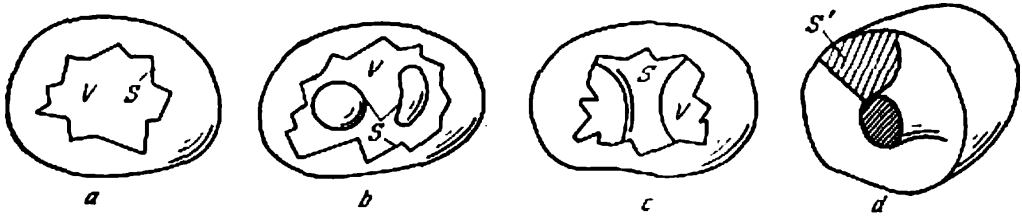


Fig. S5.1.

al trasladar la frontera S de la región V a la infinidad la integral de superficie en la (S5.4) se elimina y se obtiene la siguiente expresión de la solución:

$$u(r) = \int_V G(r, r') f(r')\, dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(r')}{|r - r'|}\, dv'. \tag{S5.5}$$

Análogamente, en el caso de la ecuación vectorial de Poisson

$$\nabla^2 u(r) = f(r) \tag{S5.6}$$

tenemos la expresión de la solución

$$u(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(r')}{|r - r'|}\, dv'. \tag{S5.7}$$

2. Ecuación de Laplace. Las soluciones de la *ecuación de Laplace*

$$\nabla^2 u(r) = 0 \tag{S5.8}$$

crean una clase de funciones llamadas *armónicas*. Gran importancia tienen los problemas de contorno para las ecuaciones de Laplace cuando es preciso hallar la solución de $u(r)$ en la región V, teniendo ciertos datos sobre su conducta en la frontera S. Se consideran problemas *interiores* y *exteriores* (fig. S5.1, *a*, *b*, *c*

y fig. S5.2, *a*, *b*, *c*); en el último caso la región V es infinita. El problema de contorno

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u(r) &= 0 \\ u(r) &= f(r) \text{ en } S \end{aligned}\right\} \tag{S5.9}$$

se denomina *problema de Dirichlet*. Se demuestra (empleando la primera fórmula de Green (S1.26)) que la solución del problema de Dirichlet es única. *Problema de Neumann* se denomina el problema de contorno

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u(r) &= 0, \\ \frac{\partial u(r)}{\partial \nu} &= f(r) \text{ en S.} \end{aligned}\right\} \tag{S5.10}$$

Con todo, en el caso del problema interior debe ser: $\int\limits_S f(r)\, ds = 0$. La solución del problema exterior de Neumann para regiones simplemente conexas (fig. S5.2, *a*, *b*) es única, mientras que la solución del problema interior

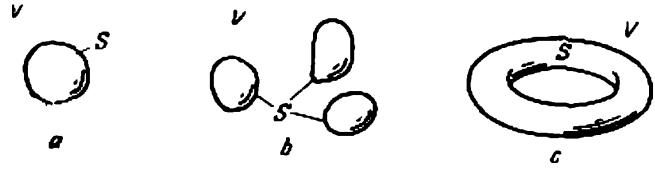


Fig. S5.2.

(fig. S5.1, *a*, *b*) se determina con una aproximación de hasta la constante aditiva. La región biconexa (fig. S5.1, *c* y S5.2, *c*) y en general la multiconexa, se reduce a la región simplemente conexa, introduciendo "planos de separación" (fig. S5.1, *d*). No obstante, si el problema de Neumann es multívoco, entonces dicha operación crea un problema de contorno *mixto* (por los dos lados del plano de separación se prefijan los valores de $u(r)$). La solución de tal problema es única. Anteriormente, en los casos del problema exterior (S5.9) y (S5.10), se ha sobreentendido la regularidad de la solución en el infinito (véase el p. 1, la pág. 644).

Si se sabe que $u(r)$ toma ciertos valores constantes en las partes de la superficie compuesta S (fig. S5.1, *b*, fig. S5.2, *b*), entonces el problema de contorno tiene una solución unívoca que se define prefijando la integral $\int \frac{\partial u(r)}{\partial \nu}\, ds$ en cada parte de S.

3. Ecuación de D'Alembert y ecuación no homogénea (heterogénea) del Helmholtz.

La ecuación no homogénea de onda o ecuación de D'Alembert

$$\nabla^2 u(r, t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} = f(r, t) \tag{S5.11}$$

en el caso de oscilaciones armónicas proporciona (véase la pág. 643) la *ecuación no homogénea de Helmholtz* respecto a la amplitud compleja de la solución de $u(r, t)$:

$$\nabla^2 \dot{u}_m(r) + k^2 \dot{u}_m(r) = \dot{f}_m(r), \quad k = \omega/v. \tag{S5.12}$$

Durante su integración se introduce la función de Green $G(r, r')$ como la solución de la ecuación

$$\nabla^2 G(r, r') + k^2 G(r, r') = \delta(r - r') \tag{S5.13}$$

(compárese con la (S5.2)). En particular la función de Green

$$G(r, r') = -\frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \tag{S5.14}$$

(compárese con la (S5.3)) tiene el carácter de una onda esférica homogénea divergente. Es fácil convencerse de que la fórmula (S5.4) queda siendo justa. Si al examinar una región infinita imponer las llamadas condiciones de radiación

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\frac{\partial \dot{u}_m(r)}{\partial r} + ik\dot{u}(r)\right] = 0, \tag{S5.15}$$

la integral de superficie en la (S5.4), al trasladar la frontera al infinito, se elimina; entonces tendremos la solución

$$\dot{u}_m(r) = \int_V G(r, r')\,\dot{f}_m(r')\,dv' = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\dot{f}_m(r')\,e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|}\,dv'. \tag{S5.16}$$

Es fácil cerciorarse de que a la condición de radiación satisfacen sólo las soluciones del tipo de ondas esféricas divergentes

$$\dot{u}_m(r) \longrightarrow \frac{\dot{u}(\vartheta, \alpha)}{r}\,e^{-ikr} \text{ siendo } r \longrightarrow \infty \tag{S5.17}$$

($k > 0$; para las ondas convergentes el factor exponencial tiene la forma e^{ikr}; también existe la función de Green (S5.14)) de tal tipo.

En el caso general las funciones $u(r, t)$ y $f(r, t)$ en la ecuación de D'Alembert (S5.11) pueden representarse en forma de integrales de Fourier (pág. 668)

$$u(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(r, \omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \quad \text{y} \quad f(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(r, \omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{S5.18}$$

Entonces, a condición de que se reduzcan a cero la solución, así como su derivada del tiempo, para $t = \pm\infty$, a partir de la (S5.11) se obtiene la ecuación de Helmholtz respecto a la densidad espectral de la solución

$$\nabla^2 \dot{u}(r, \omega) + k^2 \dot{u}(r, \omega) = \dot{f}(r, \omega), \quad k = \omega/v. \tag{S5.19}$$

Expresando $\dot{u}(r, \omega)$ mediante la fórmula (S5.16) y pasando a $u(r, t)$ a base de la (S5.18), hallamos la siguiente representación de la solución de D'Alembert (S5.11)

$$u(r, t) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{f\left(r', t - \frac{|r-r'|}{v}\right)}{|r-r'|}\,dv'. \tag{S5.20}$$

Resultados análogos se obtienen en el caso de ecuaciones vectoriales

$$\nabla^2 u(r, t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} = f(r, t) \tag{S5.21}$$

y

$$\nabla^2 \dot{u}_m(r) + k^2 \dot{u}_m(r) = \dot{f}_m(r) \tag{S5.22}$$

($\dot{k} = k' - ik''$ se ha tomado en el caso dado en forma compleja; $k' > 0$, $k'' \geqslant 0$). A saber,

$$\dot{u}_m(r) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{f_m(r)\, e^{-i\dot{k}|r-r'|}}{|r-r'|}\, dv'. \tag{S5.23}$$

siendo la condición de radiación

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\frac{\partial \dot{u}_m(r)}{\partial r} + i\dot{k}\dot{u}_m(r)\right] = 0 \tag{S5.24}$$

y

$$u(r, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{f\left(r', t - \frac{|r-r'|}{v}\right)}{|r-r'|}\, dv'. \tag{S5.25}$$

4. Ecuación homogénea de Helmholtz. Funciones propias y valores propios

La ecuación homogénea de Helmholtz

$$\nabla^2 u(r) + k^2 u(r) = 0 \tag{S5.26}$$

se denomina simplemente *ecuación de Helmholtz* o *ecuación de onda*. Tomando la región V con la frontera S, planteemos el *primer problema de contorno* para la ecuación de Helmholtz (compárese con la (S5.9))

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u + k^2 u &= 0 \\ u &= 0 \text{ en } S. \end{aligned}\right\} \tag{S5.27}$$

Este problema tiene una sucesión infinita de soluciones $\{u_n\}$, cada una de las cuales se realiza para un valor determinado del número $k^2 = k_n^2$. Las soluciones de u_n reciben el nombre de *funciones propias*, mientras que k_n^2, las *soluciones propias* del problema correspondientes a ellas. La numeración se efectúa en tal orden que $k_1^2 \leqslant k_2^2 \leqslant k_3^2 \leqslant \ldots$ $(0 \leqslant k_n^2 \leqslant \infty)$.

El segundo problema de contorno para la ecuación de Helmholtz se formula de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u + k^2 u &= 0 \\ \partial u/\partial \nu &= 0 \text{ en } S. \end{aligned}\right\} \tag{S5.28}$$

Además, este es un problema que genera un sistema de funciones propias y los valores propios respectivos.

Para la ecuación vectorial de Helmholtz tenemos el siguiente *primer problema de contorno*:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 u(r) + k^2 u(r) = 0, \\ &u_\tau = 0, \ \operatorname{div} u = 0 \text{ en } S, \end{aligned}\right\} \tag{S5.29}$$

y el *segundo problema de contorno*

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 u(r) + k^2 u(r) = 0, \\ &u_\nu = 0, \ (\operatorname{rot} u)_\tau = 0 \text{ en } S. \end{aligned}\right\} \tag{S5.30}$$

Estos problemas también generan sistemas de funciones (vectoriales) propias con los valores propios que a ellas corresponden.

Para los problemas escalares (S5.27) y (S5.28), mediante la primera fórmula de Green no es difícil obtener la expresión integral

$$k^2 = \frac{\int\limits_V |\operatorname{grad} u|^2 \, dv}{\int\limits_V |u|^2 \, dv}. \tag{S5.31}$$

De modo análogo para los problemas vectoriales (S5.29) y (S5.30)

$$k^2 = \frac{\int\limits_V (|\operatorname{rot} \boldsymbol{u}|^2 + |\operatorname{div} \boldsymbol{u}|^2) \, dv}{\int\limits_V |\boldsymbol{u}|^2 \, dv} \tag{S5.32}$$

(para obtener la (S5.32) se emplean las fórmulas (S1.34), (S1.30), (S1.31) y el teorema de Ostrogradski—Gauss). De las (S5.31), (S5.32) se desprende el carácter no negativo de los valores propios de k^2.

Las expresiones (S5.31), (S5.32) pueden considerarse como *funcionales* ("función de funciones"). En calidad de las funciones que se introducen en las (S5.31), (S5.32) se toman aquellas que satisfacen a las condiciones límites de las (S5.27), (S5.28) y (S5.29), (S5.30). En tal caso el valor mínimo del funcional resulta ser igual al valor propio mínimo del problema de contorno, mientras que la función que le realiza, resulta ser la función propia correspondiente a k_1^2.

Suplemento 6.

FUNCIONES ESPECIALES

1. Ecuación de Bessel y funciones cilíndricas. La ecuación diferencial ordinaria

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{S6.1}$$

se denomina *ecuación de las funciones cilíndricas* o bien *ecuación de Bessel* de n-ésimo orden. Sus soluciones, llamadas *funciones cilíndricas*, es cómodo comparar con las soluciones de la ecuación $y'' + y = 0$, es decir, con las trigonométricas y exponenciales. Así, a las soluciones particulares de esta ecuación $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ corresponden las siguientes soluciones de las ecuaciones de las funciones cilíndricas (S6.1):

$J_n(x)$ — *función de Bessel de n-ésimo orden,*

$N_n(x)$ — *función de Neumann de n-ésimo orden.*

De este mismo modo a las funciones exponenciales $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ y $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$, corresponden las siguientes funciones cilíndricas:

$H_n^{(1)}(x)$ — *función de Hankel de 1-r género, n-ésimo orden,*

$H_n^{(2)}(x)$ — *función de Hankel de 2-o género, n-ésimo orden.*

Tienen lugar las igualdades

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x) \quad \text{y} \quad H^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x). \tag{S6.2}$$

Las funciones cilíndricas no son periódicas, pero ellas "oscilan"; las funciones $J_n(x)$ y $N_n(x)$ toman al crecer x valores que oscilan cerca de cero con amplitud

que decrece monótonamente y que se aproximan a las trigonométricas cuando $x \longrightarrow \infty$. Es útil recordar que $J_0(0)=1$ y $J_n(0)=0$ cuando $n \neq 0$, así como $N_n(0)=-\infty$. La solución general de la ecuación (S6.1) se puede expresar de dos formas:

$$y = AJ_n(x) + BN_n(x) \tag{S6.3a}$$

o

$$y = PH_n^{(1)}(x) + QH_n^{(2)}(x). \tag{S6.3b}$$

Por general se exige que la solución satisfaga la *condición de limitación*: $|y| < \infty$. Por esto, si en la consideración entra el punto $x=0$, entontes la solución general de la (S6.3a) toma la forma

$$y = AJ_n(x). \tag{S6.4}$$

Las gráficas de ciertas funciones cilíndricas se muestran en la fig. S6.1.

2. Representaciones asintóticas de las funciones cilíndricas. Cuando el argumento crece ilimitadamente, las funciones cilíndricas se convierten en trigonométricas o respectivamente, en exponenciales;

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] + O(x^{-3/2}), \tag{S6.5}$$

$$N_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] + O(x^{-3/2}), \tag{S6.6}$$

$$H_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left[x-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]} + O(x^{-3/2}), \tag{S6.7}$$

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left[x-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]} + O(x^{-3/2}). \tag{S6.8}$$

Es evidente que

$$y = QH_n^{(2)}(x) \tag{S6.9}$$

es una solución que para $x=kr$ tiene el carácter de la amplitud compleja de una onda divergente.

3. Series exponenciales; representaciones de las funciones de pequeño argumento. Las funciones de Bessel se representan en forma de series exponenciales (de potencias) de forma

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{0!\,n!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!\,(n+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!\,(n+2)!} - \ldots, \tag{S6.10}$$

por esta razón, para $x \ll 1$

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{n!2^n} \quad \left(J_0(x) \approx 1,\ J_1(x) \approx \frac{x}{2}\right). \tag{S6.11}$$

Escribamos también las representaciones:

$$N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} \quad \text{y} \quad N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n,\ n>0 \tag{S6.12}$$

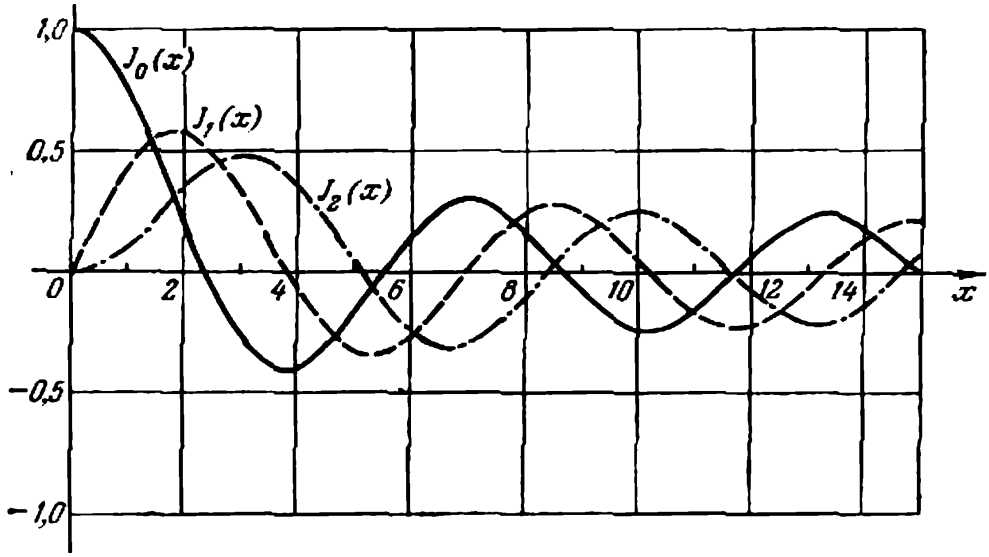
($\gamma = 1{,}781\ldots$).

4. Correlaciones funcionales. Más adelante vamos a entender por $Z_n(x)$ una función cilíndrica arbitraria. Para un número n natural

$$Z_{-n}(x) = (-1)^n Z_n(x) \quad (Z_{-1} = -Z_1). \tag{S6.13}$$

Seguidamente

$$\frac{dZ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} Z_n(x) + Z_{n-1}(x) = \frac{n}{x} Z_n(x) - Z_{n+1}(x). \tag{S6.14}$$


1,0
0,5
0
−0,5
−1,0
$J_0(x)$
$J_1(x)$
$J_2(x)$
2
4
6
8
10
12
14
x

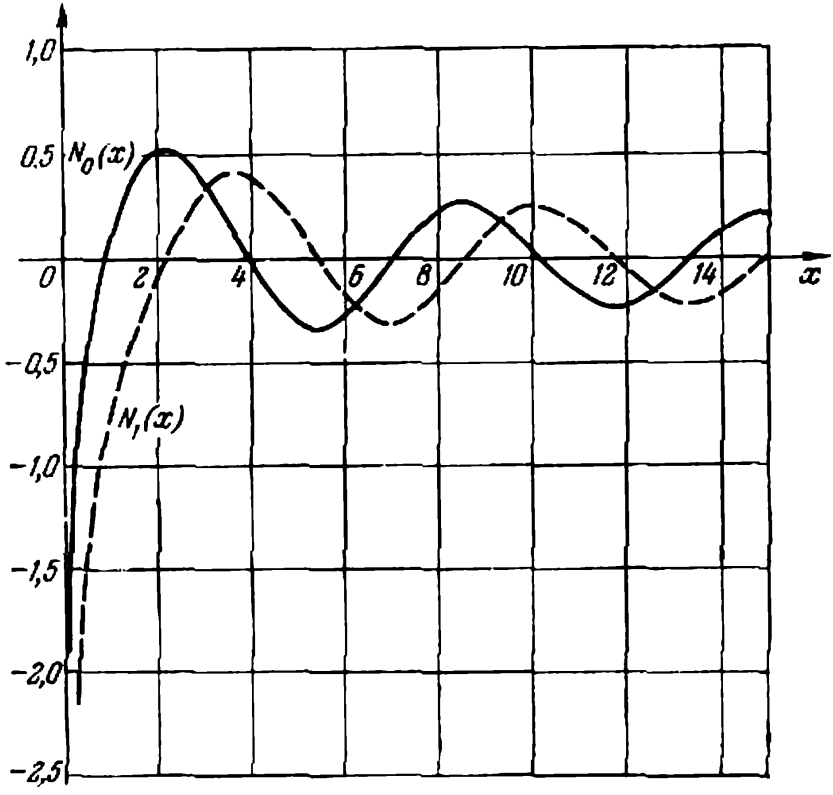

1,0
0,5
0
−0,5
−1,0
−1,5
−2,0
−2,5
$N_0(x)$
$N_1(x)$
2
4
6
8
10
12
14
x

Fig. S6.1.

En particular, de aquí se desprende:

$$Z_{n-1}(x)+Z_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}Z_n(x). \tag{S6.15}$$

Otras fórmulas de diferenciación:

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}Z_n(kx)]=-kx^{-n}Z_{n+1}(kx) \tag{S6.16}$$

y

$$\frac{d}{dx}[x^nZ_n(kx)]=kx^nZ_{n-1}(kx) \tag{S6.17}$$

$$\left(\text{en particular } Z_0'(x)=-Z_1(x) \text{ y } Z_1'(x)=Z_0(x)-\frac{Z_1(x)}{x}\right).$$

Integrales indeterminadas:

$$\int x^{n+1}Z_n(x)\,dx=x^{n+1}Z_{n+1}(x), \tag{S6.18}$$

$$\int x^{-n+1}Z_n(x)\,dx=-x^{-n+1}Z_{n-1}(x), \tag{S6.19}$$

$$\int xZ_n^2(x)dx=\frac{x^2}{2}[Z_n^2(x)-Z_{n-1}(x)Z_{n+1}(x)]=\frac{x^2}{2}\left\{\left[1-\left(\frac{n}{x}\right)^2\right]Z_n^2(x)+Z_n'^2(x)\right\}, \tag{S6.20}$$

$$\int\left[\frac{n^2Z_n^2(x)}{x^2}+Z_n'^2(x)\right]x\,dx=\frac{x^2}{2}\left[Z_n^2(x)\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)+\frac{2}{x}Z_n(x)Z_n'(x)+Z_n'^2(x)\right], \tag{S6.21}$$

$$\int xZ_n(\alpha x)Z_n(\beta x)\,dx=\frac{\beta xZ_n(\alpha x)Z_{n-1}(\beta x)-\alpha xZ_{n-1}(\alpha x)Z_n(\beta x)}{\alpha^2-\beta^2}. \tag{S6.22}$$

5. Desarrollos por las funciones de Bessel. Dado que cierta función $f(\alpha)$ está definida en el segmento $-\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi$. Desarrollando $f(\alpha)$ en una serie de Fourier según $\{e^{in\alpha}\}$ (véase la pág. 670), se tiene

$$f(\alpha)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{in\alpha}, \qquad a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\,e^{-in\alpha}\,d\alpha.$$

Tomemos $f(\alpha)=e^{-ix\cos\alpha}$. Teniendo en cuenta la representación integral

$$J_n(x)=\frac{(-i)^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(x\cos\alpha+n\alpha)}\,d\alpha, \tag{S6.23}$$

vemos que la serie de Fourier toma la forma

$$e^{-ix\cos\alpha}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^nJ_n(x)\,e^{in\alpha}. \tag{S6.24}$$

6. Tablas de las raíces. Designando por $x=B_{nm}$ las raíces de las ecuaciones $J_n(x)=0$, reducimos ciertas de ellas en una tabla

n \ m	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223

A continuación, damos la tabla de las raíces $x = A_{nm}$ de la ecuación $J_n'(x) = 0$.

n \ m	1	2	3	4
0	3,832	7,016	10,173	13,324
1	1,841	5,331	8,536	11,706
2	3,054	6,706	9,969	13,170
3	4,201	8,015	11,346	

7. Funciones cilíndricas de orden semientero

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^n}{(x\,dx)^n}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right); \tag{S6.25}$$

$$N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n-1} x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^n}{(x\,dx)^n}\left(\frac{\cos x}{x}\right). \tag{S6.26}$$

En particular,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x, \quad J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right), \tag{S6.27}$$

$$N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad N_{3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{x}\right)$$

Las funciones de Hankel se determinan a base de las (S6.2).

8. Funciones referidas de Lagrange. Las soluciones limitadas de la ecuación

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dT}{dt}\right] + \left(p^2 - \frac{m^2}{1-t^2}\right) T = 0 \tag{S6.28}$$

$(-1 < t < 1)$ son las *funciones referidas de Lagrange* $P_n^{(m)}(t)$, tomando en este caso el parámetro p^2 un valor $n(n+1)$ (valores propios que corresponden a estas funciones propias):

$$T(t) = P_n^{(m)}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ m \leqslant n), \tag{S6.29}$$

siendo $P_n(t)$ los polinomios de Lagrange:

$$P_0(t) = 1, \ P_1(t) = t, \ P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \ \ldots, \tag{S6.30}$$

$$(n+1) P_{n+1}(t) - t(2n+1) P_n(t) + n P_{n-1}(t) = 0.$$

Suplemento 1.

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE LAS VARIABLES

1. Esencia del método. Solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. En el método de separación de las variables la ecuación con derivadas parciales se reduce a ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, en el

caso de la ecuación bidimensional de Laplace en coordenadas cilíndricas (la solución no depende de z), en virtud de la (S1.18), se tiene

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}=0 \qquad \text{(S7.1)}$$

(el factor común sin importancia $1/r$ se omite). Se introduce la suposición que la solución buscada $u(r)=u(r, \alpha)$ es el producto $u(r, \alpha)=\mathcal{R}(r)\mathcal{A}(\alpha)$, donde cada uno de los factores depende solamente de una de las coordenadas. Poniendo esta representación en la (S7.1), multiplicando posteriormente ambos términos por $r/\mathcal{R}\mathcal{A}$, nos da

$$\frac{r}{\mathcal{R}}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathcal{R}}{dr}\right)+\frac{1}{\mathcal{A}}\frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2}=0. \qquad \text{(S7.2)}$$

De este modo, el primer miembro de la (S7.1) se ha conseguido representar en forma de la suma de dos funciones *independientes*. Los sumandos deben ser *constantes*. Efectivamente, fijando cierta valor de r y haciendo de esta manera constante el primer sumando, variaremos en los límites posibles α, lo que podemos efectuar en virtud de la independencia de los sumandos. Como vemos en la (S7.2), el segundo sumando queda en este caso invariable e igual al primero con signo contrario. Las consideraciones pueden continuarse fijando el valor de α y variando r. La constante a la que es igual el primer sumando es hasta el momento desconocida. Designémosla por n^2. Igualando los sumandos de la (S7.2) a n^2 y $-n^2$ respectivamente, obtenemos, después de evidentes transformaciones, pos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2}+n^2\mathcal{A}=0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\mathcal{R}}{dr}-n^2\frac{\mathcal{R}}{r^2}=0. \qquad \text{(S7.3)}$$

Esto es el resultado de la «separación de las variables». Claro está que la ecuación de Laplace (S7.1) tiene una solución en la forma $u=\mathcal{R}\mathcal{A}$, y sólo es preciso hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{A}$.

La solución de la primera ecuación (S7.3) la escribimos en la forma

$$\mathcal{A}(\alpha)=A\cos n\alpha+B\operatorname{sen} n\alpha. \qquad \text{(S7.4)}$$

Si se busca en la región $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, entonces la exigencia de unicidad nos lleva a la condición de periodicidad: $\mathcal{A}(\alpha+2\pi)=\mathcal{A}(\alpha)$. De aquí se deduce que $n=0, 1, 2, \ldots$. Luego

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(r)=Cr^n+Dr^{-n}, \quad n\neq 0, \\ &\mathcal{R}(r)=C\ln r+D, \quad n=0,\end{aligned} \qquad \text{(S7.5)}$$

lo que da la posibilidad de escribir la solución de la ecuación de Laplace $u(r, \alpha)=\mathcal{R}(r)\mathcal{A}(\alpha)$.

2. Solución de la ecuación homogénea de Helmholtz en coordenadas cartesianas. La solución de la ecuación (S5.26) que en coordenadas cartesianas tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0 \qquad \text{(S7.6)}$$

vamos a buscarla en la forma $u(x, y, z), =X(x)Y(y)Z(z)$. Introduciendo en la (S7.6) esta representación, después de dividir todos los términos por $u=XYZ$, se obtiene

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2=0, \qquad \text{(S7.7)}$$

de donde (compárese con el punto 1) se desprenden ecuaciones diferenciales *ordinarias*

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\chi_x^2X=0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2}+\chi_y^2Y=0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2}+\chi_z^2Z=0, \qquad \text{(S7.8)}$$

siendo χ_x^2, χ_y^2, χ_z^2 ciertas constantes subordinadas a la igualdad $\chi_x^2+\chi_y^2+\chi_z^2=k^2$. Evidentemente,

$$X=A\cos\chi_x x+B\operatorname{sen}\chi_x x,\quad Y=C\cos\chi_y y+D\operatorname{sen}\chi_y y,$$
$$Z=E\cos\chi_z z+F\operatorname{sen}\chi_z z \tag{S7.9a}$$

o en otra forma

$$X=Pe^{-i\chi_x x}+Qe^{i\chi_x x},\quad Y=Re^{-i\chi_y y}+Se^{\chi_y y},\quad Z=Te^{-i\chi_z z}+We^{i\chi_z z}. \tag{S7.9b}$$

En el caso bidimensional (la solución no depende de z), en lugar de k^2 en la (S7.6) escribiremos χ^2. Además $u(r)=u(x, y)=X(x)Y(y)$ (S7.9) y $\chi_x^2+\chi_y^2=\chi^2$.

Consideremos el *primer problema de contorno* (S5.27) en el caso bidimensional:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\chi^2 u=0,\\ &u=0\text{ cuando }\begin{cases}x=0, & x=a\\ y=0, & y=b\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{S7.10}$$

(la función $u(x, y)$ está determinada en un rectángulo, fig. S7.1, *a*). Vamos a buscar la solución de $u=XY$ empleando las fórmulas (S7.9a). Imponiendo la

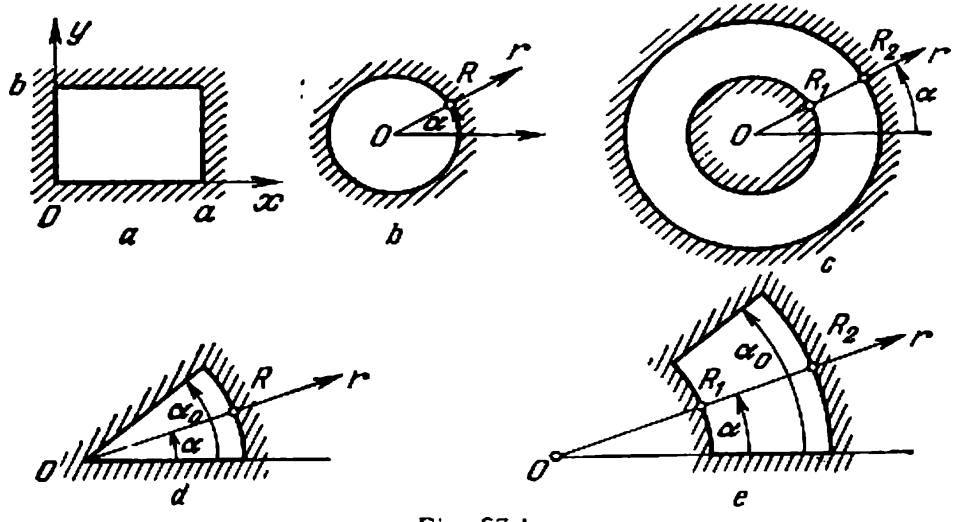


Fig. S7.1.

condición límite $u(0, y)=0$, exigiremos la igualdad $A\cos\chi_x x+B\operatorname{sen}\chi_x x=0$ para $x=0$, de donde $A=0$. De modo análogo, de la exigencia $u(x, 0)=0$, se desprende que $C=0$. De esta forma $u(x, y)=u_0\operatorname{sen}\chi_x x\operatorname{sen}\chi_y y$, donde u_0 es la constante $u_0=BD$. Seguidamente, de la condición límite $u(a, y)=0$ tenemos que $\operatorname{sen}\chi_x a=0$ y de aquí $\chi_x a=m\pi$ ($m=0, 1, 2, \ldots$). De modo semejante, de la condición $u(x, b)=0$ obtenemos: $\chi_y b=n\pi$ ($n=0, 1, 2, \ldots$). Por último hallamos las siguientes soluciones del problema (S7.10):

$$u(x, y)=u^{mn}(x, y)=u_0\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}. \tag{S7.11}$$

Estas son las *funciones propias* del problema (S7.10) a las que corresponden los *valores propios* $\chi_{mn}^2=\chi_x^2+\chi_y^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ (véase el suplemento 5, punto 4).

Formulemos el *segundo problema de contorno* (S5.28) para la misma región:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\chi^2 u=0, \\ &\frac{\partial u}{\partial x}=0 \text{ para } x=0,\ x=a;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{ para } y=0,\ y=b. \end{aligned}\right\} \tag{S7.12}$$

Mediante razonamientos análogos hallamos las siguientes *funciones propias* de este problema:

$$u(x, y)=u^{mn}(x, y)=u_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{S7.13}$$

a las que responden los *valores propios* anteriores $\chi^2_{mn}=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$.

3. Solución de la ecuación homogénea de Helmholtz en coordenadas cilíndricas. La ecuación (S5.26) tiene ahora la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2 u=0. \tag{S7.14}$$

Buscando su solución $u(r, \alpha, z)=\mathcal{R}(z)\,\mathcal{A}(\alpha)\,Z(z)$, después de poner la representación dada en la (S7.14) y dividir por $u=\mathcal{R}\mathcal{A}Z$, se obtiene

$$\frac{1}{\mathcal{R}r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathcal{R}}{dr}\right)+\frac{1}{\mathcal{A}r^2}\frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2=0. \tag{S7.15}$$

El tercer término es la función de la coordenada z y, por lo tanto, independiente de los anteriores lo que nos permite (compárese con el punto 1) hacerlo igual a una constante que designaremos por $-\chi_z^2$. Por esto tenemos la ecuación

$$\frac{1}{\mathcal{R}r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathcal{R}}{dr}\right)+\frac{1}{\mathcal{A}r^2}\frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2}=-\chi^2,\qquad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz}=-\chi_z^2,$$

siendo $\chi^2+\chi_z^2=k^2$. Para separar las variables en la primera ecuación multipliquemos sus miembros por r^2, lo que nos da

$$\frac{r}{\mathcal{R}}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathcal{R}}{dr}\right)+\frac{1}{\mathcal{A}}\frac{d^2\mathcal{A}}{dz^2}+\chi^2 r^2=0.$$

Aquí, hacemos la parte dependiente del radio igual a n^2. En fin de cuentas la (S7.15) nos lleva a las tres siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\mathcal{R}}{dr}+\left(\chi^2-\frac{n^2}{r^2}\right)\mathcal{R}=0, \\ &\frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2}+n^2\mathcal{A}=0,\qquad \frac{d^2Z}{dz^2}+\chi_z^2 Z=0. \end{aligned}\right\} \tag{S7.16}$$

Con todo, la primera de las ecuaciones es la de Bessel (S6.1) en la que $x=\chi r$. Se tiene

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{R}=AJ_n(\chi r)+BN_n(\chi r)=PH_n^{(1)}(\chi r)+QH_n^{(2)}(\chi r), \\ &\mathcal{A}=C\cos n\alpha+D\operatorname{sen} n\alpha=\mathrm{Re}^{-in\alpha}+Se^{in\alpha}, \\ &Z=E\cos\chi_z z+F\operatorname{sen}\chi_z z=Te^{-i\chi_z z}+We^{i\chi_z z} \end{aligned}\right\} \tag{S7.17}$$

(compárese con las (S7.9a), (S7.9b).

El primer problema de contorno (S5.27) para un círculo (fig. S7.1, *b*) se formula de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\chi^2 u=0, \\ &u=0 \text{ para } r=R;\ u(\alpha+2\pi)=u(\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{S7.18}$$

Para otras regiones tenemos condiciones límites diferentes, a saber:

para una región anular (fig. S7.1, *c*)

$$u=0 \text{ para } r=R_1,\ r=R_2;\quad u=(\alpha+2\pi)=u(\alpha); \tag{S7.18a}$$

para una región sectorial (fig. S7.1, *d*)

$$u=0 \text{ para } r=R,\quad \alpha=0,\ \alpha=\alpha_0; \tag{S7.18b}$$

para una región sectorial de un anillo (fig. S7.1, *e*)

$$u=0 \text{ para } r=R_1,\ r=R_2,\ \alpha=0,\ \alpha=\alpha_0. \tag{S7.18c}$$

Para el caso de una región circular (fig. S7.1, *b*) obtenemos las soluciones:

$$u^{nm}(r,\alpha)=J_n(\chi r)(C\cos n\alpha+D\operatorname{sen} n\alpha)=J_n(\chi r)\left(Qe^{-in\alpha}+Te^{in\alpha}\right) \tag{S7.19}$$

(en las (S7.17) $B=0$, véase la (S6.4)), siendo $\chi=\chi_{nm}=B_{nm}/R$, donde B_{nm} son las raíces de la ecuación $J_n(x)=0$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m=1,\ 2,\ \ldots$ (véase el Suplemento 6, punto 6). A las *funciones propias* u^{nm} corresponden los *valores propios* χ^2_{nm} (compárese con el punto 2).

En el caso de una región anular tenemos las siguientes *funciones propias*

$$u^{nm}(r,\alpha)=\left[J_n(\chi r)-\frac{J_n(\chi R_1)}{N_n(\chi R_1)}N_n(\chi r)\right]\begin{Bmatrix}C\cos n\alpha+D\operatorname{sen} n\alpha,\\ Qe^{-in\alpha}+Te^{in\alpha}\end{Bmatrix} \tag{S7.20}$$

(entre corchetes se dan dos formas de la expresión) a las que corresponden los *valores propios* χ^2_{nm} ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$), que son las raíces de la ecuación (fig. S7.1, *c*)

$$\frac{J_n(\chi R_1)}{J_n(\chi R_2)}=\frac{N_n(\chi R_1)}{N_n(\chi R_2)}. \tag{S7.21}$$

En el caso de una región sectorial (fig. S7.1, *d*)

$$u^{nm}(r,\alpha)=u_0J_n(\chi r)\operatorname{sen} n\alpha. \tag{S7.22}$$

siendo $n=k\pi/\alpha_0$, $k=1,\ 2,\ \ldots$; $\chi=\chi_{nm}=B_{nm}/R$.

Para un sector anular (fig. S7.1, *b*)

$$u^{nm}(r,\alpha)=u_0\left[J_n(\chi r)-\frac{J_n(\chi R_1)}{N_n(\chi R_1)}N_n(\chi r)\right]\operatorname{sen} n\alpha, \tag{S7.23}$$

en donde n es la misma que en la (S7.22), mientras que χ está subordinada a la ecuación (S7.21).

Formulemos el *segundo problema de contorno* para un círculo (fig. S7.1, *b*)

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\chi^2u=0,\\ \frac{\partial u}{\partial r}=0 \text{ si } r=R;\quad u(\alpha+2\pi)=u(\alpha)\end{gathered} \tag{S7.24}$$

y demos las condiciones límites para otras regiones:

para una región anular (fig. S7.1, *c*)

$$\frac{\partial u}{\partial r}=0 \text{ cuando } r=R_1,\quad r=R_2;\quad u(\alpha+2\pi)=u(\alpha); \tag{S7.25a}$$

para una región sectorial (fig. S7.1, *d*)

$$\frac{\partial u}{\partial r}=0 \text{ cuando } r=R,\quad \frac{\partial u}{\partial\alpha}=0 \text{ cuando } \alpha=0,\quad \alpha=\alpha_0; \tag{S7.25b}$$

para una región sectorial de un anillo (fig. S7.1, *e*)

$$\frac{\partial u}{\partial r}=0 \text{ siendo } r=R_1, \quad r=R_2; \qquad \frac{\partial u}{\partial \alpha}=0$$

$$\text{siendo } \alpha=0, \ \alpha=\alpha_0. \tag{S7.25c}$$

De acuerdo con esto tenemos una solución en forma de sistemas de las funciones propias con los valores propios respectivos:

para una región circular (fig. S7.1, *b*)

$$u^{nm}(r, \alpha)=J_n(\chi r)(C\cos n\alpha+D\operatorname{sen} n\alpha)=J_n(\chi r)\left(Qe^{-in\alpha}+Te^{in\alpha}\right), \tag{S7.26}$$

donde $\chi=\chi_{nm}=A_{nm}/R$, siendo A_{nm} las raíces de la ecuación $J_n'(x)=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $m=1, 2, \ldots$ (véase el suplemento 6, punto 6);

para una región anular (fig. S7.1, *c*)

$$u^{nm}(r, \alpha)=\left[J_n(\chi r)-\frac{J_n'(\chi R_1)}{N_n'(\chi R_1)}N_n(\chi r)\right]\times \times\begin{Bmatrix} C\cos n\alpha+D\operatorname{sen} n\alpha \\ Qe^{-in\alpha}+Te^{in\alpha}\end{Bmatrix}, \tag{S7.27}$$

al mismo tiempo

$$\frac{J_n'(\chi R_1)}{J_n'(\chi R_2)}=\frac{N_n'(\chi R_1)}{N_n'(\chi R_2)}; \tag{S7.28}$$

para una región sectorial (fig. S7.1, *d*)

$$u^{nm}(r, \alpha)=u_0 J_n(\chi r)\cos n\alpha, \tag{S7.29}$$

en donde n es la misma que en la (S7.22), mientras que $\chi=\chi_{nm}=A_{nm}/R$;

para una región sectorial de un anillo (fig. S7.1, *e*)

$$u^{nm}(r, \alpha)=\left[J_n(\chi r)-\frac{J_n'(\chi R_1)}{N_n'(\chi R_1)}N_n(\chi r)\right]\cos n\alpha, \tag{S7.30}$$

donde n es la misma, y χ, las raíces de la ecuación (S7.28).

4. Solución de la ecuación homogénea de Helmholtz en coordenadas esféricas. Ahora la ecuación (S5.26) tiene la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+k^2u=0. \tag{S7.31}$$

Poniendo $u(r, \vartheta, \alpha)=\mathcal{R}(r)\Theta(\vartheta)\mathcal{A}(\alpha)$ y multiplicando todos los términos por $r^2\operatorname{sen}^2\vartheta/\mathcal{R}\Theta\mathcal{A}$, se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{\mathcal{R}}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mathcal{R}}{dr}\right)+\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\Theta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)+\frac{1}{\mathcal{A}}\frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2}+k^2r^2\operatorname{sen}^2\vartheta=0.$$

El tercer término que sólo depende de α se iguala a $-m^2$, y la ecuación se descompone en dos, una de las cuales se divide por $\operatorname{sen}^2\vartheta$ después de lo que los términos que dependen solamente de r se igualan a p^2. Como resultado tenemos tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\mathcal{R}}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mathcal{R}}{dr}\right)+k^2r^2=p^2, \\ \frac{1}{\Theta\operatorname{sen}\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)-\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\vartheta}=-p^2, \\ \frac{d^2\mathcal{A}}{d\alpha^2}+m^2\mathcal{A}=0.\end{gathered} \tag{S7.32}$$

Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $u(r, \vartheta, \alpha+2\pi) = r(r, \vartheta, \alpha)$, así que $m = 0, 1, 2, \ldots$ En la ecuación respecto a $\Theta(\vartheta)$ hacemos la sustitución $t = \cos\vartheta$ y la reducimos a la forma

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{d\Theta}{dt}\right] + \left(p^2 + \frac{m^2}{1-t^2}\right)\Theta = 0 \qquad \text{(S7.33)}$$

$(-1 < t < 1)$. Esta es la ya examinada ecuación (S6.28), de forma que $\Theta(\vartheta) = P_n^{(m)}(\cos\vartheta)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. La primera de las ecuaciones (S7.32) después de diferenciar las expresiones entre paréntesis y sustituir (de acuerdo con la consideración de la (S6.28)) p por $n(n+1)$, así como la representación $\mathcal{R}(r) = \rho(r)/\sqrt{kr}$, se convierte en la forma siguiente:

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr} + \left[k^2 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]\rho = 0. \qquad \text{(S7.34)}$$

Esto es ni más ni menos que la ecuación de Bessel (S6.1) del orden $n+\frac{1}{2}$ respecto a las funciones $\rho(kq)$. De esa manera

$$\mathcal{R}(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}}\left[J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + BN_{n+\frac{1}{2}}(kr)\right] = \frac{1}{\sqrt{kr}}\left[PH^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) + QH^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)\right]$$

Así, las soluciones de la ecuación (S7.31) tienen la forma

$$u(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{kr}}\left\{\begin{matrix} AJ_{n+\frac{1}{2}}(kr) + BN_{n+\frac{1}{2}}(kr) \\ PH^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) + QH^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) \end{matrix}\right\} \times$$

$$\times P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\left\{\begin{matrix} G\cos m\alpha + D\,\mathrm{sen}\, m\alpha \\ Re^{-im\alpha} + Se^{-im\alpha} \end{matrix}\right\}. \qquad \text{(S7.35)}$$

Suplemento 8.

SERIES DE FOURIER Y SISTEMAS ORTOGONALES

Desarrollo de Fourier y el método de amplitudes complejas. Dado que en la (S3.6) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{f}$ son ciertas funciones periódicas del tiempo (período T). Desarrollémoslas en series de Fourier, empleando la forma compleja. Así,

$$\boldsymbol{a}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{a}_n e^{in\omega t}, \quad \dot{\boldsymbol{a}}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \boldsymbol{a}(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \qquad \text{(S8.1)}$$

$(\omega T = 3\pi)$; de modo análogo se desarrolla la conocida función $\boldsymbol{f}(t)$; sus coeficientes de Fourier $\dot{\boldsymbol{f}}_n$ en diferencia de $\dot{\boldsymbol{a}}_n$ pueden considerarse conocidos al plantear el problema. Introduciendo los desarrollos de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{f}$ en la (S3.6), obtenemos respecto a los coeficientes de Fourier $\dot{\boldsymbol{a}}_n$ las siguientes ecuaciones de la forma (S3.8):

$$\mathcal{Z}_{n\omega}\dot{\boldsymbol{a}}_n = \dot{\boldsymbol{f}}_n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{(S8.2)}$$

En el caso de una dependencia del tiempo arbitraria, es posible las funciones u y f representar en forma de las integrales de Fourier. Así,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad \dot{u}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \tag{S8.3}$$

En este caso, a partir de la (S3.6) se obtiene una ecuación del tipo (S3.8) respecto al plano espectral $\dot{u}(\omega)$:

$$\mathscr{L}_{\omega}\, \dot{u}(\omega) = \dot{f}(\omega) \tag{S8.4}$$

($\dot{f}(\omega)$ es la densidad espectral de la conocida función $f(t)$).

Indiquemos que para poner directamente la integral de Fourier $u(t)$ bajo el signo del operador $\mathscr{L}$, es necesario efectuar cierta argumentación, pero la última puede ser sustituida por el el siguiente procedimiento. Sea, por ejemplo, $\mathscr{L} = d/dt$. Escribamos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{L} u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt,$$

de donde después de la integración por partes

$$\mathscr{L}_{\omega} \dot{u}(\omega) + (2\pi)^{-1} u(t)\, e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \dot{f}(\omega)$$

($\mathscr{L}_{\omega} = i\omega$). La ecuación (S8.4) se desprende de aquí cuando $u(\pm\infty) = 0$.

2. Sistemas ortogonales. El *producto escalar* (u, v) de las funciones u y v, determinados en V, se llama la integral

$$(u, v) = \int_{V} u v^{*} dv. \tag{S8.5}$$

En particular, en lugar del volumen V pueden figurar la superficie S o la línea L. Se dice que u y v son *ortogonales* si $(u, v) = 0$.

El sistema de funciones $u_1, u_2, u_3, \ldots$ (brevemente $\{u_n\}$), se denomina el *sistema ortogonal* si para cada dos de las funciones u_l y u_k se cumple la correlación de ortogonalidad $(u_l, u_k) = 0$. Eligiendo los coeficientes constantes, se puede convertir este sistema en *ortonormalizado*, es decir, asegurar el cumplimiento de la igualdad

$$(u_l, u_k) = \delta_{ik}, \tag{S8.6}$$

siendo $\delta_{ik} = 0$ para $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ para $i = k$ (*símbolo de Croneker*).

Tomando el sistema ortonormalizado de las funciones $\{u_n\}$ y cierta función u, determinada en la misma región, confeccionamos la serie

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \quad a_n = (u, u_n). \tag{S8.7}$$

Esta serie se llama *ortogonal* o *serie de Fourier* de la función u y u_n se llama coeficientes de Fourier. La propiedad distintiva de la serie de Fourier es el cumplimiento de la igualdad

$$(u, u_k) = (u, u_k), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{S8.8}$$

Efectivamente, formando en las (S8.7) el producto escalar con u_k, en el segundo miembro obtenemos cero en todos los términos, salvo en el k-ésimo que en virtud de la (S8.6) nos dará a_k. Se dice que la serie de Fourier u *converge por término medio* hacia u, mientras que el sistema $\{u_n\}$ es completo (en este

sentido), si

$$\left(u - \sum_{n=1}^{N} a_n u_n,\quad u - \sum_{n=1}^{N} a_n u_n\right) \longrightarrow 0 \text{ cuando } N \longrightarrow \infty. \qquad (S8.9)$$

Para entender la esencia del desarrollo de Fourier examinemos la siguiente ilustración. Sea que en un espacio tridimensional se ha elegido un sistema de coordenadas cartesianas y, por consiguiente, se tienen tres vectores unitarios perpendiculares entre sí $u_1 = x_0$, $u_2 = y_0$ y $u_3 = z_0$. Tomando el vector arbitrario u lo podemos desarrollar *por dichos versores (fig. S8.1)*:

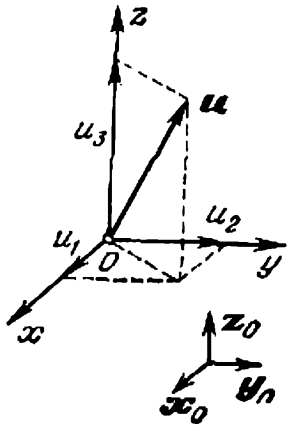


Fig. S8.1.

$$u = \sum_{n=1}^{N} a_n \overline{u}_n, \quad a_n = (u, u_n) = a u_n. \qquad (S8.10)$$

Ahora, el vector u está representado mediante sus tres proyecciones $a_n = (u, u_n)$ que son los productos escalares de u por los *vectores básicos* unitarios u_n sometidos a la correlación $(u_i, u_k) = \delta_{ik}$ (compárese con la (S8.10)). Comparando las (S8.10) con las (S8.7) advertimos una clara analogía formal entre el desarrollo ya realizado del vector u y la serie de Fourier de la función u. La función es semejante a un vector en un espacio de dimensiones infinitas, mientras que su serie de Fourier puede considerarse como el desarrollo de este vector en la base compuesta por el sistema ortonormalizado $\{u_n\}$.

Señalemos que la (S8.1) conviene considerarla como una serie de Fourier (S8.7) que se obtiene al desarrollar la función $u(t)$ determinada en el intervalo $-T/2 \leqslant t \leqslant T/2$ por *el sistema ortonormalizado* $\{u_n\} = \left\{\sqrt{1/T}\, e^{in\frac{2\pi}{T}t}\right\}_{-\infty}^{\infty}$. Efectivamente, en este caso las (S8.7) tienen los siguientes aspectos

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\frac{2\pi}{T}t}, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\, dt.$$

En calidad de ejemplo de un sistema totalmente ortonormalizado de las funciones determinadas en la región V en forma de un paralelepípedo con aristas a, b, c, presentamos el siguiente:

$$\{u^{mnp}\} = \left\{u_0 \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{p\pi z}{c}\right\},$$

siendo $u_0 = 2\sqrt{2}/\sqrt{abc}$ para $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$; cuando entre estos números hay ceros, u_0 tantas veces se divide por $\sqrt{2}$ como ceros hay (uno, dos o tres). Estas son las funciones propias del segundo problema de contorno para la ecuación de Helmholtz (S5.28) (véase también el suplemento 7).

3. Sobre el operador de Laplace. Los problemas de contorno (S5.27)—(S5.30) se pueden expresar brevemente en la forma

$$\mathcal{L}u = \varkappa u, \qquad (S8.11)$$

donde $\mathcal{L} = -\nabla^2$, teniendo en cuenta que las funciones u están sometidas a las condiciones límites exigidas y que están incluidas en la determinación del operador $\mathcal{L}$. Es fácil comprobar que el operador $\mathcal{L}$ es *simétrico* en todos estos casos, es decir, se cumple la correlación (véase la (S8.5))

$$(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v). \qquad (S8.12)$$

En virtud de lo anteriormente expuesto (suplementos 5 y 7) (S8.11) hay un problema sobre los valores propios. Sea u_n las funciones propias del problema (S8.11) a las que corresponden los valores propios $\varkappa_n$; supongamos que todos los $\varkappa_n$ son diferentes o, como suelen decir, no hay *degeneración*. Tomando dos cualesquiera funciones propias u_l y u_k, se tiene:

$$\mathcal{L}u_l = \varkappa_l u_l \text{ y } \mathcal{L}u_k = \varkappa_k u_k.$$

Formando los productos escalares $(\mathcal{L}u_l, u_k)$ y $(u_l, \mathcal{L}u_k)$, obtenemos

$$(\mathcal{L}u_l, u_k) - (u_l, \mathcal{L}u_k) = (\varkappa_l - \varkappa_k)(u_l, u_k)$$

($\varkappa_l$ y $\varkappa_k$ son reales, véase el suplemento 5, punto 4), o en virtud de la (S8.12)

$$(\varkappa_l - \varkappa_k)(u_l, u_k) = 0, \tag{S8.13}$$

y de aquí se desprende que para $l \neq k$, $(u_l, u_k) = 0$, es decir, las funciones propias u_n son *ortogonales*.

4. Sobre los métodos de proyección. Dado que se ha planteado un problema (posiblemente cierto problema de contorno de electrodinámica) en la forma

$$\mathcal{A}u = f, \tag{S8.14}$$

donde $\mathcal{A}$ es, en particular, un operador diferencial, prefijado con las respectivas condiciones límites. La diferencia $\mathcal{A}u - f$ es igual a cero y por lo tanto, también son iguales a cero sus proyecciones en la base $\{u_k\}$, los coeficientes de Fourier $(\mathcal{A}u - f, u_n)$:

$$(\mathcal{A}u - f, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{S8.15}$$

En la mayoría de los casos las soluciones analíticas cerradas de los problemas (S8.14) son inaccesibles. Pero existen métodos que permiten obtener soluciones aproximadas que pueden ser tan próximas como se quiera a las series de Fourier de las verdaderas soluciones; tales métodos se denominan de *proyección*.

El *método de proyección de Galérkin* consiste en que se construye la representación de la solución de u en forma de la suma

$$u^N = \sum_{n=1}^{N} a_n^N u_n \tag{S8.16}$$

con los coeficientes indefinidos a_n^N y en lugar de las (S8.15) se toman N de correlaciones análogas de ortogonalidad

$$(\mathcal{A}u^N - f, u_k) = 0, \; k = 1, 2, \ldots, N. \tag{S8.17}$$

Veamos fácilmente que estas correlaciones generan un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathcal{A}u_1, u_1)\, a_1^N + (\mathcal{A}u_2, u_1)\, a_2^N + \ldots + (\mathcal{A}u_N, u_1)\, a_N^N = (f, u_1),\\
&(\mathcal{A}u_1, u_2)\, a_1^N + (\mathcal{A}u_2, u_2)\, a_2^N + \ldots + (\mathcal{A}u_N, u_2)\, a_N^N = (f, u_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(\mathcal{A}u_1, u_N)\, a_1^N + (\mathcal{A}u_2, u_N)\, a_2^N + \ldots + (\mathcal{A}u_N, u_N)\, a_N^N = (f, u_N)
\end{aligned}\right\} \tag{S8.18}$$

respecto a los coeficientes a_n^N como las incógnitas es decir, en forma de matrices (Véase el suplemento 9)

$$Aa^N = f,$$

donde en el primer miembro figura el vector $a^N = (a_1^N, a_2^N, \ldots, a_N^N)$ y la matriz A con los elementos $A_{ik} = (\mathcal{A}u_k, u_i)$, mientras que en el segundo miembro, el vector preestablecido $f = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$ con las componentes $f_k = (f, u_k)$. De ese modo, el método de Galérkin reduce el problema (S8.14) a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales (S8.18), cuya solución determina los coeficientes de la representación (S8.16). El método de Galérkin, mediante la integración por partes, aplica también a aquellos casos cuando el operador no puede ser empleado directamente para las funciones básicas.

DATOS SOBRE LAS MATRICES

1. Vectores y matrices. Escribamos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n + b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \ldots + A_{nn}x_n = b_n. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(S9.1)}$$

Existe la siguiente forma abreviada de este sistema:

$$Ax = b, \qquad \text{(S9.2)}$$

donde se han introducido los objetivos

$$\left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{matrix} \right\| = A, \quad \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix} \right\| = x, \quad \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{matrix} \right\| = b. \qquad \text{(S9.2a)}$$

La tabla de los coeficientes A se llama *matriz* cuadrada del orden n, y las columnas x y b (conjunto de números) se consideran como *vectores*; efectivamente, un vector en un espacio tridimensional se caracteriza por un conjunto de tres números que expresan sus componentes; de modo semejante x y b juegan el papel de vectores en un espacio n-dimensional. A los vectores x y b se propagan las reglas corrientes de operación (la suma, multiplicación por escalar, es decir, por un número); el producto escalar de los vectores a y b se determina como un número

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^*. \qquad \text{(S9.3)}$$

El sentido formal de la igualdad (S9.2) consiste en que su primer miembro se debe considerar como el producto de la matriz A por el vector x; desde este punto de vista el primer miembro de (S9.1) muestra la regla para la multiplicación de A por x, cuyo resultado es el vector con las componentes $b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j$.

Con las matrices se realizan también operaciones algebraicas. La igualdad $Aa + Ba = b$, donde A y B son matrices cuadradas de orden n, mientras que a y b, los correspondientes vectores, se puede expresar en la forma: $Ca = b$, siendo C una nueva matriz que es la suma de las matrices A y B: $C = A + B$ ($C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$). Al concepto de la multiplicación de una matriz por otra llegamos teniendo las igualdades del tipo (S9.1) $Ax = b$ y $x = Bc$. Eliminando x, escribimos $Cc = b$, siendo C el producto de A y B. La regla de formación de los elementos C_{ik} de A_{ik} y B_{ik} tiene la forma: $C_{ik} = \sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{sk}$.

2. Ciertos tipos de matrices. Se llama *diagonal* una matriz en la que todos los elementos A_{ik} son iguales a cero cuando $i \neq k$, es decir, $A_{ik} = A_{ik}\delta_{ik}$; en caso particular, para $A_{ik} = \delta_{ik}$, la matriz A se denomina *matriz unidad* y se designa por $A = I$; además todos los elementos A_{ii} son iguales a la unidad, los restantes, iguales a cero.

Transpuesta respecto a A se llama la matriz A' que posee la propiedad de que $A'_{ik} = A_{ki}$.

Se llama *complejamente conjugada* la matriz A^* con elementos complejamente conjugados: $(A^*)_{ik} = A_{ik}^*$.

Luego introduzcamos el concepto de matriz *inversa* A^{-1}; para ella $AA^{-1} = I$ y $A^{-1}A = I$. La matriz A puede no tener matriz inversa y en este caso se denomina *extraordinaria*.

Para la matriz A dada se puede hallar la matriz *conjugada* $\tilde{A}$ que satisfaga la condición

$$(Aa, b) - (a, \tilde{A}b) = 0, \tag{S9.4}$$

siendo a y b vectores arbitrarios. A base de la (S9.3), debemos tener que

$$\sum_{k=1}^{n} (Aa)_k b_k^* = \sum_{i=1}^{n} a_i (\tilde{A}b)_i^*,$$

es decir,

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} b_k^* A_{ki} a_i = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_i \tilde{A}_{ik}^* b_k^*.$$

Para cualesquiera a y b esto es posible sólo cuando se satisface la igualdad $A_{ki} = \tilde{A}_{ik}^*$ para todos las i y k, y por consiguiente

$$\tilde{A}_{ik} = A_{ki}^*. \tag{S9.5}$$

Como vemos, la matriz conjugada es transpuesta y complejamente conjugada.

Si la matriz A es igual a la conjugada ($A = \tilde{A}$), es decir, en virtud de la (S9.4), $(Aa, b) = (a, Ab)$, entonces de ecuardo con la (S9.5) $A_{ik} = A_{ki}^*$. Los elementos diagonales de tal matriz son reales. La matriz se denomina *hermítica* (autoconjugada). Si una matriz *hermítica* es real ($A^* = A$), entonces $A_{ik} = A_{ki}$, es decir, $A = A'$; tal matriz se llama *simétrica*.

Por fin, retornemos a la ecuación (S9.2) y planteemos la cuestión de que propiedad debe poseer la matriz A para que se cumpla la igualdad $(x, x) = (b, b)$. Se puede interpretar de la forma siguiente: al transformar el vector x en el b, este último conserva su longitud, es decir, tiene lugar el giro del vector en un espacio n-dimensional. Expresando b por x tenemos que $(x, x) = (Ax, Ax)$. Escribamos esto tomando en cuenta la (S9.4) en forma de $(x, Ix) = (x, (\tilde{A}A)x)$. De aquí se desprende que la igualdad $(x, x) = (b, b)$ se cumple si

$$\tilde{A}A = I, \tag{S9.6}$$

es decir, en virtud de la definición de la matriz inversa, resulta que la matriz conjugada e inversa son iguales. La matriz inicial A se denomina *unitaria*.

Si matriz A es real y unitaria, entonces $A'A = I$. Tal matriz recibe el nombre *ortogonal*. Indiquemos que son ortogonales las matrices de las transformaciones examinadas en el Suplemento 4, compuestas por los cosenos de dirección en un espacio tridimensional. Los elementos de una matriz ortogonal arbitraria pueden ser interpretados como los cosenos de dirección en un espacio n-dimensional.

3. Inversión de una matriz. Si la matriz A en la (S9.2) no es extraodinaria (tiene su matriz inversa), entonces, multiplicando el primer miembro de la (S9.2) por A^{-1}, obtenemos inmediatamente la solución formal del problema: $x = A^{-1}b$. Se demuestra que

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \Delta_{11}/\Delta & \Delta_{21}/\Delta & \dots & \Delta_{n1}/\Delta \\ \Delta_{12}/\Delta & \Delta_{22}/\Delta & \dots & \Delta_{n2}/\Delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n}/\Delta & \Delta_{2n}/\Delta & \dots & \Delta_{nn}/\Delta \end{Vmatrix}, \tag{S9.7}$$

donde $\Delta = \mathrm{Det}\, A$ es el determinante que corresponde a la matriz A, y Δ_{kn} son los complementos algebraicos de los elementos A_{kn}; subrayemos que en la (S9.7) figuran los complementos algebraicos no de los elementos de la matrices en los lugares en los que ellos se encuentran, sino de los elementos de una matriz transpuesta.

Bibliografía

A. Electrodinámica

1. I. E. Tamm, *Fundamentos de la teoria de la electricidad*, Gostejizdat, 1956.
2. J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*, Mc Graw-Hill, 1941.
3. A. Sommerfeld, *Elektrodynamik*, Akademishe Verlagsgesellschaft, 1967.

B. Electrodinámica para físicos

1. R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Vol. 2, Addison-Wesley, 1964.
2. J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, Wiley, 1962.
3. W.K.H. Panofsky, M. Phillips, *Classical electricity and magnetism*, Addison-Wesley, 1962.

C. Electrodinámica para radiotécnicos y radiofísicos

1. S. Ramo, J. R. Whinnery, T. Van Duzer, *Fields and waves in communication electronics*, Wiley, 1965.
2. L. A. Vainshtein, *Ondas electromagnéticas*, "Sov. radio", 1957.
3. V. V. Nikolski, *Teoria del campo electromagnético*, "Vísshaya shkola" 1964.
4. B. Z. Kazenelenbaum, *Electrodinámica de altas frecuencias*, "Naúka", 1966.
5. V. V. Nikolski, *Antenas*, "Sviaz" 1966.

D. Teoría de oscilaciones y procesos ondulatorios

1. L. I. Mandelshtam, *Obras completas*, tomo IV, Academia de Ciencias de la URSS, 1955.
2. Sommerfeld, *Optik*, Akademische Verlagsgesellschaft, 1959.
3. G. S. Goriélik, *Oscilaciones y ondas*, Goslejizdat, 1950.
4. A. I. Potiejin, *Ciertos problemas de difracción de las ondas electromagnéticas* "Sov. radio", 1948.
5. H. Hönl, A. W. Mane, K. Westpfahl, *Theorie der Bengung*, Springer-Uerlag, 1961.
6. M. Born, E. Wolf, *Principles of optics*, Pergamon press, 1964.
7. V. A. Foc, *Problemas de difracción y propagación de ondas electromagnéticas*, "Sov. radio", 1970.

E. Electrodinámica de los medios y cuestiones adyacentes

1. R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Vol. 2., Addison-Wesley, 1964.
2. L. D. Landáu, E. M. Lifshits, *Electrodinámica de medios continuos*, Gostejizdat, 1957.
3. A. R. Von Hippel, *Dielectrics and waves*, Wiley, 1954.
4. Ch. Kittel, *Introduction to solid state physics*, Wiley, 1968.
5. A. G. Guriévich, *Ferritas en frecuencias superaltas*, Fismatguiz, 1960.
6. B. Lax, K. Button, *Microwave ferrites and ferrimagnetics*, Mc Graw-Hill, 1962.
7. A. L. Mikaelián, *Teoria y aplicación de las ferritas en las frecuencias superaltas*, Gosenergoizdat, 1963.

8. V. M. Fain, Ya. I. Janin, *Radiofísica cuántica*, "Sov. radio", 1965.
9. *Láseres*, Colección de artículos, IL, 1963.
10. S. A. Ajmánov, R. V. Jojlov, *Problemas de óptica no lineal*.
11. N. Blombergen, *Nonlinear optics*, W. A. Benjamin, 1965.
12. V. L. Guinzburg, *Propagación de ondas electromagnéticas en el plasma*, "Naúka", 1967.

F. Ondas de radio en condiciones naturales

1. M. P. Dolujánov, *Propagación de ondas de radio*, "Sviaz", 1965.
2. G. P. Grudinskaya, *Propagación de ondas de radio*, "Visshaya shcola", 1967.
3. B. A. Vvedenski, A. G. Arenberg, *Problemas de propagación de ondas ultracortas*, "Sov. radio", 1948.
4. *Aplicación del radioespectro*, "Sviaz", 1948.
5. D. E. Kerr, *Propagation of short radio waves*, Mc Graw-Hill, 1951.

G. Sistemas de guiado y resonadores

1. G. V. Kisunkó, *Electrodinámica de sistemas huecos*, Edición de VKAS, Leningrado, 1949.
2. A. G. Guriévich, *Resonadores huecos y guias de ondas*, "Sov. radio", 1952.
3. R. A. Silin, V. P. Sazónov, *Sistemas de retardo*, "Sov. radio", 1966.
4. L. A. Vainshtein, *Resonadores abiertos y guías de ondas abiertas*, "Sov. radio", 1966.

H. Historia de las ciencias

1. B. G. Kuznetsov, *Desarrollo de las ideas físicas desde Galileo hasta Einstein enfocadas por la ciencia moderna*, "Naúka", 1966.
2. A. T. Grigorián, A. N. Viátsev, *Enrique Hertz*, "Naúka", 1968.

I. Física matemática

1. A. N. Tijonov, A. A. Samarski, *Ecuaciones de la física matemática*, "Naúka", 1966.
2. S. G. Mijlin, *Métodos variacionales en la física matemática*, "Naúka", 1970.
3. V. V. Nikolski, *Métodos variacionales para los problemas interiores de electrodinámica*, "Naúka", 1967.

K. Matemática

1. N. E. Kochin, *Cálculo vectorial y principios del cálculo de tensores*, Academia de Ciencias de la URSS, 1961.
2. I. E. Tarásov, *Análisis vectorial y principios del cálculo de tensores*, "Visshaya shkola", 1966.
3. B. P. Demidóvich, I. A. Marón, *Fundamentos de la matemática calculatoria*, Fizmatguiz, 1960.
4. G. I. Krushkóvich, G. M. Mordásova, V. L. Podolski, B. S. Rimski-Kórsakov, J. P. Suleimánov, I. A. Chechis, *Colección de problemas y ejercicios de capítulos especiales de la matemática superior*, "Visshaya shkola", 1970.
5. V. V. Nikolski, *Aparato matemático de electrodinámica*, edición del Instituto de radio, electrónica y automática de Moscú, 1973.

L. Manuales

1. Jarke-Emde-Lösch, *Tafeln höerer Funktionen*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1960.
2. G. W. C. Kaye, T. H. Laby, *Tables of physical and chemical constants*, Wiley, 1966.
3. N. Marcuvitz, *Waveguide handbook*, Dover Publ., 1964.

Indice alfabético

Absorción molecular en la atmósfera, 387—388
Adaptación de los medios, 204—205
Aisladores (dieléctricos), 46—49, 108—112, 573—574
— (elementos de la técnica de frecuencias ultraelevadas), 600—603
Algebra lineal, 672—673
— vectorial, 636
Algoritmos universales, 534—540
Amperio, 20
— por metro cuadrado, 22
Amplitud, 641
— compleja, 641
— de onda, 183
Análisis vectorial, 636—639
Angulo de Brewster, 235
— — reflexión, 213
— — incidencia, 212
— — pérdidas, 173
— — refracción, 214
Aproximación de Kirchhoff, 331
Armónicas espaciales, 543
Antena, 12, 245—248, 296, 303, 309, 335, 348, 487, 488
Atenuación, 189
Autoacción de los procesos oscilatorios 627—628

Banda óptica, 251
Bandas de ondas de radiocomunicación, 251—257

Cable coaxial, 141, 153
Caída de tensión, 46
Calibración de Lorentz, 170
Campo cercano de radiación, 264
— de dispersión, 308
— eléctrico estacionario, 155—161
— electromagnético, 11—12, 18
— — armónico, 166—635
— — estacionario, 129—161
— electrostático, 81—122
— exterior de difracción, 308
— interior de difracción, 308
— libre, 167, 183—203, 289—486 540—557
— magnético estacionario, 130—155
— magnetostático, 122—129
Campos forzados, 167, 180, 259, 486—506
— y fenómenos cuasiestacionarios, 162—165, 261—267, 279, 314—315, 324—325, 387, 452, 482—484, 606
— y ondas forzados (excitados), 167, 180, 259, 486—506
— — — libres, 167, 183—203
Capa magnética, 139
Capacidad, 98—106, 162—165
— del condensador, 104
Capacidad de una guía de ondas múltiplemente conexa, 438—439
— — un resonador, 485—486
— mutua, 103
— propia, 103
Carga eléctrica, 17, 35, 36
— magnética, 32, 124, 281, 287
— superficial, 51, 287
— — equivalente, 287
Cargas ligadas, 38, 110—112, 124
Cáustica, 550, 555
Circuito de corriente alterna, 163—165
— — — continua, 161
— magnético, 144
Clasificación de las ondas guiadas, 393—394
— — — — por bandas, 251
Coeficiente de amplificación, 611
— — atenuación, 189, 248, 380, 381, 405
— — directividad, 246, 272
— — reflexión, 206, 220—222, 509, 514
Componentes normales, 50—53
— tangenciales, 53—55
Concentración (densidad) de electrones, 252, 517
Condensador, 104—106
— cilíndrico, 105
— ideal, 104
Condición cuasiestacionaria, 15—16, 161—162
— de radiación, 265, 323, 646—647

Condiciones límites, 50—56, 181
— — de Leontóvich, 237—340
Conductibilidad, 159
— diferencial, 618
Conductividad, 45, 572
Conductor ideal, 47
Conductores, 46—50
Constante de propagación, 224, 391
— — compleja, 391
— dieléctrica (permitividad), 40
— eléctrica, 21
— magnética, 21
Continuidad de las líneas de la corriente total, 28
— — — — — — inducción magnética, 32
Coordenadas curvilíneas, 636
Corriente continua, 129—161
— magnética, 281
— superficial, 55
— — equivalente, 287
— total, 28—29
Corrientes lineales, 134—136, 149—152
Cristales, 579—581
Culombio, 18
— por metro cuadrado, 20

Decibelio, 189
Densidad de la carga, 22
— — — — magnética, 281
— — — — superficial, 51
— — — corriente, 22
— — — — exterior, 50
— — — — magnética, 281
— — — — superficial, 55
— — — energía, 70, 176
— — — fuerza de Lorentz, 45
— — — potencia, 63
— — — — compleja, 176
— del flujo de energía, 70
— — momento eléctrico, 108
— óptica, 214—215
Desvanecimientos, 255, 631
Diagrama de directividad (direccional, de radiación), 247, 272, 292, 300—303, 311, 335, 278
— vectorial, 343, 359
Dieléctrico ideal, 47
Dieléctricos, 46—50, 106—112, 573—574
— no lineales, 622
Diferencia de potencial, 83
Difracción, 306—349, 380—383
— de Fraunhofer, 329—336
— — Fresnel, 336—344
— — las ondas de radio, 369—371 380—382
Difracción en el cilindro, 309—311, 317—325
— — — orificio, 309, 331—349
— — la esfera, 314—315, 325—329
Dimensiones de onda, 340
Dipolo de Hertz, 265—267
— — — ideal, 268
— — — magnético, 279—281
— eléctrico, 89—91
— — ideal, 89
— ideal, 89
— lineal, 274—276
— magnético, 123, 136—140
Dispersión, 198, 401
Divergencia, 637
Dominios, 615

Ecuación de Bessel, 648
— — continuidad, 36
Ecuaciones de D'Alembert, 168, 647
— — electrodinámica, 166
— — — de segundo orden, 168—170, 174—175
— — electrostática, 77, 82
— — Helmholtz, 175, 391, 645—648, 653—658
— — Landau — Lifshitz, 566
— — Laplace, 85, 644
— — magnetostática, 77, 122
— — Maxwell, 13—37, 75—80
Ecuaciones de Maxwell en forma compleja, 173—174
— — onda, 169, 647
— — Poisson, 85, 644
Ecuación del eiconal, 351
— — movimiento de la imanación, 566
— — rayo, 358
— — campo electromagnético estacionario 77
— materiales, 45
Eco alrededor del mundo, 256
Efecto de antípode, 245
— — Cotton-Mouton, 593—595
— — Faraday, 588—593, 599—605
— — Kerr, 597
— «Luxembourgo», 621
— película, 236—244, 457—460
Eiconal, 350—352
Electretos, 126
Electroconductibilidad, 44—50
Electrodinámica, 166
— macroscópica, 18
— microscópica, 17
Electrostática, 81
Elementos de comunicación, 487, 499
— experimentales, 21
Elemento de Huygens, 289—293
— — — generalizado, 292—293
Energía de un dipolo, 115
— del campo cuasiestacionario, 148—150

Energía de un dipolo electromagnético, 69—71
— — — electrostático, 112—115
— — — magnético estacionario, 148—150
— mutua, 79, 114, 151
— propia, 114, 151
Espejismo, 385
Espejos, 311—313, 549—557
Espiral de Cornu, 339
Esquemas integrales, 515

Factor de calidad del resonador, 471—472, 477, 481
Factores interferenciales, 299, 334
Faradio, *102*
— por metro, 21
Fase, 641
Ferromagnéticos, 615—617
Flujo magnético, 26
Fórmula de Austin, 630
— — Shuleikin-Van-Der-Pol, 380
— — Vvedenski, 374
— — Fresnel, 218—229
— — interferencia, 376
Frecuencia crítica, 227, 400, 575, 577
— de combinación, 619
— — plasma, 571
— máxima de explotación, 575
— — — uso, 632—633
Frecuencia mínima de uso, 632—633
— propia compleja, 469
Frente de onda, 183, 391
Fuerza de Lorentz, 19
— magnetomotriz, 144
Fuerzas exteriores, 49—50, 62—64, 160—161
Función delta de Dirac, 51, 55, 87, 108, 134, 150, 296, 499, 504, 639—641
— de Green, 644—646
Funciones armónicas, 644
— de Bessel, 648—651
— propias, 399—413, 415, 423, 426, 468, 474, 479, 501, 653—658

Gradiente, 637
Guía de ondas circular, 423—434
— — — coaxial, 439—444
— — — con aletas radiales, 546
— — — dieléctrica, 232—234, 447—454
— — — de peine, 543—545
— — — en H, 434
— — — — hélice, 546—549
— — — esférica, 253, 629
— — — hueca, 225—229, 412—444, 455—457, 499—525, 527—529, 534—537
— — — rectangular, 412—423, 504—506, 533
Guía de ondas troposférica, 385
— — — biconexas, 436—444
— — — de bandas paralelas, 457
— — — múltiplemente conexas, 436—439
— — — ópticas (fibras ópticas), 451
— — — periódicas, 540—557
— — — — cuasiópticas, 540—557
— — — simplemente conexas, 434—436

Henrio, 150
— por metro, 21
Histéresis, 615—617

Imanación, 39
Impedancia de onda, *185*, 397, 399
— — — compleja, 189, 397, 399
— superficial, 403, 449, 454, 459, 544
Incidencia normal, 204—212
— oblicua, 212—235, 624—627
Inducción eléctrica, 20
— electromagnética, 26, 163
— electrostática, 99
— magnética, 18
Inductancia, 155, 162
— de guía de ondas múltiplemente conexa, 437—439
— del resonador, 485—486
— interior, 153, 460
— mutua, 151
Inductancia propia, 151
Ionosfera exterior, 229
— interior, 252
Integral de Fourier, 199, 658
— — Fresnel, 338
Intensidad del campo eléctrico, 18
— — — magnético, 20
Interpretación de impedancia, 539
Investigaciones de Hertz, 14, 273, 274
— — Mandelshtam sobre la resonancia paramétrica, 608

Lentes, 313, 549—557
— electrostáticas, 560
Ley de Biot-Savart, 134—136, 144—146
— — conservación de la carga, 35—36
— — Coulomb, 12, 87—88
— — inducción electromagnética de Faraday, 26, 162
— — *Joule-Lenz*, 62—64
— — Ohm, 46, 161, 164—165
— — Snell, 212—218

Línea coaxial, 439—444
— de radiocomunicación ideal, 245—248
— — real, 248—250
— monofilar, 435
Linealización, 618
Longitud crítica de onda, 400
— *óptica*, *400*

Magnéticos no lineales, 615—617
Magnetostática, 122—129
Manantiales, 64, 161, 167, 178, 260
Material ferroeléctrico, 126
Matriz, 672—673
— de admitancia, 513—519
— — dispersión, 514, 519—525
— — resistencia, 513—519
Medios activos, 607—613
— anisótropos, 41, 45, 578—607
— dispersivos, 199
— *giróstropos*, *518—607*
— homogéneos, 40
— isótropos, 41
lineales, 40
— no homogéneos, 40
— — lineales, *613—628*
Método de Huygens-Kirchhoff, 329—332
— — Galérkin, 671
— — las amplitudes complejas, 641
— — proyección, 661
— — Ritz, 539
— energético (determinación de la atenuación), 407—412, 419—420, 429—432
Modulación cruzada, 621
Momento eléctrico, 89, 106
— magnético, 124

Néper, *189*
Número de Faraday, 391
— — onda, 184
— — — complejo, 187
— — — longitudinal, 224, 391
— — — transversal, 224, 391

Ohmio, 46
Onda, 183
— amortiguada, 188
— antifase, 442
— armónica, 183
— cofásica, 442
— *esférica*, *265*, *269*
— estacionaria, 197, 209, 465
— extraordinaria, 594—597, 597
— fundamental, 417, 428
— homogénea, 182—192
— incidente, *203*
— no homogénea esférica, 269
— ordinaria, 594—597, 597
— plana homogénea, 182
— — no homogénea, 224, 389
— refractada, 203
— superficial, 231, 403, 448, 540—549
— terrestre, 249, 372—383
Ondas centimétricas, *251*
— cortas, 251, 255—256, 631—633
Ondas decimétricas, 251
— de radio, véase Ondas
— — — troposféricas, 362, 363, 383—388
— directas, 542
— diurnas, 255, 632
— eléctricas (E, TM), 396
— — transversales (H, TE), 393
— electromagnéticas transversales (TEM), 393
— en conductores, 190—192
— — medios absorbentes, 187—192
— — — *giróstropos*, 587—595
— — — no absorbentes, 183—187
— — — un dieléctrico, 190
— — — medio no lineal, 622—628
— — metal, 191
— guiadas, 223—234, 389—457, 540—557
— ionosféricas, 249, 254—256, 274—278
— largas, 251—254, 574—631
— lentas, 232, 402
— magnéticas (H, TE), 393
— — transversales (E, TM), 393
— medias, 251, 631—636
— *métricas*, *251*
— milimétricas, 251
— nocturnas, 255, 632
— ópticas, 251, 635
— rápidas, 229, 397
Ondas troposféricas, *383—388*
— ultracortas, 251, 255—256, 634—635
Operador de Laplace, 637—639, 670
— lineal, 641
Optica electrónica, 566
— geométrica, 306, 309—313, 349—362, 369—371
— no lineal, 624—628
— ondulatoria, 306
Oscilaciones armónicas, 166, 641
— libres (propias), 463—486, 553—557

Paso total, 235
Permeabilidad magnética, 40
— — compleja, 173
Permitividad compleja, 170—173
— del plasma, 571—572, 582

Perturbaciones magnéticas, 255
Plasma, 569—578, 581—583
Plano de incidencia, 212
— — polarización, 194
Polarizabilidad, 39
Polarización circular, 194, 590
— — de ondas, 154, 590
— de un dieléctrico, 108—112, 118—122, 569—574
— — — material magnético, 123, 615—616
— eléctrica, 39
— elíptica de ondas, 194
— espontánea, 126, 515—516
Polarización lineal, 193
— — de ondas, 193
— magnética, 39
Polarización magnética espontánea, 126, 615—617
Potencia, 63—64
— activa, 177
— compleja, 176—177
— de pérdidas, 63—64, 178
— — las fuerzas exteriores, 64, 177—179
— reactiva, 179
Potencial electrodinámico, 169
— magnético, 123
— electrostático, 83—86
— vectorial, 133—134, 168, 263, 276, 284
— — magnético, 284—285
— retardado, 263
Precesión del momento magnético, 565
Precipitaciones (acción en las ondas de radio), 387—388
Presión de la luz, 14, 244
Primer problema de contorno (para las ecuaciones de Helmholtz), 398, 413, 423, 647, 653—668
Principio de acción a distancia, 13
— — — próxima, 13
— — Babinet, 345
— — dualidad, 284—286, 323, 344—349, 588
— — Fermat, 254—255, 566
— — Huygens, 286—289
— — la relatividad de Einstein, 79
— — reciprocidad, 293—297, 519, 592, 596
Problema de Drichlet, 100, 644
— — electrodinámica, 180—182
— — electrostática, 100—101
— — Neuman, 645
— exterior, 644
— — de electrodinámica, 182
— interior, 644
— — de electrodinámica, 180
— sobre los valores propios, 399, 413, 415, 423, 426, 468, 553, 653—658
Problemas exteriores, 645
— interiores, 645
Proceso de difracción en un sistema de guías de ondas, 514
Profundidad de penetración, 237, 241

Radiación, 258—306
Radiador eléctrico elemental, 265—281
— magnético elemental, 265—281
Radiadores elementales, 265—281, 289—293, 348
Región de dominio de la línea de radiocumunicación, 364—371
— del manantial, 63, 260
Reflexión total, 208—211, 215, 223—235
Refracción, 349—362
— atmosférica, 250, 383—386
— — crítica, 385
— — negativa, 385
— — positiva, 384
Refracción crítica, 385
— de las líneas de fuerza, 58—60
— — ondas, 203, 212
— doble, 596
— en la ionósfera, 249—250, 254—257, 574—576
Relación de transferencia, 206, 220—222, 509, 514
Resistencia, 46
— de radiación, 272, 280
— del sistema de guías de ondas, 509
— superficial, 241
Resistencias mutuas, 297
Resonador abierto, 553—557
— cilíndrico, 478—482, 532, 604—605
— coaxial, 481—482
— con inclusiones girotrópicas, 604—607
— de cavidad, 211, 463—499, 525—528, 529—534, 553—556, 526—536, 604—607
— rectangular, 473—478, 497—499, 532—533
Resonadores huecos, 210—211, 463—499, 525—526, 529—534, 534—537, 604—607
— próximos a los cuasiestacionarios, 482—485
Resonancia, 495
— ferromagnética, 585
— giromagnética, 583
— ideal, 495
Resonancia
— molecular, 387—388, 573
— paramétrica, 608
Rotación, 638

Saltos de Barkhausen, 615
Segundo problema de contorno (para las ecuaciones de Helmholtz), 399, 415—416, 426, 547, 655—656
Señal electromagnética, 198—203
Serie de Fourier, 658—661
Simens por metro, 46
Sistema continuo de radiadores, 303
— de cargas, 88—89
— — contornos, 151—152
— — cuerpos conductores, 103—104, 114
— — dipolos, 106; 124
— — ecuaciones de electrodinámica, 166
— — — — electrodinámica en forma compleja, 173
— — — — electrostática, 77, 82
— — — — magnetostática, 77, 122
— — — — Maxwell, 75—80
— — — del campo electromagnético estacionario, 77
— — radiadores, 297—306
— — — discreto, 301—303
— energéticamente aislado, 66, 72—73
— neutral de cargas, 106
Sistemas cuasiópticos, 549—557
Sistemas de guiado, 223—236, 389—457, 540—557
— — guías de ondas, 506—525
— estratificados, 249, 358—362
— inerciales, 79
— periódicos, 540—557
— irregulares, 486—540
— regulares, 486
Solenoide, 144—146
Superficie de impedancia, 403, 544
Superficies equipotenciales, 98
Susceptibilidad eléctrica, 39
— magnética, 39
Sustancia diamagnética, 43

Tangente del ángulo de pérdidas, 173
Tensión, 46
Tensor de conductividad, 46
— — la constante dieléctrica, 42, 582
— — — permeabilidad magnética, 42, 585
— — — susceptibilidad eléctrica, 42
— — — magnética, 42
Teorema de Floquer, 541
— — Gauss, 32
— — Green, 638
— — Ostrogradski-Gauss, 638
— — Stokes, 638
— — unicidad (de electrostática), 100, 644—646
— — — — electrodinámica, 180—182
Teoría de perturbaciones, 525—534
Teoría de relatividad de Einstein, 79
Transformaciones de Lorentz, 79

Ultrarrefracción, 385
Unicidad del teorema de electrostática 180—182

Vacío, 12, 20, 37
Valor medio del vector de Poynting, 177
Valores medios de las magnitudes energéticas, 176—179
— propios, 399, 413, 415, 423, 426, 468, 474, 479, 653—658
Vatio, 63
— por metro cuadrado, 67
— — cúbico, 63
Velocidad de fase, 183, 184, 228, 232, 391, 542
— — grupo, 201—202, 401, 404, 542
— — la luz, 184
— — movimiento de energía, 71, 202, 404
Vector de Poynting, 67
— complejo de Poynting, 177
— de onda, 193

Wéber, 26
— por metro cuadrado, 16

Zona cercana del radiador, 270, 279
— lejana del radiador, 270, 279
Zonas de Fresnel, 343—344, 369

A nuestros lectores:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I—110, GSP, URSS.